N°120 Vingt-neuvième année 2008

Math-Jeunes

Toutes les histoires ont un commencement et une fin. Celle de *Math-Jeunes* a commencé en septembre 1979 et se termine avec ce numéro 120.

Math-Jeunes est une très belle aventure qui a été portée à bout de bras pendant de nombreuses années par quelques bénévoles talentueux. Ces passionnés n'ont pas compté leurs heures pour proposer une revue de qualité aux élèves de toutes les écoles secondaires de la Communauté française. La réalisation d'un numéro de *Math-Jeunes* est un travail énorme : il faut recueillir les articles, en faire la relecture et proposer les diverses corrections aux auteurs, refaire les dessins dans un format adapté, dactylographier les textes, réaliser la mise en page... ceci dans un timing très serré afin de satisfaire les exigences de l'imprimeur et le planning de parution. Ces dernières années, le nombre d'articles proposés est devenu tellement réduit que le rédacteur en chef devait, en plus rédiger lui-même des articles pour maintenir le niveau d'intérêt de la publication.

Depuis plus d'un an, les rédacteurs en chef de *Math-Jeunes* et de *Math-Jeunes* junior, ont annoncé leur désir de passer la main. Malheureusement, le Conseil d'administration de la SBPMef ne leur a pas trouvé de successeur.

D'autre part, *Math-Jeunes* trouvait difficilement un public. Les enseignants se faisaient de plus en plus réticents à en proposer l'abonnement à leurs élèves et le nombre de lecteurs était en diminution constante. Le Conseil d'administration a tenté ces dernières années de raviver l'intérêt pour la revue en publiant des numéros thématiques, en la proposant aux écoles d'enseignement secondaire en Communauté française ou en tentant de pénétrer le marché français. Mais rien n'y fit, malgré la qualité indéniable de la revue, son intérêt auprès des jeunes se faisait de plus en plus confidentiel et c'est avec un réel pincement au coeur que le Conseil d'Administration de la SBPMef a décidé d'arrêter sa parution.

Les jeunes amateurs de mathématiques ne seront pas pour autant abandonnés par la SBPMef. En effet, depuis plus d'un an maintenant, le Conseil d'Administration planche sur la politique éditoriale de la société. Ce travail de réflexion commence à porter ses fruits et des projets à destination des jeunes lecteurs y trouveront leur place.

Il est apparu rapidement que le site Internet de la Société devait faire partie intégrante de la réflexion. Une partie consacrée aux Olympiades mathématiques est en développement. On pourra y trouver toutes les informations pratiques concernant l'OMB mais aussi des questionnaires en ligne pour l'entraînement, des solutions de problèmes, un forum consacré à l'OMB et d'autres fonctionnalités qui seront développées au cours des années à venir.

Une nouvelle publication à destination des enseignants est en préparation. Il s'agit d'un concept nouveau pour la SBPMef qui contiendra aussi des espaces prévus pour les étudiants. Ceux-ci pourront être exploités par les enseignants durant leur cours ou simplement communiqués à la classe sous forme de copies. D'autres actions en faveur des élèves sont à l'étude.

Il ne sert à rien d'avoir des regrets. Le monde change, ce qui était une idée extraordinaire hier n'intéresse plus aujoud'hui. Le bénévolat s'épuise, la relève des anciens n'est pas assurée. Ce sont des faits, l'avenir passe par une mutation qui peut être douloureuse mais que nous devons réussir. C'est la volonté du Conseil d'administration de la SBPMef de proposer une nouvelle politique éditoriale.

Je voudrais maintenant dire 120 fois merci. Merci aux fidèles lecteurs qui ont participé à l'aventure pendant ces nombreuses années. Merci aux auteurs des articles sans qui *Math-Jeunes* n'aurait pas pu survivre jusqu'à ce jour. Ils étaient de qualité et trahissaient un réel amour des mathématiques. Merci aux professeurs qui durant de nombreuses années ont abonné leurs élèves. Merci à Cristina qui ces dernières années a été un rouage essentiel dans la réalisation et la diffusion de *Math-Jeunes*. Merci à Willy Vanhamme, Jules Miewis, Jacqueline Vanhamme, Claudine Festraets, Guy Noël, Michel Ballieu, Christian Van Hooste, André Paternottre qui ont assumé les fonctions de rédacteurs en chef et qui ont passé de nombreuses soirées (nuits) entourés de collaborateurs proches pour boucler les différents numéros dans les temps. Merci à tous les amoureux des mathématiques qui d'une façon ou d'une autre ont eu une influence sur le contenu de la revue et ont permis 120 fois le miracle de la parution.

Gérald Troessaert, Président de la SBPMef.

Math-Jeunes n°120 S, 2–2, 2008

Équations Diophantiennes

Jacqueline Vanhamme

Si vous lisez une biographie de DIOPHANTE vous y trouverez signalé que Diophante s'est intéressé à la décomposition d'un carré en une somme de deux carrés. De manière plus générale, on appelle équation diophantienne toute équation de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

où f est un polynôme à coefficients entiers en les variables x_1, x_2 … x_n dont on recherche les solutions entières (éléments de $\mathbb{Z}$).
Nous allons nous intéresser ici aux plus simples d'entre elles, les équations de la forme

$$ax + by = c$$

avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dont on recherche les solutions entières.

1. Remarquons en premier lieu que si l'on trouve une solution
$$\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$$
on en a une infinité
$$\begin{cases} x = m - bt \\ y = n + at \end{cases}$$
où t est un élément quelconque de $\mathbb{Z}$. En effet
$$\begin{aligned} ax + by &= am - abt + bn + abt \\ &= am + bn = c \end{aligned}$$

2. Si a, b, c ne sont pas premiers entre eux, on obtient une équation équivalente (ayant les mêmes solutions) si on divise les deux membres de l'équation par le plus grand commun diviseur de a, b, c.
Nous ne considérerons donc que les cas où a, b, c sont premiers entre eux.

3. Si a et b ne sont pas premiers entre eux, l'équation n'admettra pas de solution en nombres entiers, car un diviseur commun de a et b diviserait ax et by et donc aussi leur somme ; il devrait donc diviser c.

4. Plaçons-nous dans la situation
   a, b, c sont premiers entre eux,
   a, b sont premiers entre eux.

Si b divise c, on trouve facilement une solution particulière
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{c}{b} \end{cases}$$

5. On peut, sans nuire à la généralité, supposer $a > b$. Si b ne divise pas c, divisons a par b. Soient q le quotient entier et r le reste de la division :
$$a = bq + r \text{ avec } 0 < r < b$$
L'équation peut s'écrire
$$(bq + r)x + by = c$$
ou encore
$$b(qx + y) + rx = c$$
Remarquons que b et r sont également premiers entre eux et que b est plus grand que r. En posant
$$\begin{cases} x_1 = qx + y \\ y_1 = x \end{cases} \qquad (1)$$
on obtient une équation du même type que celle à résoudre, mais avec des coefficients plus petits
$$bx_1 + ry_1 = c$$

- Si r divise c on peut trouver une solution particulière de cette dernière équation. En remplaçant x_1 et y_1 par leurs valeurs dans (1) on pourra déterminer x et y.
- Si r ne divise pas c, on recommence.

6. Ce processus nous conduit nécessairement à rencontrer un reste qui divise c. Vous avez, en effet, certainement reconnu dans celui-ci le processus de recherche du plus grand commun diviseur de a et b. Comme a et b sont premiers entre eux, 1 est un des restes successifs que l'on rencontrera (si on n'a pas eu la chance de pouvoir s'arrêter avant).

L'équation $kx_i + hy_i = c$, si h divise c admet la solution particulière
$$\begin{cases} x_i = 0 \\ y_i = \frac{c}{h} \end{cases}$$
En remontant de proche en proche dans les équations (soigneusement conservées) des changements de variables du type (1) on obtiendra une solution particulière
$$\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$$
donc la solution générale
$$\begin{cases} x = m - bt \\ y = n + at \end{cases}$$

Math-Jeunes n°120 S, 3–4, 2008

L'hexahexaflexagone

Simone Trompler

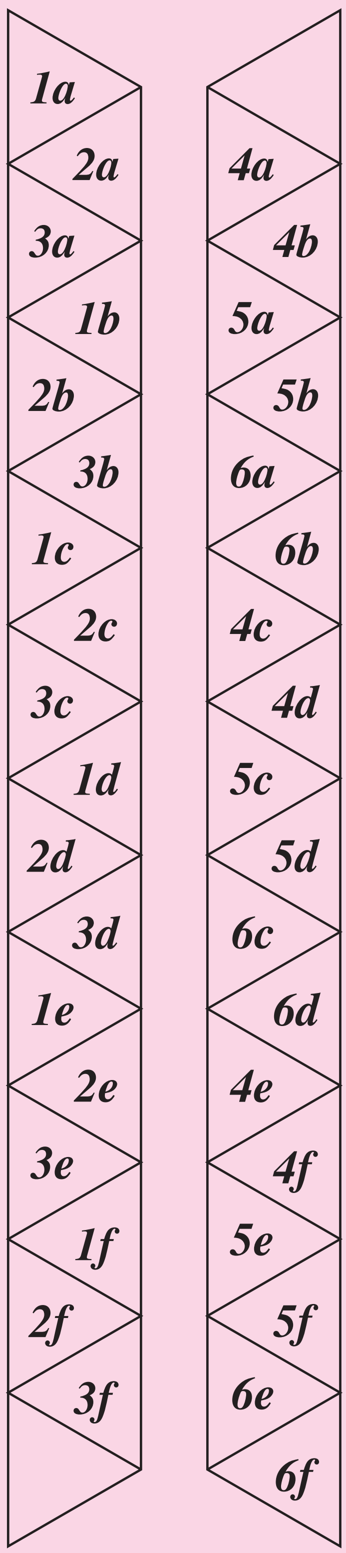


Fig. 1 *Fig. 2*

On appelle *flexagone*, des polygones flexibles obtenus à partir de triangles équilatéraux. Celui que nous allons examiner s'appelle *hexahexaflexagone* parce que c'est un hexagone qui peut montrer six faces différentes !

Pour obtenir un hexahexaflexagone, il suffit de prendre un ruban de papier, large de 3,5 à 4 cm au moins pour que l'objet soit facile à manipuler. Un rouleau de caisse fait l'affaire à merveille : pour 25F on peut rater une série de flexagones et en réussir encore beaucoup plus.

Le premier triangle équilatéral, qui doit avoir comme hauteur la largeur de la bande s'amorce en formant à l'extrémité de la bande un angle de 60° par une découpe aux ciseaux. Il se termine par pliage d'un bord de la bande (le bon) le long de la découpe. Les 18 suivants s'obtiennent à partir du premier, en suivant les bords du papier et en pliant sans tracer c'est facile et rapide !

Marquons ces triangles (*Fig. 1*). Retournons le ruban et marquons de même l'autre face (*Fig. 2*). Ensuite plions 4b sur 4a et, après un retournement de l'ensemble, plions 5b sur 5a : nous voyons apparaître les deux losanges 1a-2a et 2b-3b. En retournant le tout, plions alors 6b sur 6a et en retournant à nouveau plions 4d sur 4c. Continuons les mêmes mouvements, pour former les losanges 3c-1d, 1e-2e et 2f-3f. Le dernier pliage complète la série en amenant 6f sur 6e. Nous obtenons la figure 3.

Plaçons notre objet de gauche à droite, gardons les trois derniers triangles et replions vers l'arrière le long de l'arête gauche de 2e (*Fig. 4*), puis entre 2c et lc, en ramenant vers l'avant 3a sur 3f. Replions la face 1a en dessous de tout : elle se superpose au triangle blanc. Collons les deux faces blanches : l'hexahexaflexagone est prêt (*Fig. 5*). C'est maintenant que cela devient amusant. . .

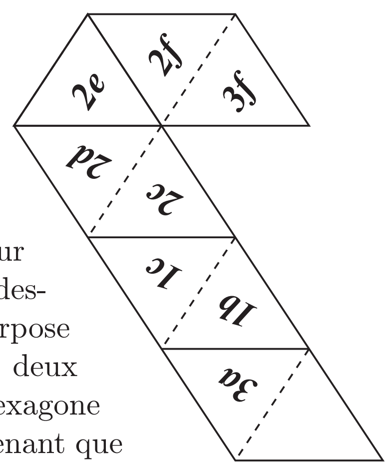


Fig. 4

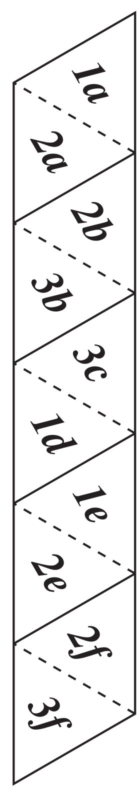
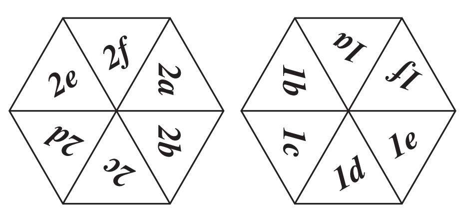


Fig. 3



Verso *Fig.5* Recto

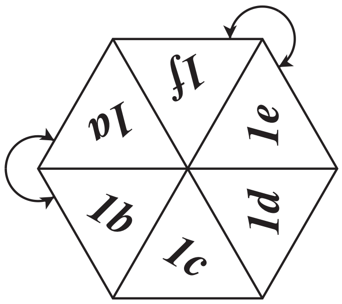


Fig. 6

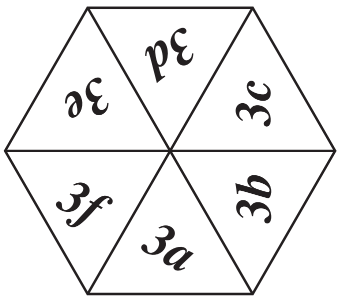


Fig. 7

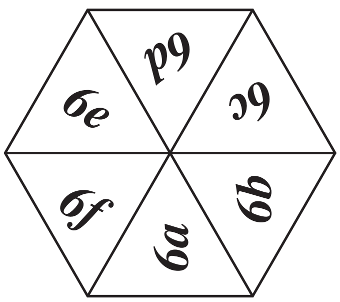


Fig. 8

La face 1 vers nous, prenons l'objet en mains et, du pouce et de l'index gauches pinçons 1a et 1b l'un sur l'autre, de la main droite pinçons 1e sur 1f et, automatiquement, 1c se plie sur 1d (*Fig. 6*) l'hexagone s'ouvre par le milieu nous offrant une troisième face (*Fig. 7*)

Recommençons le jeu entre 3f et 3a, 3d et 3e, 3b et 3c. L'hexagone s'ouvre et voici une 4^{e} face ! (*Fig. 8*). Continuons ... Zut, revoilà la face 1. Est-ce fini ? Et les 2 autres promises ?

Un peu de patience. Repinçons entre 1a et 1b : la forme ne s'ouvre pas (c'est que cette face se présente différemment de la première fois : une décoration dissymétrique nous le montrera plus tard). Tournons alors de 60° et pinçons l'arête suivante et ainsi de suite jusqu'à obtenir une ouverture. Nous vous garantissons que les six faces apparaîtront à un moment ou l'autre. Mais la fréquence d'apparition n'est pas la même pour toutes (c'est une jolie étude à faire).

Maintenant que vous êtes parvenus à trouver ces six faces, pourquoi ne pas inscrire un message en six phrases que vous ferez trouver par un copain (ou copine) ou par un parent ?

À moins que vous ne préfériez faire un jeu de couleurs et de formes décoratives. Vous pouvez obtenir de très jolies choses. Si vous vous donnez le mal de particulariser chaque sommet, vous aurez des surprises en faisant défiler les faces (ex. *Fig 9*).

Réalisez un ou plusieurs hexahexaflexagones et envoyez-les. Le plus beau ou (et) le plus original sera publié.

Un commentaire sur vos constatations sera également le bienvenu.

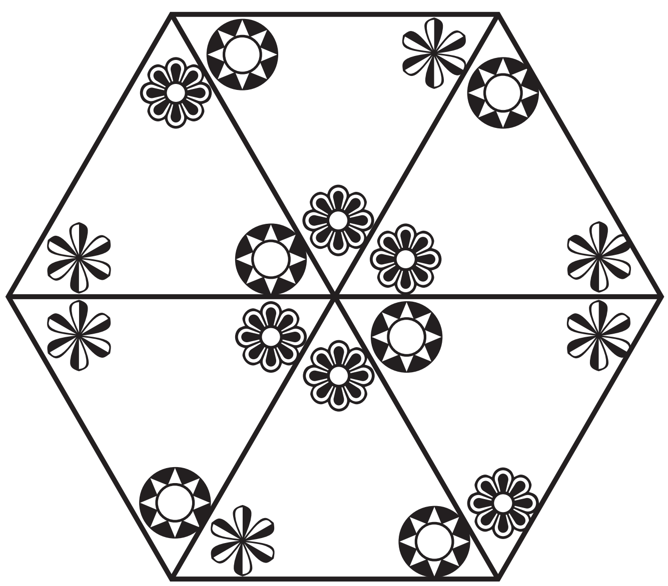


Fig. 9

Math-Jeunes n°120 S, 5–8, 2008

Ne dites plus Jules et Jim sont amis, dites Jules (1184) et Jim (1210)

(Mais non, il ne s'agit pas de leurs dates de naissance !)

Michel Ballieu

La Mathématique est la Reine des Sciences et l'Arithmétique, la Reine des Mathématiques.

—K. F. Gauss (1777–1855)

1. Introduction

On appelle *Théorie des Nombres* la partie des mathématiques qui s'occupe d'arithmétique à un niveau relativement élevé.

Chacun a peut-être encore en mémoire les quelques définitions de base qui suivent.

Nous travaillerons dans l'ensemble

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

et, afin d'alléger le texte, nous conviendrons que, dans cet article, le vocable

« nombre entier »

ou, plus simplement, *« entier »* désignera un élément de $\mathbb{N}^*$.

– *Un entier a est* divisible *par un entier b s'il existe un troisième entier c tel que $a = bc$. On dit encore que b est un* diviseur *de a, ce qu'on note $b \mid a$.*
– *Un entier p est* premier *si p possède* exactement deux *diviseurs : 1 et p.*
  Tout entier supérieur à 1 et non premier est appelé composé. Ainsi,
  ⋆ 2, 3, 5, 7, 11 sont *premiers.*
  ⋆ 4, 6, 8, 9, 10 sont *composés.*
  ⋆ 1 n'est ni *premier* ni *composé.*
– *Deux entiers a et b sont dits* premiers entre eux, *ce qu'on note $(a, b) = 1$, si leur seul diviseur commun est 1.*

Rappelons également, sans le démontrer, le

Théorème fondamental de l'arithmétique
Tout entier n différent de 1 s'écrit de manière unique $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ où $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ sont des premiers, $a_i > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$ et $k \geqslant 1$.

L'écriture de n dans le théorème qui précède s'appelle *forme standard de n.*

2. À propos des diviseurs d'un entier

2.1. La fonction « nombre de diviseurs de n »

Soit n un entier et désignons par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n (y compris 1 et n). Nous allons tenter d'évaluer cette fonction $d(n)$. Remarquons que :

– si $n = p^a$, où p est *premier*, ses diviseurs sont $1, p, p^2, \ldots, p^a$ et leur nombre $d(n) = a + 1$
– si $n = p^a q^b$, où p et q sont des *premiers distincts*, ses diviseurs sont :

$$(b+1)\left\{\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{1,\ p,\ p^2,\ \ldots,\ p^a}}^{(a+1)}} \\ 1, & p, & p^2, & \ldots, & p^a \\ q, & pq, & p^2q, & \ldots, & p^aq \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q^b, & pq^b, & p^2q^b, & \ldots, & p^aq^b \end{array}\right.$$

et donc,

$$d(n) = (a+1) \times (b+1).$$

Théorème 1
Si n est écrit sous sa forme standard unique

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots\ p_k^{a_k},$$

alors

$$d(n) = (a_1+1) \times (a_2+2) \times \cdots \times (a_k+1)$$

ou encore

$$d(n) = \prod_{i=1}^{k} (a_i+1)$$

où la notation $\prod_{i=1}^{k}$ *se lit « produit pour i allant de 1 à k ».*

Nous allons utiliser le principe de démonstration *« par induction »* encore appelé *« par récurrence »*. Ce principe est le suivant :
- on vérifie d'abord que le théorème est vrai pour la plus petite valeur de k
- on suppose ensuite le théorème vrai pour $k = u-1$ et, sous cette hypothèse, on démontre qu'il est vrai pour $k = u$.

La démonstration est alors complète :
- puisque nous avons vérifié que le théorème était vrai pour la plus petite valeur de k, disons $k = 1$, en vertu de la seconde partie de la démonstration, le théorème est encore vrai pour $k = 2$
- maintenant que le théorème est vrai pour $k = 2$, il l'est aussi pour $k = 3$
- … *(in infinitum !)*

Démonstration :
- Nous avons vu que si l'entier $n = p^a$ (le nombre k de premiers distincts vaut 1), alors $d(n) = a+1$. Le théorème est donc vrai pour la plus petite valeur de k.
- Montrons que si nous supposons que le nombre de diviseurs de l'entier $n' = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots\ p_{k-1}^{a_{k-1}}$ est égal à

  $$d(n') = (a_1+1) \times\ (a_2+1) \times \cdots \times\ (a_{k-1}+1)$$

  alors, nous pouvons montrer que pour $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{k-1}^{a_{k-1}} p_k^{a_k}$,

  $$d(n) = (a_1+1) \times (a_2+1) \times \cdots \times (a_k+1)$$

  En effet, on voit aisément que tous les diviseurs de n s'obtiennent en multipliant chacun des diviseurs de n' par

  $$\begin{array}{rcl} 1 & = & p_k^0 \\ p_k & = & p_k^1 \\ & p_k^2 & \\ & \vdots & \\ & p_k^{a_k} & \end{array}$$

  Il y a ainsi (a_k+1) fois plus de diviseurs dans n que dans n', ce qui achève la démonstration.

Exercice 1. Applique donc ce premier théorème à quelques entiers.

2.2. La fonction « somme des diviseurs de n »

Désignons-la par $\sigma(n)$ et essayons de l'évaluer. Remarquons que
- si $n = p^a$, ses diviseurs sont $1, p, p^2, \ldots, p^a$ et leur somme
  $\sigma(n) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a$; il est encore possible d'exprimer cette somme autrement :

  $$\begin{array}{rcl} \sigma(n) & = & p^a + p^{a-1} + \cdots + p^2 + p + 1 \\ p\sigma(n) & = & p(p^a + p^{a-1} + \cdots + p + 1) \\ & = & p^{a+1} + p^a + \cdots + p^2 + p \\ p\sigma(n) - \sigma(n) & = & (p-1)\sigma(n) \\ & = & p^{a+1} + p^a + \cdots + p^2 + p \\ & & -(p^a + p^{a-1} + \cdots + p^2 + p + 1) \end{array}$$

  $$(p-1)\sigma(n) = p^{a+1} - 1$$

  et donc

  $$\sigma(n) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}$$

– si $n = p^a q^b$, ses diviseurs sont

$$\begin{array}{lllll} 1, & p, & p^2, & \dots, & p^a, \\ q, & pq, & p^2q, & \dots, & p^aq, \\ q^2, & pq^2, & p^2q^2, & \dots, & p^aq^2, \\ \vdots & & & & \\ q^b, & pq^b, & p^2q^b, & \dots, & p^aq^b \end{array}$$

et tu vérifieras que leur somme vaut bien $(1+p+p^2+\cdots+p^a)\times(1+q+q^2+\cdots+q^b) = \dfrac{p^{a+1}-1}{p-1}\times\dfrac{q^{b+1}-1}{q-1}$.

Afin d'éviter de remplir ce numéro de *Math-Jeunes* avec un seul article, nous te laissons le soin — si, selon toi, cela s'avère vraiment nécessaire — de faire la démonstration complète par récurrence. Nous avons ainsi :

Théorème 2
Si n est écrit sous sa forme standard unique, alors

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1}\times\cdots\frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$$

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}$$

Exercice 2. Applique ce théorème à quelques entiers.

3. A propos du titre de l'article

On appelle *partie aliquote* d'un nombre, tout diviseur de ce nombre autre que ce nombre lui-même.
Exemple : Les parties aliquotes de 12 sont 1, 2, 3, 4 et 6.

3.1. Nombres parfaits

Un nombre est *parfait* s'il est égal à la somme de ses parties aliquotes.
Exemple : $6 = 1+2+3$

Théorème 3
Si 2^m-1 est premier, alors $n = 2^{m-1}(2^m-1)$ est parfait.

On peut montrer que, pour que 2^m-1 soit premier, il faut nécessairement que m soit premier. Dans ce cas, un premier tel que 2^m-1 est appelé *premier de Mersenne.* Le Révérend Père Marin de Mersenne (1588-1648), ami de Descartes (1596-1650) croyait détenir là une formule permettant de trouver les nombres premiers ; bien qu'imparfaite, sa formule est à l'origine de nombreuses recherches en *Théorie des Nombres.*
Démonstration :
Nous devons voir que la *somme des parties aliquotes de n*, c'est-à-dire $\sigma(n)-n = n$ ou encore que $\sigma(n) = 2n$.
Puisque 2^m-1 est premier, désignons-le par p ; ainsi, nous avons

$$n = 2^{m-1}p$$

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{2^{(m-1)+1}-1}{2-1}\times\frac{p^2-1}{p-1} \\ &= (2^m-1)\times\frac{(p-1)(p+1)}{p-1} \\ &= p\times(p+1) \\ &= 2^m p \\ &= 2\times 2^{m-1}\times p \\ &= 2n \end{aligned}$$

Exercice 3. Nous avons vu que 6 était parfait ; recherche d'autres nombres parfaits (il y en a quatre inférieurs à 10000 ; le cinquième possède 8 chiffres, le sixième, 10, le septième, 12, le huitième, 19 chiffres !!!).
Ce résultat était connu d'Euclide (troisième siècle avant Jésus-Christ) : il constitue la *proposition XXXVI du Neuvième Livre des Eléments* et est ainsi exprimé :
Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait.
Exercice 4. Essaie de décrypter le langage utilisé ci-dessus et convaincs-toi qu'il est équivalent à l'énoncé qui précède.
On peut aussi montrer que tout nombre parfait pair est de la forme mentionnée ci-dessus ; nous devons ce résultat à Euler (1707-1783) mais, à ce jour, nous ignorons toujours s'il existe des nombres parfaits *impairs.*

Des mathématiciens tels que Tuckerman, Hagis, Stubblefield, Buxton et Elmore ont graduellement repoussé la frontière en deça de laquelle il ne peut y avoir de nombre parfait impair ; cette frontière se situe actuellement aux alentours de 10^{200} ! ! ! Ce sont là des résultats relativement récents et qui font appel à des théories nettement moins élémentaires que celles que nous avons utilisées ; ne t'attaque donc pas trop vite à ce problème.

3.2. Nombres amis (ou amiables)

Deux entiers m et n sont dits *amis* ou *amiables* si la somme des parties aliquotes de l'un est égale à l'autre et inversement.
Exemple : 1184 et 1210 (Ouf ! Nous y voilà !)
L'origine de ces nombres est biblique. Euler, en 1750, en possédait soixante paires, mais il avait oublié la deuxième par ordre croissant (1184 et 1210). Celle-ci ne fut découverte qu'en 1866 (!) par un gamin de seize ans, B.N.I. Paganini.

Théorème 4
Si $x > 1$ et si $p = 3 \cdot 2^x - 1$, $q = 3 \cdot 2^{x-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2x-1} - 1$ sont trois premiers impairs, alors les nombres $m = 2^x pq$ et $n = 2^x r$ sont amis ou amiables.

La première démonstration en fut donnée par le mathématicien arabe Abu-l-Hassan Tabit ibn Qurra as-Sabi al-Harrani (830-901) qui, comme son nom l'indique, appartenait à la secte des Sabéens (adorateurs des étoiles) et était né à *Harran,* en Mésopotamie.
Démonstration :
Nous devons montrer que $\sigma(m) - m = n$ et que $\sigma(n) - n = m$, ce qui est équivalent à la double égalité :

$$\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$$

$$\begin{aligned}
\sigma(m) &= \frac{2^{x+1}-1}{2-1} \cdot \frac{p^2-1}{p-1} \cdot \frac{q^2-1}{q-1} \\
&= (2^{x+1}-1) \cdot (p+1) \cdot (q+1) \\
&= (2^{x+1}-1) \cdot 3 \cdot 2^x \cdot 3 \cdot 2^{x-1} \\
&= 9 \cdot 2^{2x-1} \cdot (2^{x+1}-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= \frac{2^{x+1}-1}{2-1} \cdot \frac{r^2-1}{r-1} \\
&= (2^{x+1}-1) \cdot (r+1) \\
&= (2^{x+1}-1) \cdot 9 \cdot 2^{2x-1} \\
&= 9 \cdot 2^{2x-1} \cdot (2^{x+1}-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m+n \\
&= 2^x pq + 2^x r \\
&= 2^x (pq + r) \\
&= 2^x \left[(3 \cdot 2^x - 1)(3 \cdot 2^{x-1} - 1) + 9 \cdot 2^{2x-1} - 1\right] \\
&= 2^x (9 \cdot 2^{2x-1} - 3 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{x-1} + 1 + \\
&\qquad\qquad 9 \cdot 2^{2x-1} - 1) \\
&= 2^x \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2^{2x-1} - 3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^{2x-1} \\
&= 9 \cdot 2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x-1}(2+1) \\
&= 9 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x-1} \\
&= 9 \cdot 2^{2x-1} \cdot (2^{x+1} - 1)
\end{aligned}$$

Exercice 5. Recherche quelques paires de nombres amis.

Pour en savoir plus

[1] Alan Baker, *A Concise Introduction to the Theory of Numbers*, Cambridge University Press, 1984.

[2] Albert H. Beiler, *Recreations in the Theory of Numbers—The Queen of Mathematics entertains*, Dover Publ., Inc., New York, 1966.

[3] Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, 1981.

[4] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Oxford University Press, 1979.

[5] Oystein Ore, *Number Theory and its History*, Dover Publ., Inc., New York, 1988.

Math-Jeunes n°120 S, 9–11, 2008

Quelle heure « est-elle » ?

Claude Villers

Au moment de pénétrer dans le vaste bâtiment de la gare, Mathieu jeta rapidement un regard interrogatif sur la vaste façade vitrée. C'est qu'elle était dotée d'une grande horloge au « *design* » très simplifié. Douze gros points marquaient les emplacements des heures et deux aiguilles lumineuses se chargaient de renseigner les voyageurs. Bien que grossière, la lecture de l'heure du moment pouvait se faire à la minute près.

Mathieu constata ainsi qu'il disposait encore de six minutes avant le départ de son train. Tout de suite, il se retrouva dans le hall d'attente où il jeta derechef un coup d'œil vers l'horloge visible par transparence.

« Tiens, se dit-il, si je n'y prenais pas garde, je croirais disposer maintenant de trois heures et demie d'attente. »

Quelle heure est-il à l'horloge de la gare ? Quelle est l'heure de départ du train que Mathieu veut emprunter ?

Je vous propose de réfléchir à la situation qui vient de vous être présentée et d'essayer de résoudre le problème avant de prendre connaissance de la suite du texte...

Bonne recherche !

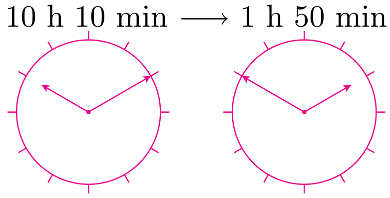
Vous avez trouvé ? Examinons ensemble une démarche possible — parmi bien d'autres... Le problème peut paraître anodin, quoique... ! Il va nous permettre d'exploiter quelques notions mathématiques peu... habituelles.

Nous supposerons que l'horloge en question a un cycle de 12 heures comme c'est le cas pour pratiquement toutes les horloges de ce type... Nous conviendrons aussi qu'on situera les moments entre 0 h 1 min et 12 h. Ainsi, contrairement à l'usage, nous parlerons, par exemple, de 0 h 27 min, plutôt que de 12 h 27 min.

Quand il se trouve à l'intérieur de la gare, Mathieu a, au travers des vitres de la façade, une vision retournée de l'horloge. En fait, c'est comme s'il observait l'image de l'horloge par une symétrie orthogonale dont l'axe est la droite comprenant les deux points caractérisant 0 h et 6 h. Dans la suite de ce texte, nous parlerons de cet axe comme étant la droite NS (N pour Nord et S pour Sud).

Voici donc une vision d'un même moment de l'horloge, vue de l'extérieur puis de l'intérieur de la gare.

10 h 10 min $\longrightarrow$ 1 h 50 min



Comme vous pouvez facilement vous en rendre compte, ces deux visions ne nous indiquent pas nécessairement les mêmes heures et minutes. Une question vient naturellement à l'esprit « Est-il possible de lire le même moment sur les deux vues de l'horloge ? » Réfléchissez...

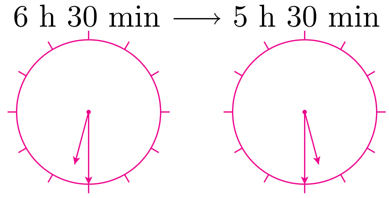
Vous venez certainement de trouver

- 11 h 60 min (ou, si vous préférez, 12 h)
- et 6 h 0 min (ou, si vous préférez, 6 h).

Nous avons ainsi deux « positions fixes » (où les aiguilles ont la même position sur l'horloge et sur son image par symétrie).

Il faut éviter les pièges du type 6 h 30 min, car l'autre vue indique... 5 h 30 min.

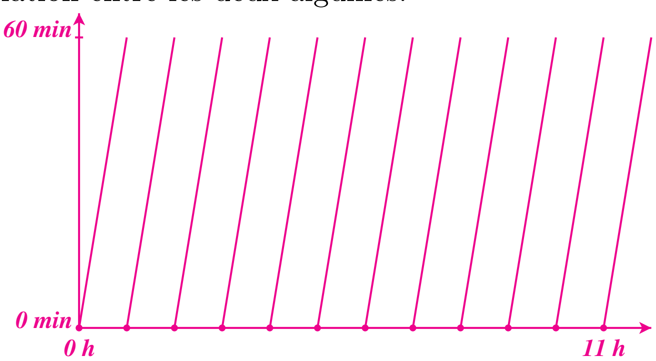
6 h 30 min $\longrightarrow$ 5 h 30 min



Il faut être conscient du fait que la grande aiguille balaie la moitié d'un tour complet, soit un angle de 180° pendant que la petite aiguille parcourt la moitié de l'angle nécessaire pour passer d'une heure à la suivante, c'est-à-dire un angle de 30° $\left(\frac{360^\circ}{12}\right)$. La petite aiguille tourne ainsi de 15° pendant que la grande aiguille fait un demi-tour (180°).
Le résultat suivant est important

Quand la grande aiguille d'une horloge effectue un tour complet (angle de 360°), la petite aiguille parcourt un douzième de tour, soit un angle de 30°.

De la même manière, 0 h 30 min à l'extérieur correspond à 11 h 30 min à l'intérieur. Faites le dessin.
Constatons, par ailleurs, qu'à chaque position de la petite aiguille correspond une et une seule position bien précise de la grande aiguille. On dit que cette position de la grande aiguille est fonction de celle de la petite. Dans les horloges et les montres mécaniques, cette liaison est d'ailleurs réalisée par le biais d'engrenages internes.
Voici une représentation graphique de cette relation entre les deux aiguilles.



Il faut noter que les extrémités supérieures des segments obliques sont à exclure de ce graphique. En pratique, on ne parle pas de... 9 h 60 min mais bien de 10 h 0 min.
La relation permettant de déterminer la position de la grande aiguille à partir de celle de la petite aiguille est appelée une fonction.
Par contre, à chaque position de la grande aiguille, correspondent douze positions possibles de la petite aiguille. Remarquons tout de même que, lorsque l'on connaît une quelconque de ces positions, alors on connaît aussi toutes les autres puisqu'elles ne diffèrent entre elles que d'un angle multiple de 30°.

Exemple : Supposons que la grande aiguille indique le point caractérisant « 20 minutes ». Elle a donc parcouru un tiers de tour complet depuis son passage au point 0. Elle ainsi balayé un angle de 120° $(\frac{360^\circ}{3})$. Pendant ce temps de 20 minutes, la petite aiguille balaie un angle de 10° $(\frac{30^\circ}{3})$ entre deux points consécutifs de la graduation en heures. Remarquons encore que ces 10° représentent le douzième des 120° balayés par la grande aiguille.
Si nous convenons que la position 0 h correspond à 0° alors la petite aiguille fait, avec la direction NS, un angle de 10° ou 40° ou 70° ou 100° ou 130° ou 160° ou 190° ou 220° ou 250° ou 280° ou 310° ou 340°.
N.B. Vous pouvez continuer mais cela ne sert à rien car vous dépassez alors le tour complet (360°) et vous retombez sur des positions déjà obtenues.
Du point de vue de la position de la grande aiguille, ces angles sont équivalents. On dit qu'ils sont *congrus modulo 30* et on écrit

$$10 \cong 40 \pmod{30}$$

De toute façon, la relation permettant de déterminer la position de la petite aiguille à partir de celle de la grande aiguille n'est pas une fonction.
Un doute peut vous effleurer
Si la vision normale de l'horloge présente une position correcte des aiguilles, peut-on en dire autant de la vision de son image par la symétrie d'axe NS ?
Il paraît assez évident que la réponse soit OUI ! En voici la raison.
Le système mécanique qui coordonne les positions des deux aiguilles peut être activé dans les deux sens de rotation, ce qui fournit automatiquement des positions correctes du couple des deux aiguilles, qu'elles soient activées dans le sens horlogique ou dans le sens anti-horlogique.
Si vous n'êtes pas convaincus par cet argument alors je vous propose de chercher (et de trouver) une « démonstration », par calcul, de cette validité. Nous attendons vos suggestions avec impatience. N'hésitez pas à nous soumettre vos démonstrations. Elles seront éventuellement publiées. Ne tardez pas. Envoyez vos propositions à la rédaction de *Math-Jeunes*.

Voyons niaintenant l'effet de la symétrie NS du cadran de l'horloge sur la lecture des moments. Occupons-nous d'abord des heures indiquées.

Vue normale	Vue symétrique
] 0 h... 1h]	[11 h... 12 h[
] 1 h... 2h]	[10 h... 11 h[
] 2 h... 3h]	[9 h... 10 h[
] 3 h... 4h]	[8 h... 9 h[
] 4 h... 5h]	[7 h... 8 h[
] 5 h... 6h]	[6 h... 7 h[
] 6 h... 7h]	[5 h... 6 h[
] 7 h... 8h]	[4 h... 5 h[
] 8 h... 9h]	[3 h... 4 h[
] 9 h... 10h]	[2 h... 3 h[
] 10 h... 11h]	[1 h... 2 h[
] 11 h... 12h]	[0 h... 1 h[

On voit que le symétrique de x h est $(11 - x)$ h. Voyons maintenant ce qui se passe pour l'indication des minutes.

$$\begin{gathered}
0 \text{ min} \leftrightarrow 0 \text{ min} \\
1 \text{ min} \leftrightarrow 59 \text{ min} \\
2 \text{ min} \leftrightarrow 58 \text{ min} \\
3 \text{ min} \leftrightarrow 57 \text{ min} \\
\vdots \\
59 \text{ min} \leftrightarrow 1 \text{ min}
\end{gathered}$$

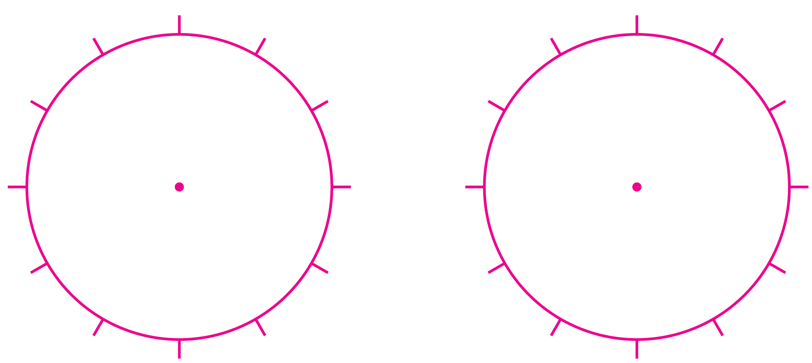
ce qui, tout simplement, nous donne la formule y min $\leftrightarrow$ $(60 - y)$ min.
Après toutes ces considérations, nous pouvons enfin tenter de répondre aux questions posées au début de l'article.
Voici la solution. En arrivant devant la gare, Mathieu lit x h + y min à l'horloge, soit $(60x + y)$ min. Tout de suite après, mais à l'intérieur, il lit, à cause de l'effet de symétrie, $(11 - x)$ h + $(60 - y)$ min, c'est-à-dire $(60(11 - x) + 60 - y)$ min. ou encore $(720 - 60x - y)$ min. Puisque la deuxième lecture lui donne plus de temps d'attente (3 h 30 min) que la première (0 h 6 min), c'est que ce deuxième moment est antérieur au premier ou, si vous préferez que x h + y min est plus « tardif » que $(11 - x)$ h + $(60 - y)$ min. La différence vaut 3 h 24 min ou 204 min.
On en déduit l'équation

$$\begin{gathered}
(60x + y) - (720 - 60x - y) = 204 \\
60x + y - 720 + 60x + y = 204 \\
120x + 2y - 924 = 0 \\
60x + y - 462 = 0
\end{gathered}$$

Cette dernière équation, parce qu'on en recherche les solutions x et y entières, est dite diophantienne, du nom du mathématicien grec Diophante d'Alexandrie qui s'intéressait à ce type de problèmes. Il vécut au début de notre ère. Les témoignages existants ne permettent pas aux historiens des mathématiques de le situer avec précision : les dates les plus probables semblent être les deuxième, troisième siècles!!!
Nous cherchons ici les solutions entières x et y telles que x est compris entre 0 et 12 et y entre 0 et 60. En écrivant l'équation sous la forme

$$y = 462 - 60x$$

on trouve l'unique solution $x = 7$ et $y = 42$.
L'horloge (en vision normale) indiquait donc 7 h 42 min. Le train de Mathieu partait à 7 h 48 min.
Vous prendrez certainement plaisir à vérifier ces réponses sur le croquis ci-dessous...



Math-Jeunes n°120 S, 12–14, 2008

Triviale poursuite

Yves Hanssens

Voilà trois mois que Louis attendait cet entretien d'embauche ! Mais, flairant l'arnaque, l'emploi-bidon, l'exploitation malsaine, il se promit de faire contre mauvaise fortune bon leurre.
Aussi se délecta-t-il à la lecture de l'énoncé de la première épreuve : « vous disposez de dix minutes pour compléter chacune des suites ci-dessous par le terme qui convient. Toute rature annule d'emblée votre réponse. Un résultat insuffisant à cette épreuve entraînerait d'office l'élimination de votre candidature au poste proposé. »

(a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

(b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

(c) 1, 2, 4, 8, 16,

(d) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,

♠ Accorde-toi un petit temps de réflexion avant de poursuivre ta lecture ♠

N'écoutant que son courage, Louis ne s'adjugea que **onze** secondes pour balancer ses solutions :

(a) 12 (b) 91 (c) 31 (d) 18

Et le résultat ne se fit pas attendre ...

Hué, conspué, viré le Louis ! Sanction du psy. : cas pas trop logique. Dossier classé sans **suite**. "Voilà qui met un **terme** à notre entretien !"

À son grand étonnement, Louis se vit alors remettre par le recruteur le message manuscrit dont j'ose à peine ici dévoiler le contenu :

"Par pure charité, afin de faire profiter la concurrence de votre brillante candidature, je vous communique les réponses que nous attendions (vous comprendrez, j'en suis sûr, le caractère confidentiel de ma démarche) :

(a) N'avez-vous jamais appris à compter jusqu'à **10** ?

(b) Dans la suite de Fibonacci dont les deux premiers termes sont 1 et 1, chaque terme suivant est la somme des deux qui le précèdent. Un abonnement à *Math-Jeunes* durant vos études n'aurait pas été un luxe et vous aurait permis de tutoyer FIBONACCI. Réponse : **89**.

(c) Les puissances de 2, ça ne vous dit rien ? $2^5 = \mathbf{32}$.

(d) Les nombres impairs ... élémentaire ! Réponse : **17**."

Louis commençait seulement à s'amuser. Rentré chez lui, il prit sa plus belle plume pour caresser les touches de son clavier.

Monsieur le recruteur,

Je vous fais une lettre que vous lirez peut-être, si vous avez le temps [1]. Vous me voyez désolé de n'avoir pas satisfait au test d'embauche, mais avouez que vous n'y êtes pas allé de main morte !

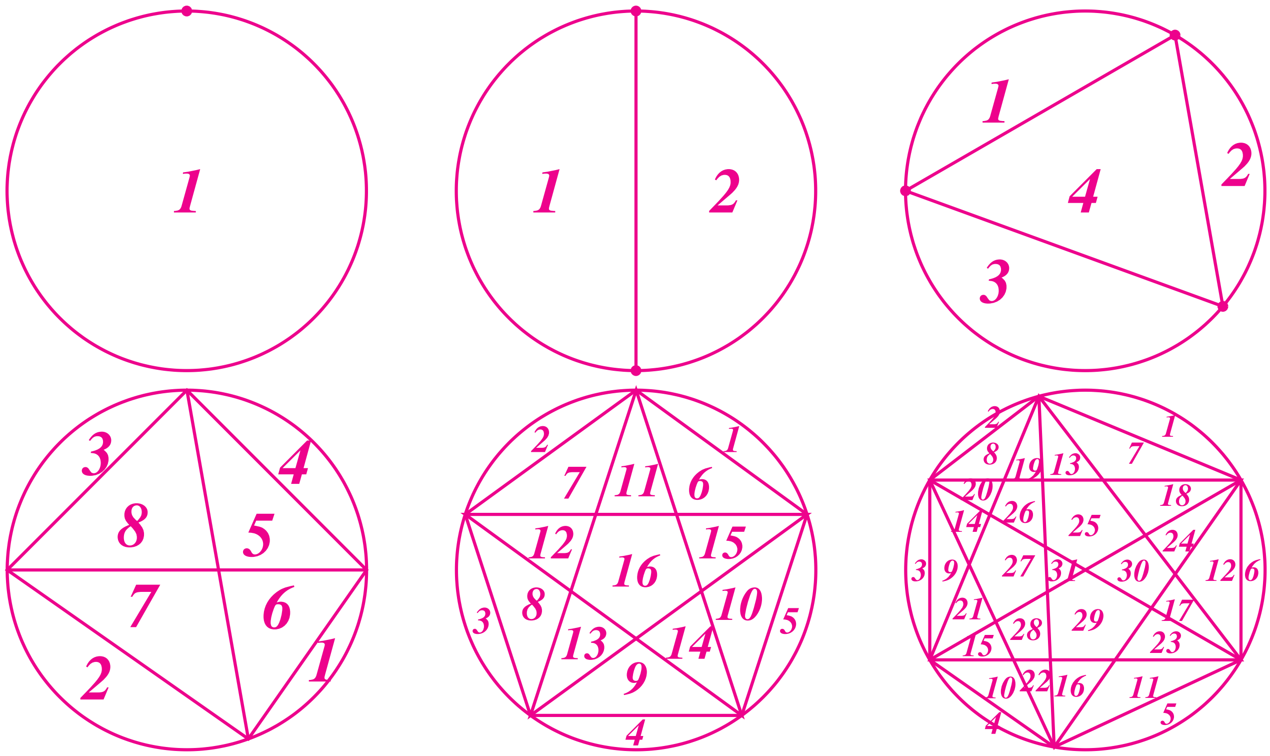
(a) Que le énième terme de la suite soit n vous semble NATUREL ? Il fallait y penser ! Je m'étais contenté de la règle suivante : LES NATURELS n POUR LESQUELS n^2+n+11 EST UN NOMBRE PREMIER. [4]

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	~~10~~	~~11~~	12	...
n^2+n+11	11	13	17	23	31	41	53	67	83	101	~~121~~	~~143~~	167	...

(b) Fibonacci ? Connais pas ! C'est comme si vous me parliez des fleurs de tournesol ou de la reproduction des lapins ! Reconnaissez qu'il était plus simple de penser : le énième terme de la suite est le plus petit entier supérieur ou égal à $(\sqrt{e})^{n-2}$ (e étant la base des logarithmes népériens, c'est-à-dire environ 2.71828). [2]

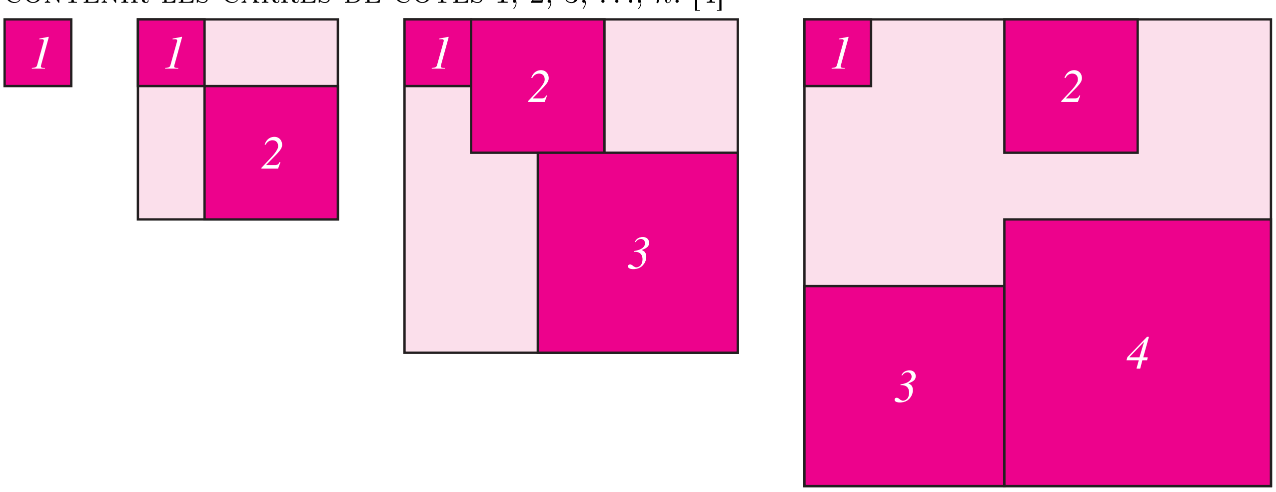
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$(\sqrt{e})^{n-2} \approx$	0.649	1	1.649	2.718	4.482	7.389	12.182	20.086	33.115	54.598	90.017	...
n^{e} terme	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	91	...

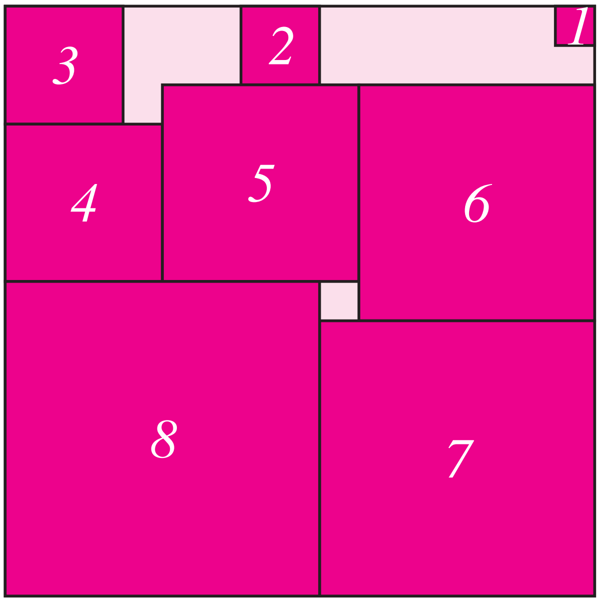
(c) Alors là, chapeau ! Les puissances de 2, quelle classe ! J'en étais resté au nombre maximum de régions que l'on détermine dans un disque en reliant n points de sa circonférence. [3]

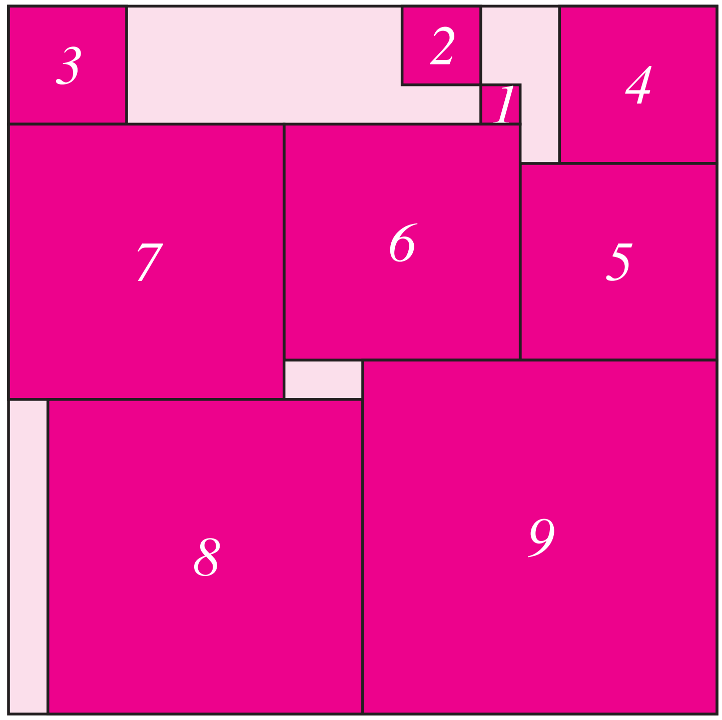


J'avais aussi pensé aux diviseurs de 992 [4] mais le fait que la suite soit alors finie me chagrinait quelque peu. Ou encore à la valeur arrondie de 1.99^{n-1} mais cela ressemblait un peu trop à ma solution de l'exercice précédent.

(d) les nombres impairs ? Là, je reconnais que c'était facile ! Je me suis quelque peu égaré en imaginant que le n^{e} terme de la suite était le côté du plus petit carré pouvant contenir les carrés de côtés 1, 2, 3, ..., n. [4]







Décidément, vous êtes trop fort pour moi ! Permettez-moi toutefois ce petit conseil pour le choix de votre futur salarié : « Qu'on prenne qui pourra ! Salutations. »

Moralités

- De la valeur relative de ce genre de tests ...
- "Il n'y a pas assez de petits nombres pour satisfaire toutes les propriétés qu'on attend d'eux." (Richard GUY, Université de Calgary). [2]
- Tu peux compléter les premiers termes d'une suite par n'importe quel nombre (ton âge, ton chiffre porte-bonheur...) : un polynôme d'interpolation te permettra toujours de justifier ton choix ! La place me manque ici pour t'en dire plus, alors, selon la formule consacrée : adresse-toi à ton prof. de math. !
- Si le cas se présentait, la prudence devrait toutefois t'inciter à répondre 10, 89, 32 et 17 pour les exemples cités.

Pour en savoir plus

[1] Boris VIAN, *Le déserteur*, 1954.

[2] Ian STEWART, *Les faux Fibonacci*, Pour la Science, n° 160, février 1991.

[3] The Fibonacci Quarterly, n° 3, p. 296, 1965.

[4] `http://www.research.att.com/~njas/sequences/indexfr.html`

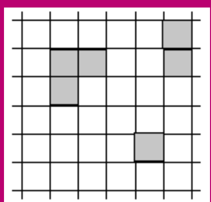
La dernière référence bibliographique est l'Encyclopédie Électronique des Suites Entières, N.J.A. Sloane : ce site Internet est une mine d'or !

Merci à Francesco De Comité qui m'a judicieusement aiguillé et à Éric Laermans pour son aide graphique.

Si tu connais d'autres suites de ce type, peut-être cet article, lui aussi, en connaîtra-t-il une !

Le jeu de la vie

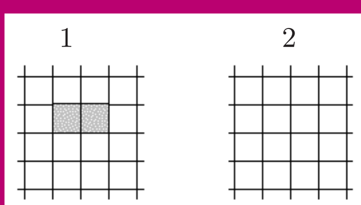
Claudine Festraets



Ce jeu, inventé par le mathématicien John Conway, est une simulation de la vie, la mort, la reproduction des cellules. Il se joue sur une grille comme celle dessinée ci-contre, où chaque case représente une cellule, celles qui sont colorées sont des cellules vivantes, les autres sont mortes.

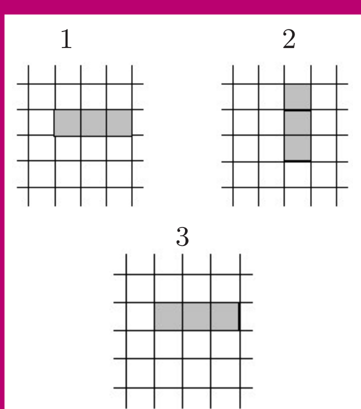
L'ensemble des cellules vivantes est appelé la population. Chaque cellule est entourée par 8 autres cellules (mortes ou vivantes), ce sont ses voisines. Deux cellules voisines se touchent donc soit par un bord, soit par un sommet. Au cours du temps, la population évolue, certaines cellules meurent, d'autres naissent. Les règles qui régissent cette évolution sont simples, les voici.

1. Si une cellule vivante a 2 ou 3 voisines vivantes, elle reste en vie à la génération suivante.
2. Si une cellule vivante a 0 ou 1 voisine vivante, à la génération suivante, elle meurt par isolement.
3. Si une cellule vivante a au moins 4 voisines vivantes, à la génération suivante, elle meurt par surpeuplement.
4. Si une cellule morte a exactement 3 voisines vivantes, à la génération suivante, une cellule vivante naît et remplace la cellule morte.



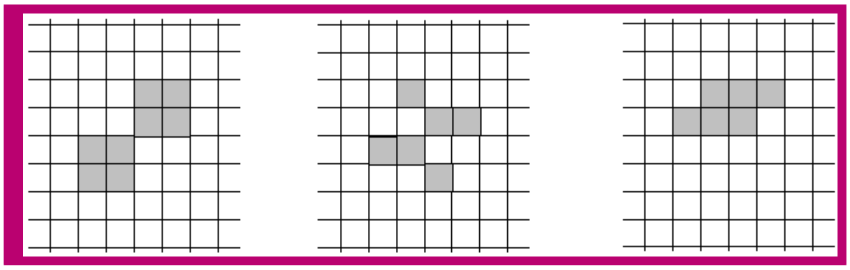
Exemple 1

À la première génération, il y a deux cellules vivantes, chacune d'elles n'a qu'une seule voisine vivante, donc elles meurent ; aucune cellule morte n'a 3 cellules voisines vivantes, il n'y a aucune naissance. À la seconde génération, toutes les cellules sont mortes.

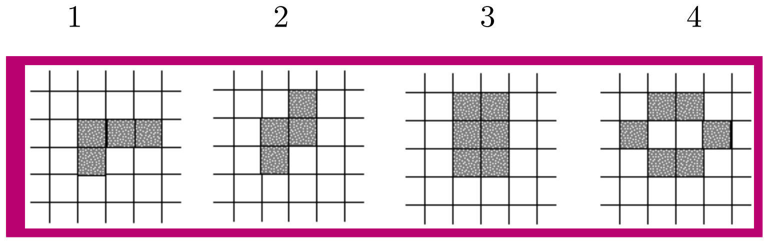


Exemple 2

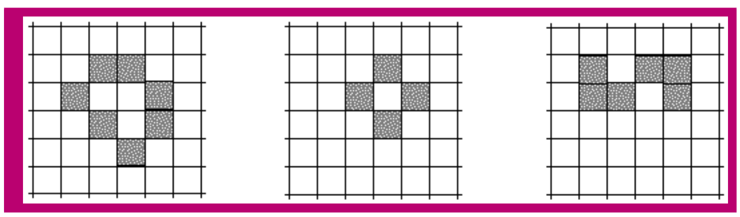
À la première génération, la cellule vivante centrale a deux voisines vivantes, à la deuxième génération, elle reste vivante. Les deux autres cellules vivantes n'ont chacune qu'une seule voisine vivante, à la deuxième génération, elles meurent. Mais il y a aussi deux cellules mortes qui ont trois cellules voisines vivantes, elles sont donc remplacées par des cellules vivantes. À la troisième génération, on retrouve le même schéma qu'à la première génération et bien évidemment, les générations impaires seront toutes semblables à la première et les générations paires seront toutes semblables à la deuxième. Ce cycle de vie est dit périodique, de période 2. En voici d'autres.



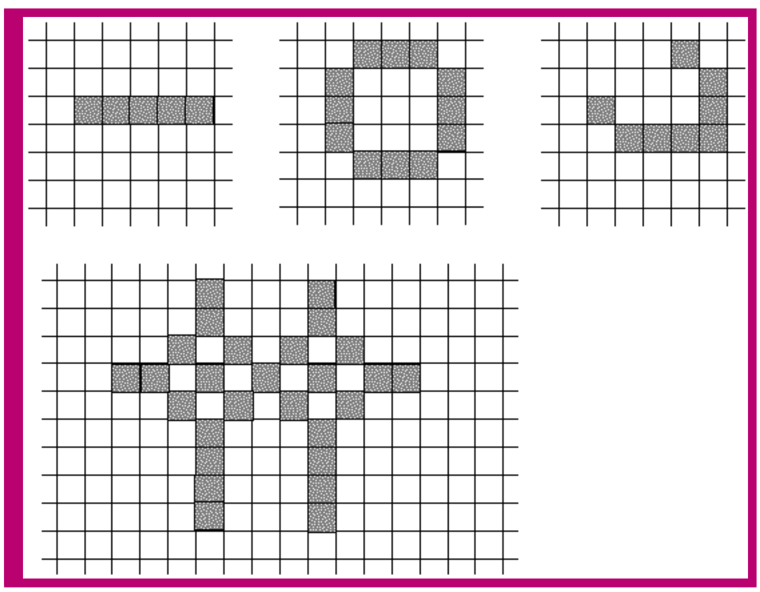
Exemple 3



À la quatrième génération, chaque cellule vivante a deux voisines vivantes et aucune cellule morte n'a exactement trois voisines vivantes. Les générations suivantes seront similaires à la 4^e, la population est stable. Voici d'autres configurations où la population est stable :



Il en existe beaucoup d'autres, pouvez-vous en trouver quelques-unes ?
Que deviennent les populations suivantes à la 5^e génération ?



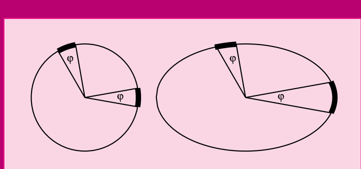
Si ce jeu vous a intéressé et si vous disposez d'internet, vous pouvez charger gratuitement un logiciel qui permet de créer ses propres configurations et de voir comment elles évoluent génération après génération. En voici l'adresse : `http://psoup.math.wisc.edu/Life32.html`.

Math-Jeunes n°120 S, 17–19, 2008

Chimborazo-Everest 1-0

Jules Miewis

La plupart des encyclopédies (et votre professeur de géographie) s'accordent pour désigner le Mont Everest comme le point le plus élevé de la terre. Avec ses 8848 m au-dessus du niveau moyen des mers, il semble ne craindre aucun concurrent ! Les quelques alpinistes qui ont vaincu ce sommet se trouvaient-ils à cet instant privilégié au point de la terre le plus éloigné du centre de la terre ?
Poser la question en ces termes, c'est je l'espère, vous mettre la puce à l'oreille ! Le point le plus élevé de la terre — par rapport au niveau moyen des mers — ne serait pas forcément le point le plus éloigné du centre de la terre ! Rien d'étrange à cela, puisque la terre n'est pas rigoureusement sphérique : elle est plus proche de l'ellipsoïde de révolution et c'est celui-ci qui sert de repère au niveau moyen des mers qui à son tour détermine les altitudes.

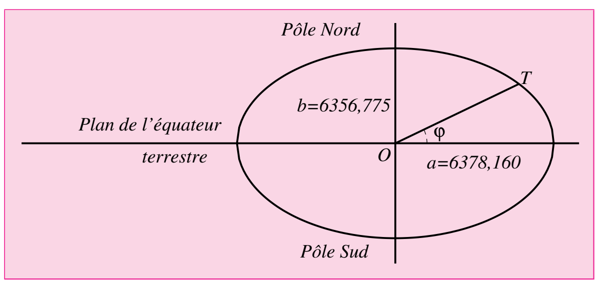


Le niveau « zéro » des altitudes se trouve plus éloigné du centre de la terre lorsque vous êtes proche de l'équateur que lorsque vous vous en éloignez : le sommet d'une montagne proche de l'équateur et d'altitude inférieure à l'imposant 8848 m pourrait donc se retrouver plus loin du centre de la terre que le sommet de l'Everest. Ce candidat existe, c'est un volcan nommé Chimborazo, point culminant à 6267 m dans les Andes équatoriennes.

Nous allons nous rafraîchir la mémoire avec quelques données géographiques, puis nous verrons que la géométrie de l'ellipse nous permet de calculer la distance qui sépare un point d'altitude et de latitude données du centre de la terre. Enfin, nous appliquerons nos résultats à l'Everest et au Chimborazo et trouverons — sans surprise — le vainqueur.

Ce que dit la géographie

Abordons d'abord quelques concepts géographiques nécessaires à notre propos :

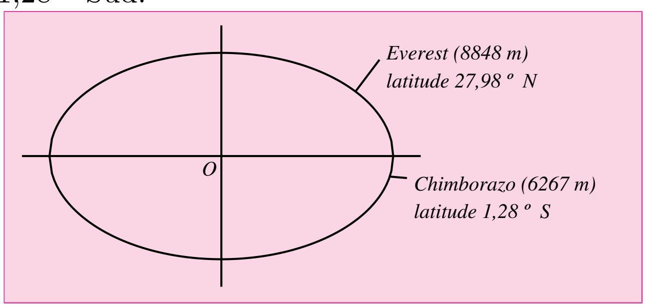


Si la terre — ellipsoïdale — est coupée par un plan comprenant les deux pôles, la section est une ellipse. Cette ellipse admet comme demi grand axe (a) le rayon terrestre équatorial, estimé à 6378,160 km et comme demi petit axe (b) le rayon terrestre aux pôles estimé lui à 6356,775 km.

Un point T d'altitude nulle à la surface terrestre est repéré dans notre section elliptique par l'angle φ de latitude. C'est un angle au centre croissant régulièrement de la latitude zéro à l'équateur jusqu'à la latitude 90° aux pôles.

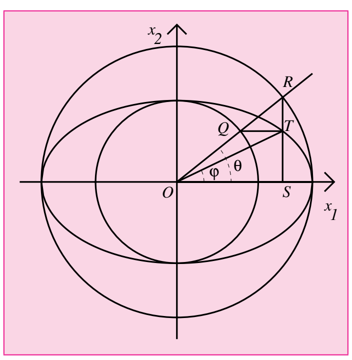
Si dans un cercle, deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux, il en va tout autrement dans une ellipse : un angle au centre d'un degré aux alentours de la latitude zéro intercepte un arc plus grand que celui intercepté par un angle au centre d'un degré sous nos latitudes.

L'idée d'une terre ellipsoïdale est en fait assez ancienne : de 1736 à 1746, trois savants français : Godin, Bouguer et La Condamine avaient mesuré au Pérou un arc équivalent à une variation d'un degré de latitude. De 1792 à 1799, deux autres savants français : Delambre et Méchain mesurèrent l'arc de Dunkerque jusqu'à Barcelone pour établir la première définition du mètre.
Les différences — significatives — observées entre ces deux mesures sont à l'origine de l'hypothèse que la terre n'est pas une sphère, mais plutôt un ellipsoïde de révolution.
L'évolution des techniques et la précision des mesures ont conduit aux actuelles valeurs des rayons (a) et (b).
Par ailleurs, la latitude du Mont Everest est 27,98 $^\circ$ Nord et celle du volcan Chimborazo est 1,28 $^\circ$ Sud.



Ce que nous dit la géométrie de l'ellipse

L'équation de l'ellipse par rapport à la latitude



Rapportées à un repère dont l'origine O est au centre de la terre, le premier axe OX_1 dans la direction d'un point quelconque de l'équateur terrestre et le second axe OX_2 en direction du pôle Nord, ses équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x_1 &= a\cos\theta \\ x_2 &= b\sin\theta \end{cases}$$

où θ **n'**est malheureusement **pas** la latitude du point mobile de coordonnée (x_1, x_2) sur l'ellipse, mais un angle au centre des deux cercles qui conduisent à la construction classique de l'ellipse.
Le paramètre θ de ces équations paramétriques est l'angle $\widehat{SOR}$, tandis que φ est l'angle $\widehat{SOT}$ de latitude du point T.
L'abscisse de T peut donc d'exprimer par :

$$x_1 = a\cos\theta \quad \text{et} \quad x_1 = |OT|\cos\varphi$$

L'ordonnée de T s'exprime quant à elle par :

$$x_2 = b\sin\theta \quad \text{et} \quad x_2 = |OT|\sin\varphi.$$

De $b\sin\theta = |OT|\sin\varphi$ et $a\cos\theta = |OT|\cos\varphi$, on tire par division :

$$\frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi.$$

Nous avons ainsi trouvé le lien entre la latitude φ et le paramètre θ des équations paramétriques de l'ellipse :

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\right) \quad (0 \leqslant \theta,\ \varphi < 90^\circ)$$

L'application des formules classiques de goniométrie $1 + \operatorname{tg}^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ et $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ à la relation

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}\ \operatorname{tg}\varphi$$

permet de trouver :

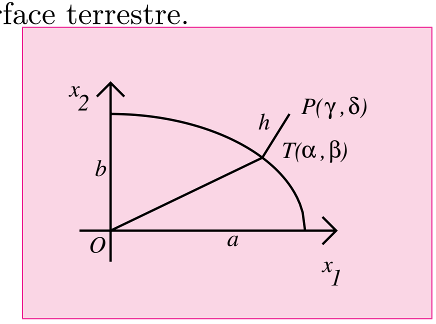
$$\sin\theta = \frac{a\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\varphi}} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

et finalement l'équation d'une ellipse rapportée à l'angle φ de latitude :

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\varphi}} \\ x_2 &= \frac{ab\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\varphi}} \end{cases}$$

Le problème de l'altitude

L'altitude d'un lieu P se conçoit mesurée perpendiculairement à un plan localement tangent à la surface terrestre.



Cela signifie pour notre ellipse que l'altitude (h) doit être portée suivant la normale au point T considéré. La distance du sommet P au centre de la terre O n'est donc pas la somme des deux distances $|OT|$ et $|TP|$.
L'équation de la normale au point $T(\alpha, \beta)$ d'une ellipse de paramètres a et b est donnée dans tous les manuels :

$$a^2\beta(x_1-\alpha) = b^2\alpha(x_2-\beta).$$

Nous devons avec ces données rechercher la coordonnée du point $P(\gamma, \delta)$ situé à une distance h de T vers l'extérieur de notre quart d'ellipse, ce qui signifie que l'abscisse et l'ordonnée de P sont plus grandes respectivement que celles de T. Cette restriction à un quart d'ellipse permet en effet de lever l'ambiguïté sur P, puisqu'il existe deux points sur la normale à une distance h de T.
Nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} (\gamma-\alpha)^2 + (\delta-\beta)^2 = h^2 \\ a^2\beta(\gamma-\alpha) = b^2\alpha(\delta-\beta) \end{cases}$$

la première équation exprimant la distance de T à P, la seconde vérifiant que le point P appartient à la normale. (α et β sont connus et valent respectivement $a\cos\theta$ et $b\sin\theta$).
La seconde équation donne :

$$\gamma-\alpha = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta}(\delta-\beta)$$

que l'on reporte dans la première :

$$(\delta-\beta)^2\left(\frac{b^4\alpha^2}{a^4\beta^2}+1\right) = h^2$$

puis

$$(\delta-\beta)^2 = \frac{h^2a^4\beta^2}{b^4\alpha^2+a^4\beta^2}$$

et en remplaçant α et β :

$$\begin{aligned}(\delta-\beta)^2 &= \frac{h^2a^4b^2\sin^2\theta}{b^4a^2\cos^2\theta+a^4b^2\sin^2\theta} \\ &= \frac{h^2a^2\sin^2\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\delta = \beta + \frac{ha\sin\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}} \quad (1)$$

$$\delta = \sin\theta\left(b+\frac{ha}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}\right). \quad (2)$$

En isolant le terme $(\delta-\beta)$ dans la seconde équation du système, on obtient en utilisant la même stratégie :

$$\gamma = \cos\theta\left(a+\frac{hb}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}\right).$$

La coordonnée de P étant à présent connue, il est facile de trouver la distance $|OP|$ (que nous proposons au carré pour alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned}d^2 = {} & \cos^2\theta\left(a+\frac{hb}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}\right)^2 \\ & +\sin^2\theta\left(b+\frac{ha}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}\right)^2.\end{aligned}$$

Cette formule calcule la distance du centre de la terre à un point d'altitude h situé à une latitude (Nord) φ :
$a = 6378,160$ km, $b = 6356,775$ km, $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\right)$

C'est le choix du signe en (1) qui motive la restriction aux latitudes nord : nous n'aurons qu'à supposer que le Chimborazo est à 1,28 ° de latitude nord ; cela ne changera rien aux résultats).

Appliquons notre formule

Les calculs ont été effectués avec une machine d'une capacité de 10 chiffres significatifs et en utilisant au maximum les mémoires pour les valeurs intermédiaires.

Everest : $h = 8,848$ km
$\varphi = 27,98^\circ$
$\theta = 28,06^\circ$

$d = 6382,282$ km.

Chimborazo : $h = 6,267$ km
$\varphi = 1,28^\circ$
$\theta = 1,28^\circ$

$d = 6398,416$ km.

D'un certain point de vue mathématique, le Chimborazo mérite donc d'être reconnu : c'est en son sommet que se situe le point terrestre le plus éloigné du centre de la terre : Chimborazo–Everest : 1-0.

Math-Jeunes n°120 S, 20–23, 2008

Le calcul matriciel, à quoi ça sert?

Philippe Tilleuil

Les matrices à remonter le temps

Le mathématicien anglais James SYLVESTER est le premier à avoir utilisé — de façon informelle — le mot « matrice » dans une publication de 1850. Il appelle ainsi un *arrangement oblong de termes* dont il extrait des déterminants.
C'est Arthur CAYLEY qui montre ensuite l'intérêt du nouveau concept et construit le calcul matriciel en définissant notamment l'addition, la multiplication et l'inversion des matrices. Depuis lors, le calcul matriciel s'est imposé comme un outil essentiel de l'algèbre linéaire.

Une matrice est constituée de nombres disposés en un tableau rectangulaire. Une matrice comporte donc des « lignes » et des « colonnes ». Une matrice comportant m lignes et n colonnes est appelée « une matrice $m \times n$ ».

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Une matrice 3×5.

Le calcul matriciel peut se révéler utile... jusqu'en archéologie ; en voici un exemple assez simple !

Une des préoccupations essentielles d'un archéologue est de situer sur une échelle du temps le résultat de ses fouilles, et de justifier cette situation à partir d'un nombre suffisant d'arguments scientifiques. Pour fixer les idées, supposons qu'un archéologue ait fouillé cinq tombes dans un site déterminé, qu'il se soit plus particulièrement intéressé aux bijoux qu'il y découvrait, et qu'en fonction de différents caractères particuliers de ces bijoux, il soit parvenu à réaliser une classification en sept types principaux des bijoux retrouvés. Les questions que l'archéologue doit alors se poser sont : quelle est la tombe la plus ancienne, quelle est la plus récente, comment les autres tombes se situent-elles chronologiquement par rapport à ces deux-là, etc ? Ce qui nous intéresse ici, c'est la manière dont la seule présence de tel ou tel type de bijou dans telle ou telle tombe permet de proposer un classement chronologique de ces tombes.

L'hypothèse de travail de l'archéologue est la suivante : deux tombes peuvent être considérées comme chronologiquement proches si elles contiennent toutes deux un nombre suffisant de types de bijoux communs. Plus précisément, une tombe T_1 est plus proche chronologiquement de la tombe T_2 que de la tombe T_3 s'il y a un plus grand nombre de types de bijoux communs à T_1 et T_2 qu'à T_1 et T_3. Cette hypothèse se base sur l'idée que, dans une culture primitive, le type d'un bijou n'évolue que lentement dans le temps. C'est cette hypothèse de travail qui donne lieu à une méthode de classification chronologique des tombes à l'aide du calcul matriciel. Comment ?

Notons $T_1, T_2, \dots T_5$: les différentes tombes situées sur le site et $B_1, B_2, \dots B_7$: les différents types de bijoux trouvés sur ce même site. Notons alors $\mathscr{A}$ la matrice 5×7 définie par la condition suivante :

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si la tombe } T_i \text{ contient au moins un bijou de type } B_k \\ 0 \text{ si la tombe } T_i \text{ ne contient pas de bijou de type } B_k. \end{cases}$$

a_{ik} est le nombre situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la k^{e} colonne.

Nous pouvons imaginer que les fouilles aient permis de déterminer la matrice $\mathscr{A}$ sous la forme ci-contre. Cette matrice, qui ne comporte donc que des 0 et des 1, résume toute l'information disponible. Elle nous permet de déterminer combien de types de bijoux sont communs à deux tombes données, par exemple les tombes B_1 et B_2 :

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 \text{ comporte un bijou de type } B_1 \Leftrightarrow a_{11} = 1$$
$$T_2 \text{ comporte un bijou de type } B_1 \Leftrightarrow a_{21} = 1$$

Donc

$$T_1 \text{ et } T_2 \text{ comportent toutes deux un bijou de type } B_1 \Leftrightarrow a_{11}.a_{21} = 1$$

Dans notre cas, $a_{11} = 1$ et $a_{21} = 0$ donc $a_{11}a_{21} = 0$.

Notons n_{12} le nombre de types de bijoux communs à T_1 et T_2. En considérant successivement les sept types de bijoux, nous constatons que n_{12} est donné tout simplement par la formule

$$a_{11}a_{21} + \cdots + a_{17}a_{27}$$

On reconnaît là le produit (matriciel) de la ligne

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \end{pmatrix}$$

par la colonne

$$\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{25} \\ a_{26} \\ a_{27} \end{pmatrix}$$

Mais, direz-vous, cette colonne ne figure pas dans la matrice $\mathscr{A}$!

Effectivement, elle n'y figure pas. Par contre, ces nombres $a_{21}, \ldots, a_{27}$ constituent une ligne de $\mathscr{A}$. Nous allons donc construire une nouvelle matrice, que nous appellerons la *transposée* de $\mathscr{A}$, que nous noterons $\mathscr{A}^t$ et dont les colonnes seront les lignes de $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La formule $n_{12} = a_{11}a_{21} + \cdots + a_{17}a_{27}$ établie plus haut se généralise en

$$n_{ij} = a_{i1}a_{j1} + \cdots + a_{i7}a_{j7}$$

Tout ce qui vient d'être établi peut se résumer dans l'énoncé suivant :

Le produit matriciel

On ne définit le produit d'une matrice $m \times n$ par une matrice $p \times q$ que si $n = p$: le nombre de colonnes du premier facteur doit valoir le nombre de lignes du second.

Considérons, par exemple, une matrice 3×4,

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et une matrice 4×2,

$$\mathscr{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Le produit de ces deux matrices est une matrice 3×2, notée ici $\mathscr{C}$, dont l'élément c_{ij} situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est donné par la formule

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{i4}b_{4j}$$

c_{ij} est donc le produit (matriciel) de la i^{e} ligne de la matrice $\mathscr{A}$ par la j^{e} colonne de la matrice $\mathscr{B}$.

Nous pouvons écrire

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 57$$

$c_{21} = \ldots$

$\ldots$

Effectuant tous les calculs, on obtient la matrice 3×2

$$\mathscr{C} = \begin{pmatrix} 57 & 67 \\ 85 & 105 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$$

Théorème archéologico-matriciel
Si $\mathscr{N}$ est la matrice carrée d'ordre 5 dont les termes sont définis par la condition
« n_{ij} est le nombre de types de bijoux présents à la fois dans les tombes T_i et T_j »
alors

$$\mathscr{N} = \mathscr{A} \cdot \mathscr{A}^t,$$

où $\mathscr{A}^t$ est la matrice transposée de la matrice $\mathscr{A}$.

Remarquons que n_{11} est le nombre de types de bijoux présents dans la tombe n°1, n_{22} est le nombre de types de bijoux présents dans la tombe n°2, etc.
Remarquons aussi que la matrice $\mathscr{N}$ est *symétrique*, c'est-à-dire que, quels que soient les indices i et j, on a $n_{ij} = n_{ji}$. C'est évident, tant d'après la définition des nombres n_{ij} figurant dans l'énoncé du théorème, que d'après la formule qui permet de les calculer.

Nous pouvons alors attaquer nos questions de chronologie. On calcule

$$\mathscr{A} \cdot \mathscr{A}^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \mathscr{N}$$

L'hypothèse de travail de l'archéologue – qui, pour mémoire, consiste à supposer que deux tombes sont chronologiquement proches si elles contiennent un nombre suffisant de types de bijoux communs – peut maintenant être exploitée au départ de la matrice $\mathscr{N}$.

Concentrons-nous par exemple d'abord sur la tombe T_5. Elle contient 6 types de bijoux, puisque $n_{55} = 6$. La tombe T_3 est, parmi toutes les autres tombes, celle qui contient le plus grand nombre de types de bijoux en commun avec la tombe T_5. En effet, $n_{53} = 4$ est le plus grand des nombres n_{51}, n_{52}, n_{53}, n_{54}. Nous en déduisons que, parmi toutes les tombes, la tombe T_3 est celle qui est chronologiquement la plus proche de la tombe T_5. Pareillement, la tombe T_2 doit être considérée comme chronologiquement plus proche de la tombe T_3 que de la tombe T_5, puisque

T_3 est la plus proche de T_5

T_2 est plus proche de T_3 que de T_5

$$n_{23} = 3 > 2 = n_{25}.$$

De même, la tombe T_1 doit être considérée comme chronologiquement plus proche de la tombe T_5 que de la tombe T_3, puisque $n_{15} = 3 > 2 = n_{13}$, et elle est plus éloignée encore de la tombe T_2, puisque $n_{12} = 1$. Ainsi, la comparaison des cœfficients de la matrice symétrique $\mathscr{N}$ permet déjà de suggérer que les tombes T_1, T_2, T_3 et T_5 devraient être classées dans l'un des deux ordres chronologiques :

T_1 est plus proche de T_5 que de T_3

T_1 est plus éloignée de T_2 que de T_5 et de T_3

$$T_2 \to T_3 \to T_5 \to T_1 \qquad \text{ou} \qquad T_1 \to T_5 \to T_3 \to T_2.$$

Pour décider lequel de ces deux ordres est le bon, l'archéologue va abandonner un instant les mathématiques et, sur base de caractéristiques propres à chaque bijou trouvé dans les tombes T_1 et T_2, il va essayer de déterminer laquelle est la plus ancienne ; comme ces deux tombes sont les plus éloignées l'une de l'autre sur l'échelle du temps, c'est relativement facile.

Afin de voir aussi quelles sont les limites de la méthode matricielle, supposons un instant qu'il ait accumulé suffisamment d'arguments pour en conclure que la tombe T_2 est effectivement la plus ancienne, et que l'ordre chronologique à retenir soit donc $T_2 \to T_3 \to T_5 \to T_1$. Mais comment situer alors la tombe T_4 ?

En se fondant toujours sur la même hypothèse de travail, la tombe T_4 doit être (très) éloignée chronologiquement de la tombe T_1, puisque $n_{14} = 0$, et elle doit l'être un peu moins de la tombe T_2, puisque $n_{24} = 1$. Et comme $n_{43} = n_{45} = 2$, elle devrait être assez proche des tombes T_3 et T_5. Il y a donc deux possibilités :

$$T_4 \to T_2 \to T_3 \to T_5 \to T_1 \quad \text{ou} \quad T_2 \to T_4 \to T_3 \to T_5 \to T_1.$$

Or, la première possibilité impliquerait que la tombe T_4 soit plus éloignée chronologiquement de la tombe T_3 que de la tombe T_2 et donc qu'on devrait avoir $n_{24} > n_{34}$, alors qu'en fait, on a : $n_{24} = 1$ et $n_{34} = 2$. Et la seconde possibilité impliquerait que la tombe T_1 soit plus éloignée chronologiquement de la tombe T_2 que de la tombe T_4 et donc qu'on devrait avoir $n_{12} < n_{14}$, alors qu'en fait, on a : $n_{12} = 1$ et $n_{14} = 0$. Avec l'hypothèse de travail retenue jusqu'ici, il n'y a donc pas moyen de trancher entre les deux possibilités. Heureusement, l'archéologue dispose d'autres méthodes que celles du calcul matriciel ...

Pour ce qui nous importe ici, il faut donc retenir que cette méthode matricielle fournit rapidement – sur base de la seule hypothèse de travail proposée plus haut – une conjecture (parfois partielle, comme dans l'exemple précédent) quant à la situation chronologique des différentes tombes. L'archéologue doit s'employer ensuite à dégager de l'ensemble des résultats de ses fouilles les éléments de preuve qui permettent d'étayer – ou de corriger – cette conjecture, et il dispose de suffisamment de méthodes et de techniques spécifiques pour y arriver au mieux.

Etonnant ce qu'on peut faire avec des 0 et des 1, non ?

Pour en savoir plus
A. Schuchat – *Matrix and Network Models in Archaeology.* Mathematics Magazine, vol. 57 (1984), 3–14.

Sortons un peu notre nez de la poussière des tombes. Qu'est-ce qui fait que le calcul matriciel puisse être utile en archéologie ? Le théorème démontré plus haut, et qualifié d'archéologico-matriciel, n'a évidemment pas un caractère strictement archéologique. C'est un théorème général de comptage ou de dénombrement, concernant les matrices d'incidence, c'est-à-dire les matrices $n \times m$ qui ne comportent comme termes que des 0 ou des 1. La structure d'ordre (partiel) sur les lignes qui a été définie et étudiée ensuite est un exemple de ce qui est parfois appelé un problème de sériation. Et comme l'exemple traité l'a suggéré, une matrice d'incidence quelconque n'admet une structure d'ordre sur ses lignes (en un sens analogue à celui considéré dans l'hypothèse de travail de notre archéologue) que si cette matrice d'incidence vérifie certaines conditions. Mais c'est là une autre histoire, à laquelle la référence ci-dessous constitue une excellente introduction.

Tombe de l'âge du fer
Musée de Soissons

Math-Jeunes n°120 S, 24–28, 2008

Le début des probabilités

Guy Noël

La joueuse d'osselets Statue attribuée à Polyclète, v^e siècle av. J.-C.

Le jeu des osselets

Ce jeu a porté également le nom d'*astragalisme*, ou encore de *jeu des bibelots*. Au départ, les osselets étaient de petits os provenant du carpe du mouton ou du porc. Avec le temps, on les fabriquera en matériaux divers.

Un osselet présente quatre faces : deux faces larges, l'une convexe marquée 4, l'autre concave, marquée 3 et deux faces étroites, l'une plate, marquée 1 et l'autre sinueuse, marquée 6.

Le jeu consistait à lancer quatre osselets, puis à interpréter les résultats selon un système de règles qui a varié dans le temps et dans l'espace.

Initialement, le jeu des osselets était à la fois un jeu de hasard et d'adresse.

1. Le hasard

Dès l'antiquité, avec Aristote (384–322 av. J.-C.), Épicure (341–270 av. J.-C.), Lucrèce (98–55 av. J.-C.),... l'homme s'est interrogé sur le hasard : sa nature, les conditions de l'apparition de certains phénomènes, etc.

Certaines des considérations formulées à l'époque sont étonnamment modernes. Ainsi, on trouve chez Aristote l'idée qu'un événement aléatoire dépend de petits changements dans la chaîne des événements qui l'ont précédé. Cette idée est fondamentalement celle du « chaos déterministe » qui a cours aujourd'hui.

La réflexion sur le hasard relève essentiellement de la philosophie. Avant le XVI^e siècle, on ne trouve guère de traces d'une quelconque tentative de *quantification* du hasard. Cependant des *jeux de hasard* existent déjà, des tirages au sort aussi. Une intuition des probabilités se met donc en place. Par exemple, Aristote considère qu'obtenir aux dés une suite de 10 000 résultats identiques consécutifs est impossible. On apprend ainsi à distinguer entre *phénomènes déterministes* et *phénomènes aléatoires.*

Un des jeux les plus pratiqués est le jeu des osselets. C'est l'ancêtre des jeux de dés.

2. Le problème des partis

Au fil du temps, la pratique des jeux de hasard, notamment du jeu de dés, fait surgir des questions qui ne peuvent recevoir de réponses sans un minimum de raisonnement quantitatif. Dès le début du quinzième siècle, le *problème des partis*([1]) apparaît dans un manuscrit italien anonyme, au moins dans un cas particulier. Énonçons-le dans le cas général :

> *Un jeu équitable se joue en plusieurs manches et met aux prises deux joueurs. Le gagnant est celui qui, le premier, remporte un nombre de manches convenu. Supposons que les joueurs sont obligés de s'arrêter avant que le nombre de manches requis ait été atteint par aucun d'entre eux. Si pour l'emporter, il manque a manches au premier joueur et b manches au second, comment doivent-ils partager la mise ?*

Le manuscrit italien mentionné plus haut envisage le cas particulier où $a = 1$ et $b = 3$ — et dans ce cas résout le problème correctement. Près de cent ans plus tard, Luca Pacioli (1450–1520) s'attaque au même problème et en propose une résolution que l'on pourrait qualifier d'intuitive : il suggère de répartir la mise proportionnellement au nombre de manches gagnées

([1]) Le mot « parti » provient ici du verbe « partir » dans le sens de « partager ».

par chacun des deux joueurs. Mais il est mal à l'aise, se rendant compte qu'avec sa méthode, si un joueur a gagné une manche, et l'autre 0, alors le premier remporte toute la mise, ce qui serait clairement injuste dans la plupart des cas !

Dans son ouvrage *General Trattato di numeri et misure*, Nicolo Tartaglia (1499–1557), mieux connu pour sa contribution à la découverte de la méthode de résolution des équations algébriques de degré 3, émet la même objection à la méthode de Luca Pacioli, mais ne propose rien d'autre, se contentant d'affirmer « *La résolution d'une telle question relève plus du judiciaire que du rationnel, de sorte que, quelle que soit la solution proposée, il y aura matière à litige.* »

Girolamo Cardano (1501–1576) fut — après l'anonyme italien de l'an 1400 — le premier à comprendre que la répartition de la mise entre les deux joueurs devait dépendre non du nombre de manches qu'ils ont déjà gagnées, mais bien du nombre de manches qu'il leur reste, chacun, à gagner.

À la place de la règle de Pacioli, Cardano propose de répartir la mise proportionnellement aux « progressions » des nombres de manches que chacun des joueurs doit encore gagner. Dans le langage de Cardano, la « progression » du nombre n est la somme $1 + 2 + \cdots + n$, soit $\frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi selon Cardano, si un des joueurs doit encore gagner trois manches et l'autre une, la mise devra être répartie, en faveur du second, dans le rapport de $1+2+3 = 6$ à 1. S'il n'avait pas trouvé la réponse correcte, Cardano était néanmoins sur la bonne voie.

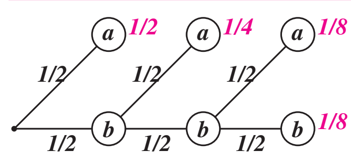
Girolamo Cardano

La solution de Fermat

Notons A et B les deux joueurs et supposons que, pour gagner, il manque une manche à A et trois manches à B.
Tout au plus trois manches auraient encore été jouées. Imaginons les résultats de ces trois manches, en notant a les manches gagnées par A et b les manches gagnées par B : les huit cas possibles sont les suivants :

aaa aab aba abb
baa bab bba bbb

De ces huit possibilités, il n'y en a qu'une qui se traduit par le gain final de B. Ainsi, au moment où les deux joueurs ont dû se séparer, le joueur B n'avait qu'une chance sur huit de remporter la mise. Sa part sera donc un huitième de celle-ci, et celle A sera de sept huitièmes.



Un siècle plus tard, le problème fut posé à Pascal par le Chevalier de Méré et fit l'objet d'un célèbre échange de correspondance entre Fermat (1601–1665) et Pascal (1623–1662), lesquels le résolurent définitivement en 1654 par deux méthodes différentes.

La solution de Fermat présentée dans l'encadré nous permet deux remarques.

1. Fermat énumère les résultats possibles pour les trois manches non jouées, alors qu'il n'aurait peut-être pas été nécessaire de les jouer toutes les trois. Il aurait pu se contenter d'écrire « *a*, *ba*, *bba*, *bbb* ». Mais il aurait alors dû attribuer des probabilités différentes à ces quatre résultats et donc abandonner la traditionnelle règle d'équiprobabilité. La théorie des probabilités n'était pas encore suffisamment établie pour que ce fût possible. Aujourd'hui, nous utilisons un arbre probabiliste pour supporter le raisonnement de Fermat.
2. En répartissant la mise proportionnellement aux probabilités de gain des joueurs A et B, Fermat et Pascal utilisent implicitement la notion d'*espérance mathématique*.

3. Girolamo Cardano

Durant une partie de son existence, Cardano (personnage pittoresque, contestable et contesté, dont le nom apparaît également à propos de la

Si j'ai un billet de tombola qui me permet de gagner un lot de 100 €, et si ma probabilité de gain est de $\frac{1}{10}$, alors AVANT LE TIRAGE, la valeur de mon billet est 100 € $\times \frac{1}{10} =$ 10 €. C'est mon espérance de gain. APRÈS LE TIRAGE, la valeur de mon billet est soit de 100 €, soit de 0 €.

Par « circuit entier », Cardano désigne l'ensemble des cas possibles.

Imaginons à nouveau deux joueurs A et B. Appelons a le nombre de cas favorables à A et b le nombre de cas qui lui sont défavorables et sont donc favorables à son adversaire B. Notons m_A et m_B les mises respectives de A et B, Cardano nous dit qu'on doit avoir

$$\frac{a}{b} = \frac{m_A}{m_B}$$

Pourquoi ? La réponse fait intervenir l'idée d'espérance de gain rencontrée plus haut. La probabilité de gain de A est $\frac{a}{a+b}$. La somme à gagner est le total des mises, $m_A + m_B$. L'espérance de gain de A est donc

$$\frac{a}{a+b}(m_A + m_B)$$

Si $\frac{a}{b} = \frac{m_A}{m_B}$, alors $am_B = bm_A$ et l'espérance de gain de A est

$$\frac{(a+b)m_A}{a+b} = m_A$$

résolution de l'équation du troisième degré) gagna sa vie en jouant et pariant dans des tavernes à des jeux dont on se demande s'ils étaient équitables et si ses partenaires disposaient des connaissances nécessaires pour se faire une opinion à ce sujet. Fort des connaissances pratiques ainsi acquises, Cardano rédigea aux environs de 1560 le premier traité consacré aux probabilités, intitulé *Liber de ludo aleae*. Il y donne ce que nous pouvons considérer comme une définition de la probabilité :

> *[. . .] Nous devons considérer le circuit entier et le nombre des lancers qui représente en combien de façons les résultats favorables peuvent se produire, et comparer ce nombre au reste du circuit. [. . .] Les paris mutuels devront être posés selon cette proportion, de sorte qu'on puisse disputer en termes égaux.*

Il faut, dit Cardano, comparer le nombre de cas favorables au reste du circuit, c'est-à-dire aux cas défavorables. À quoi sert cette comparaison ? Que veut-il dire exactement ?

L'encadré ci-contre montre que la condition de proportionnalité des mises aux probabilités est une condition *d'équitabilité* du jeu : chacun des joueurs a une espérance de gain égale à sa mise. Ainsi, après avoir mis leur argent sur la table, ni A, ni B n'ont encore rien perdu. De plus, en jouant un nombre assez grand de parties, en moyenne, ils récupèrent chacun leur mise. Cette condition d'équitabilité est ainsi associée à une forme de la loi des grands nombres.

Le problème des partis était directement lié à une question d'argent. C'est là une caractéristique du calcul des probabilités qui persistera au fil des siècles. (Voir, par exemple le calcul des primes d'assurance.)

Cardano était également conscient de ce que nous appelons actuellement les règles d'addition et de multiplication. Encore a-t-il commis, à propos de la règle d'addition, une erreur qui mérite d'être mentionnée. Le problème étudié était le suivant : *Combien de fois faut-il lancer une paire de dés pour avoir une chance sur deux qu'au moins lors d'un lancer le total des points marqués sur les deux dés soit 2.*

Le raisonnement de Cardano était essentiellement le suivant :

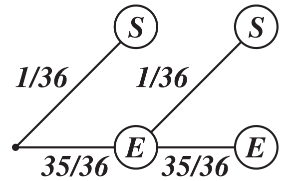
- En un lancer de deux dés, la probabilité d'avoir un total de deux est de $\frac{1}{36}$.
- En deux lancers de deux dés, j'ai deux fois plus de chances d'avoir au moins un total de deux, soit $\frac{2}{36}$.
- En poursuivant de la sorte, il arrivait à une probabilité de $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ dans le cas de 18 lancers.

Le raisonnement est faux du fait que les probabilités ne s'additionnent pas toujours. Par exemple, dans le cas de deux lancers, on ne doit tenir compte du résultat du deuxième lancer que si le total 2 n'a pas été obtenu lors du premier lancer. L'arbre probabiliste ci-contre montre que la probabilité d'avoir au moins un total 2 en deux lancers vaut

$$\frac{1}{36} + \frac{35}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{71}{1296} \simeq 0,0548$$

alors que $\frac{2}{36} \simeq 0,0556$.

En additionnant la probabilité d'avoir un total de 2 au premier lancer à celle de l'avoir au deuxième lancer, Cardano comptait deux fois le cas où les deux lancers donnent tous deux un total de 2, cas dont la probabilité est $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36}$, ce qui est précisément la différence $\frac{2}{36} - \frac{71}{1296}$.



La lettre S désigne un succès : le total des points des deux dés vaut 2. La lettre E désigne un échec : le total ne vaut pas 2.

Comment résoudre alors le problème de Cardano et trouver la valeur de n pour laquelle il y a une chance sur deux d'avoir au moins un total de 2 en n lancers ? Le plus simple est de déterminer la probabilité pour qu'aucun des n lancers ne donne un total de 2 : c'est le produit de n facteurs $\frac{35}{36} \times \cdots \times \frac{35}{36}$. La probabilité pour qu'au moins un lancer donne un total de 2 est alors $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$ et il reste à résoudre l'équation

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2}$$

Hélas, la solution de cette équation n'est pas un nombre entier ! Elle vaut 24,605. . .

Conclusion : Pour un nombre de lancers inférieur à 25, la probabilité d'avoir au moins un total de 2 est inférieure à $\frac{1}{2}$, pour un nombre de lancers au moins égal à 25, elle est supérieure à $\frac{1}{2}$.

L'ouvrage de Cardano ne fut, malheureusement, publié que 100 ans après sa rédaction, en 1663, à une époque où il était largement dépassé par les travaux de Fermat et Pascal, et par la publication du traité de Christiaan Huygens, *De ratiociniis in Ludo aleae* (1657).

Quelle est la probabilité de gain au passe-dix ? Aucun calcul n'est nécessaire : sur un dé la somme des points marqués sur deux faces opposées vaut toujours 7. Ainsi, si les faces supérieures de trois dés fournissent un total supérieur à 10, alors le total des points des faces inférieures est au plus égal à 10 (le total des six faces est 21). À toute possibilité gagnante correspond donc exactement une possibilité perdante, de sorte que la probabilité de gain vaut exactement 0,5.

4. Galilée et le jeu de passe-dix

Lancez simultanément trois dés ordinaires (bien équilibrés). Vous gagnez si et seulement si le total des points marqués par les dés est supérieur à 10. Un ami de Galilée avait remarqué qu'il gagnait plus souvent en amenant un total de 11 qu'un total de 12. Pourtant, il y a six manières d'obtenir un total de 11, comme un total de 12. Comment expliquer ce paradoxe ?

Dans son ouvrage *Considerazione sopra il Giuoco dei Dadi*, rédigé vers 1640, mais publié pour la première fois seulement en 1718, Galilée (1564–1642) explique le phénomène :

Total 11		Total 12	
$1+4+6$	6	$1+5+6$	6
$1+5+5$	3	$2+4+6$	6
$2+3+6$	6	$2+5+5$	3
$2+4+5$	6	$3+3+6$	3
$3+3+5$	3	$3+4+5$	6
$3+4+4$	3	$4+4+4$	1

en distinguant soigneusement les trois dés, par exemple en les coloriant, on constate qu'une somme telle que $1 + 4 + 6$ peut être réalisée de six façons différentes, $(1 + 4 + 6, 4 + 1 + 6, \ldots)$ alors que $3+4+4$ ne peut être réalisée que de trois façons différentes, et $4+4+4$ d'une seule façon. Si on tient compte du nombre de façons de réaliser chaque somme (voir le tableau), on trouve 27 possibilités d'obtenir 11 et 25 possibilités d'obtenir 12, ce qui montre que le paradoxe n'était qu'apparent.

Galilée venait ainsi d'attirer l'attention sur la possibilité que certaines analyses débouchent sur des modèles où les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.

Pour en savoir plus :

• J. Franklin, *The Science of Conjecture. Evidence and Probability before Pascal*, Hopkins University Press, 2001.
• I. Hacking, *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press, 1975.

Concernant les osselets :
`http ://www.crdp-toulouse.fr/cddp-32/html/formation/enligne/jeux.php`

Jeux

Yolande Noël-Roch

Des jetons bicolores

Pour jouer à « **reversitri** » « **reversicar** » ou « **reversipenta** » nous disposerons, selon le cas, de six, neuf ou onze jetons dont les deux faces sont discernables : une est claire, l'autre est foncée.

Voici par exemple une configuration pour chacun des trois jeux :

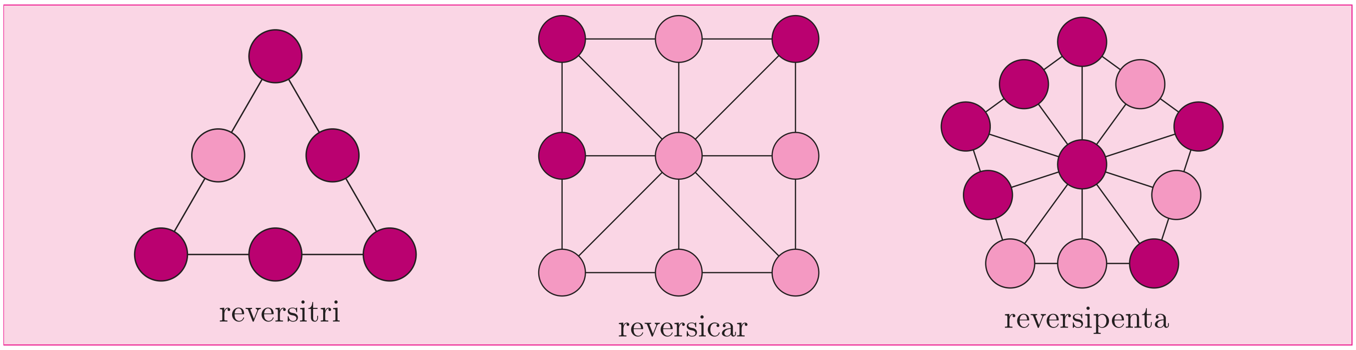


Fig.1

Les règles du jeu

Les jeux consistent à retourner des jetons **trois par trois s'ils sont alignés**

- **pour reversitri** :
  - sur un côté du triangle.
- **pour reversicar** :
  - sur un côté du carré
  - ou sur une médiane du carré
  - ou sur une diagonale du carré.
- **pour reversipenta** :
  - sur un côté du pentagone
  - ou sur une droite comprenant un sommet et le milieu du côté opposé du pentagone.

Voici par exemple quelques configurations successives possibles, créées à partir du carré ci-dessus en retournant le triplet occupant

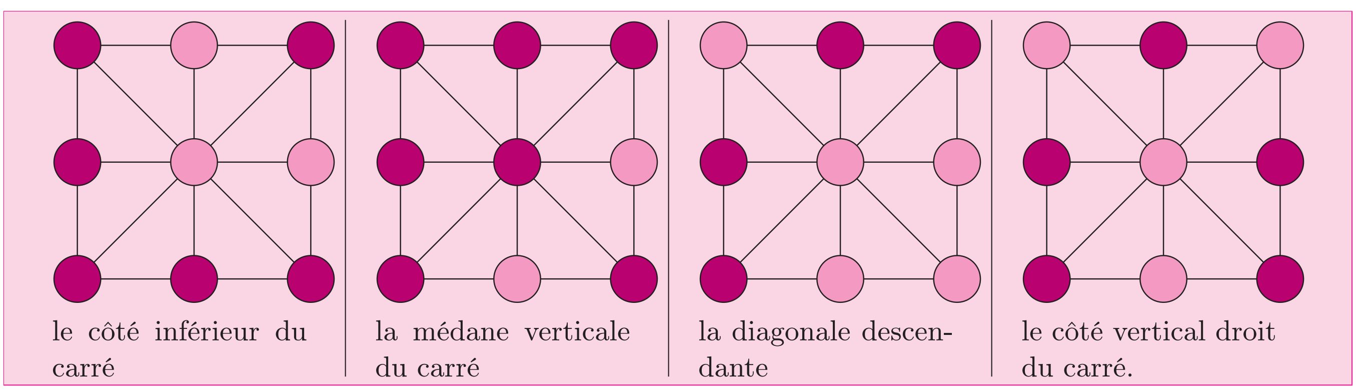


Fig.2

Pour assimiler les règles

Transformer les trois configurations données dans la figure 1 respectivement en les trois configurations suivantes :

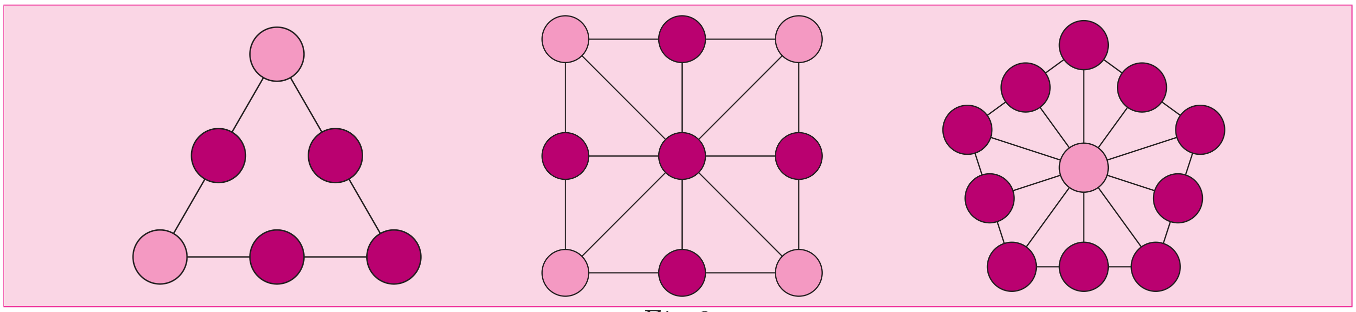


Fig.3

Un logiciel

Ces jeux peuvent être téléchargés gratuitement à l'adresse `www/conifere.be`. Ils font partie d'un logiciel appelé `Jeux2008.1`. Après avoir lancé ce logiciel et choisi d'abord *Forme/Triangle* (ou *Carré*, ou *Pentagone*) puis *Jeu/Nouveau*, vous voyez apparaître sur la gauche de l'écran une configuration engendrée aléatoirement par l'ordinateur et, sur la droite, des configurations-cibles.

- Pour **reversitri**, huit cibles sont proposées. Quelle que soit la configuration engendrée aléatoirement, une et une seule des cibles peut être atteinte en respectant les règles du jeu.
- Pour **reversicar**, quatre cibles sont proposées. Dans ce cas également, une et une seule cible peut être atteinte à partir de la configuration initiale.
- Enfin, pour **reversipenta**, toute configuration se ramène à une et une seule des deux cibles proposées.

À vous de transformer progressivement la configuration initiale en une des cibles !

Quelques informations à propos des configurations-cibles

Avant de reproduire les tableaux de cibles, voici quelques commentaires dont la compréhension n'est pas nécessaire pour pratiquer le jeu ! Nous limitons ces explications à **reversitri**.

- Pour créer une configuration initiale de **reversitri**, chacun des six jetons peut être placé face claire visible ou face foncée visible. Cela produit 64 configurations initiales possibles.
- Le joueur dispose de trois retournements désignés ci-après par c_1, c_2 et c_3. Appliquer c_i signifie « *retourner les trois jetons alignés sur le côté numéro i* ». Mais nous appliquons à volonté et successivement ces retournements ... supposons avoir tâtonné et appliqué l'enchaînement $c_2c_1c_2c_3$. Compte tenu de ce que
  – la composition des retournements est associative et commutative
  – et du fait que retourner deux fois le même triplet revient globalement à ne rien faire (la transformation identique),
  le même résultat aurait été obtenu en appliquant simplement c_1c_3. Il en résulte que, globalement, les seuls enchaînements de retournements à prendre en considération sont c_1, c_2, c_3, c_1c_2, c_1c_3, c_2c_3, $c_1c_2c_3$ et la transformation identique. Nous disposons donc de **huit transformations**.

Étant donné une configuration initiale, chacune des huit transformations possibles donne huit images différentes. Ces huit images constituent un paquet invariant pour les huit transformations : chaque transformation applique n'importe quelle configuration du paquet sur une configuration du paquet. Les 64 configurations possibles se répartissent donc en 8 paquets de 8 configurations. Pour programmer **reversitri** on a choisi une cible par paquet. Ce sont donc huit cibles qui apparaissent à l'écran.

Des démarches analogues expliquent le résumé présenté dans le tableau suivant :

Nombre de	configurations initiales possibles	retournements	transformations différentes possibles	cibles
reversitri	$2^6 = 64$	3	$2^3 = 8$	8
reversicar	$2^9 = 512$	8	$2^7 = 128$	4
reversipenta	$2^{11} = 2048$	10	$2^{10} = 1024$	2

Dans ce tableau, les **transformations** sont les composées différentes possibles des **retournements**. Quelle que soit la configuration initiale, le joueur peut atteindre une et une seule des cibles proposées.

En colonne 2, les puissances de 2 proviennent de ce que chaque face visible peut être claire ou foncée et en colonne 4, de ce que chaque retournement peut être appliqué ou non.

Mais pourquoi le nombre de transformations dans reversicar est-il 2^7 et **pas** 2^8 ?

Appelons h_i le retournement des trois jetons de la ligne numéro i du carré ($1 \leqslant i \leqslant 3$) et v_i le retournement des trois jetons de la colonne numéro i du carré (idem). Le décompte d'une des huit transformations est due au fait que $h_1h_2h_3 = v_1v_2v_3$.

Les huit cibles de reversitri

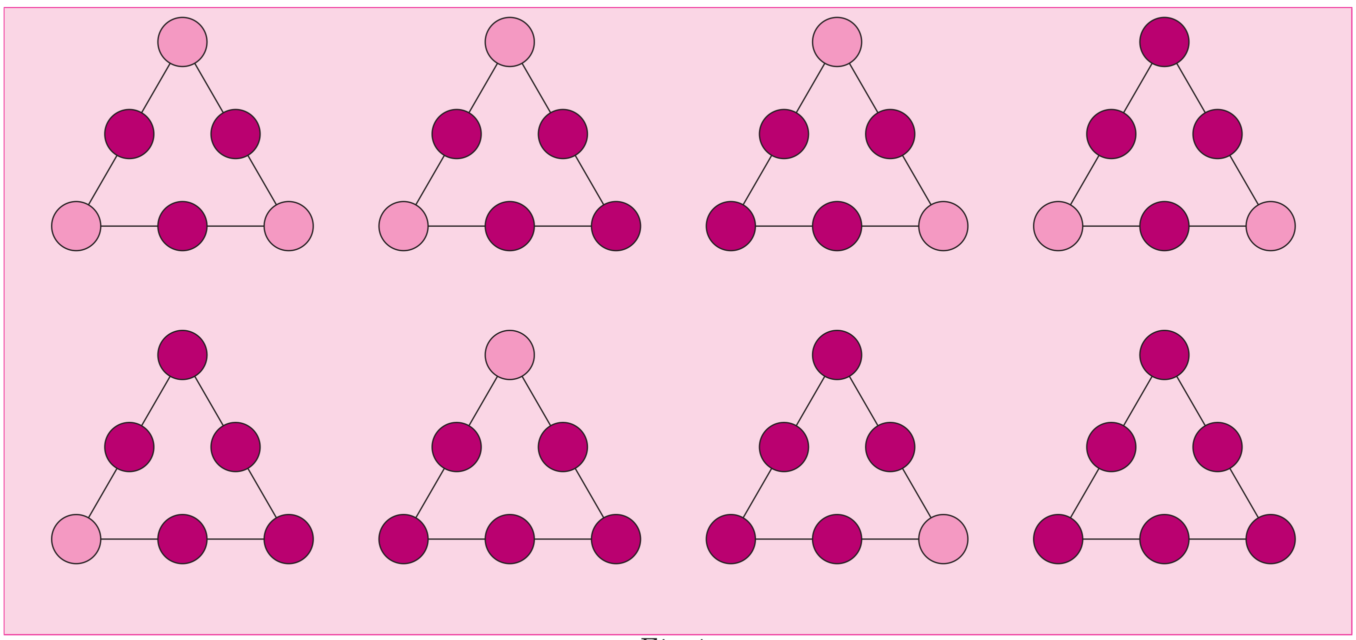


Fig.4

Les quatre cibles de reversicar

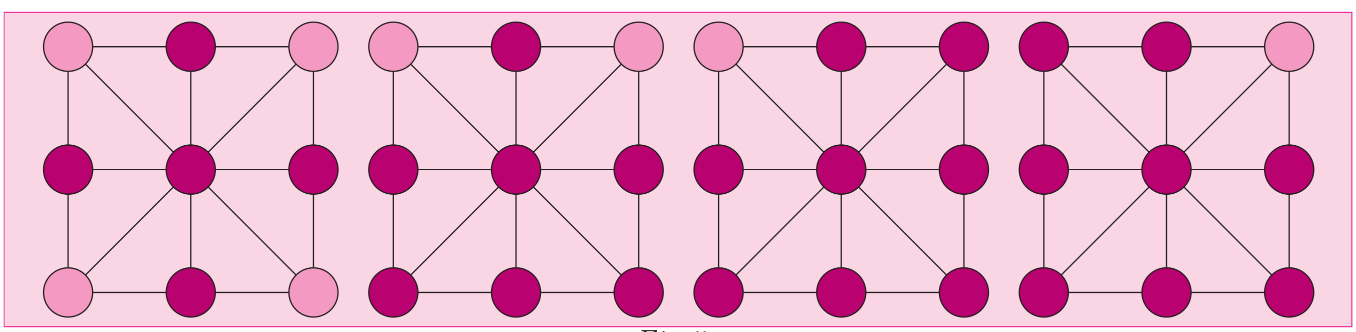


Fig.5

Les deux cibles de reversipenta

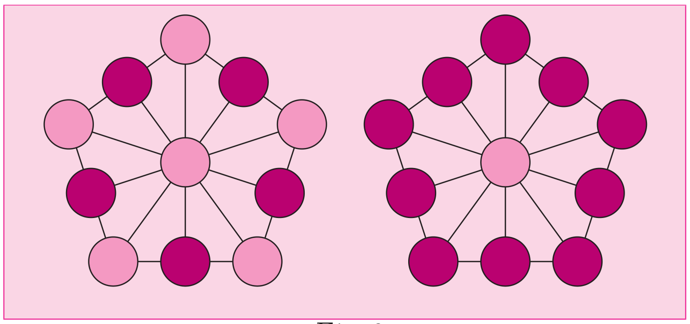


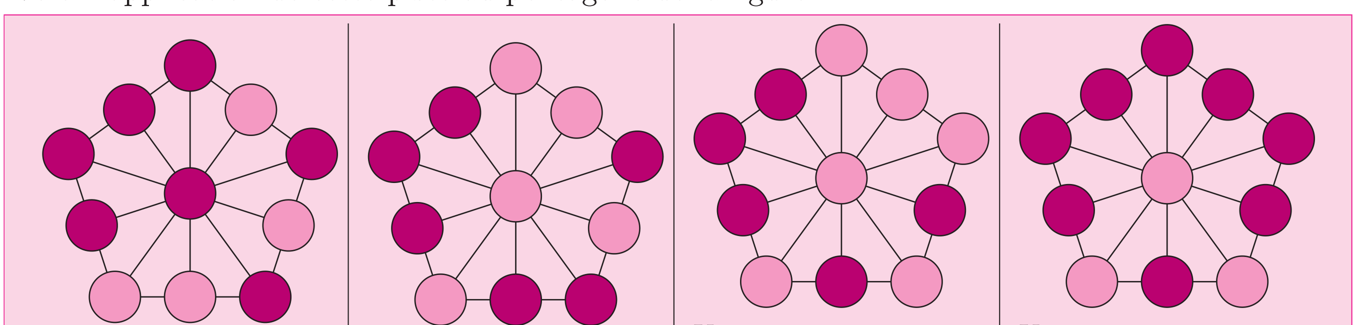
Fig.6

Vous pouvez contrôler que, dans les trois jeux, aucune cible n'est transformable en une autre cible et que toute configuration est transformable en une et une seule cible.

Quelques remarques

- **Reversitri** est le plus facile des trois jeux. Ou bien la configuration initiale est une cible ou bien un enchainement d'un très petit nombre de retournements la transforme en une des cibles. Le joueur devient rapidement capable de « deviner » la cible avant d'exécuter les retournements utiles.
- **Reversicar** donne plus de fil à retordre (détordre ?). Des sous-problèmes sont intéressants comme par exemple la possibilité de changer (par deux retournements) la couleur des quatre coins, la possibilité de changer la couleur des quatre milieux . . .
- **Reversipenta** paraît le plus coriace au premier abord. Sans vouloir détruire le plaisir de la recherche, nous donnons un début de piste possible :
  - éclaircir éventuellement le centre (il est clair dans les deux cibles)
  - sans détruire ce qui vient d'être fait, foncer les milieux des côtés.
  - Après ces étapes, la cible à atteindre peut être déterminée en observant la parité du nombre de faces claires : ce nombre vaut au moins 1 (le jeton central) et au plus 6 puisque seuls le centre et les cinq sommets sont concernés. Dans la suite, (continuons à « oublier » les milieux de côtés du pentagone) chaque retournement modifiera la couleur soit de deux sommets, soit d'un sommet et du centre. La parité du nombre de faces claires ne changera donc plus.

Voici l'application de cette piste au pentagone de la figure 1.



La configuration engendrée aléatoirement. | Un retournement a éclairci le centre. | Un retournement a éclairci un milieu de côté. | Un retournement a éclairci un milieu de côté.

Le nombre de faces visibles claires (au centre et en deux sommets) est impair. La cible à atteindre est donc la cible de droite de la figure 6. À vous le plaisir de découvrir une suite de retournements qui modifie les deux sommets (consécutifs) qui n'ont pas encore la bonne couleur, sans perdre globalement les acquis antérieurs ! C'est possible par une suite de quatre retournements. Mais vous avez le droit d'en utiliser plus !

Olympiades mathématiques

Claudine Festraets

La demi-finale de l'Olympiade est à présent terminée. Voici les solutions de quelques-uns des exercices qui t'ont été proposés. Si tu es parmi les finalistes, je te félicite, sinon exerce-toi pour l'an prochain.

Maxi 2 – Midi 1

L'opération $\star$ est une opération entre deux couleurs dont le résultat est une couleur. Sachant que

bleu $\star$ vert $=$ vert,
vert $\star$ bleu $=$ bleu,
rouge $\star$ vert $=$ bleu,
(rouge $\star$ vert) $\star$ rouge $=$ (bleu $\star$ vert) $\star$ bleu,

quel est le résultat de (bleu $\star$ rouge) $\star$ rouge ?

(A) rouge ; (B) vert ; (C) bleu ; (D) une autre couleur ; (E) impossible à déterminer.

Solution

Dans la dernière égalité, remplaçons « rouge $\star$ vert » par « bleu » et « bleu $\star$ vert » par « vert », il vient

bleu $\star$ rouge $=$ vert $\star$ bleu $=$ bleu

et (bleu $\star$ rouge) $\star$ rouge $=$ bleu $\star$ rouge $=$ bleu (réponse C).

Midi 4

Sans réponse préformulée — Combien y a-t-il de nombres naturels inférieurs à 1 000 et ayant exactement deux chiffres identiques ?

Solution

Il y a neuf nombres $(100, 200, \ldots, 900)$ comportant deux chiffres 0.

Comptons les nombres comportant exactement deux chiffres 1 : dix nombres commençant et se terminant par 1 (11,101,121,131,…,191), neuf autres nombres commençant par deux chiffres 1 (110,112,113,…,119), huit nombres se terminant par deux chiffres 1 (211,311,...,911), ce qui fait en tout 27 nombres.

On a de même 27 nombres comportant exactement deux chiffres 2, ou 3… Le nombre total cherché est égal à $27 \times 9 + 9 = 252$ (réponse 252).

Maxi 8 – Midi 10

Tous les jours, un cycliste effectue un circuit de 60 km. Le premier jour, il roule à la vitesse de 20 km/h, le deuxième jour, à la vitesse de 15 km/h et le troisième jour, à la vitesse de 12 km/h. Quelle est, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne pour les trois jours ?

(A) 16,66 (B) 16 (C) 15,66 (D) 15 (E) 14,33

Solution

Soient t, t' et t'' les temps mis par le cycliste pour effectuer 60 km le premier, le deuxième et le troisième jours.

$60 = 20t = 15t' = 12t''$, d'où le temps total mis pour effectuer les 180 km vaut $t + t' + t'' = 3 + 4 + 5 = 12$ et la vitesse moyenne est de $\frac{180}{12} = 15$ (réponse D).

Maxi 9 – Midi 11

Une fraction est strictement supérieure à $\dfrac{5}{9}$ et strictement inférieure à $\dfrac{4}{7}$. Ses deux termes sont des entiers dont la différence vaut 16. Quelle est cette fraction ?

(A) $\dfrac{13}{29}$ (B) $\dfrac{17}{33}$ (C) $\dfrac{19}{35}$ (D) $\dfrac{21}{37}$ (E) $\dfrac{29}{45}$

Solution

Soit $\frac{a}{b}$ la fraction cherchée. Elle est inférieure à 1 car comprise entre $\frac{5}{9}$ et $\frac{4}{7}$, donc $b = a + 16$.

$$\begin{aligned}\frac{5}{9} < \frac{a}{a+16} < \frac{4}{7} &\Leftrightarrow 5(a+16) < 9a \text{ et } 7a < 4(a+16)\\ &\Leftrightarrow 4a > 80 \text{ et } 3a < 64\\ &\Leftrightarrow 20 < a < 21,33\ldots\end{aligned}$$

d'où $a = 21$ et $\frac{a}{b} = \frac{21}{37}$ (réponse D).

Midi 15

$$3 + 2\sqrt{2} - \frac{3}{3+2\sqrt{2}} + \frac{2}{3-2\sqrt{2}} =$$

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $12\sqrt{2}$ (C) 0 (D) $\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ (E) $2+2\sqrt{2}$

Solution

L'expression donnée est égale à

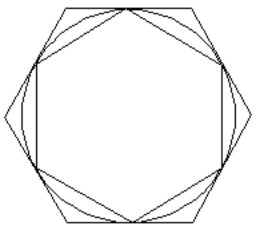
$3 + 2\sqrt{2} - \frac{3(3-2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} + \frac{2(3+2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2}$

$= 3 + 2\sqrt{2} - \frac{9-6\sqrt{2}}{9-8} + \frac{6+4\sqrt{2})}{9-8}$

$= 3 + 2\sqrt{2} - 9 + 6\sqrt{2} + 6 + 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ (réponse B).

Maxi 15 – Midi 17

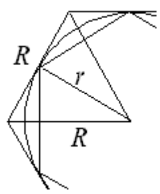
Un hexagone régulier I est inscrit dans un cercle et un hexagone régulier C est circonscrit au même cercle. L'aire de l'hexagone C vaut 420. Que vaut l'aire de l'hexagone I ?



(A) 315 (B) $200\sqrt{3}$ (C) 280 (D) $210\sqrt{3}$ (E) 210

Solution

Soient r et R les côtés respectifs de I et de C.
$r = R\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R$
On sait que les aires de deux hexagones réguliers sont entre elles comme les carrés des longueurs de leurs côtés, donc
aire $I = \frac{3}{4} \cdot$ aire $C = \frac{3\cdot 420}{4} = 315$
(réponse A).



Maxi 21 – Midi 25

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0\ ?$$

Solution

$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$= x^6(x + 1) + x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + (x + 1)$

$= (x + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + 1)$

le second facteur ne s'annule pour aucune valeur de x car il est supérieur à 1, la seule solution de l'équation donnée est donc $x = -1$ (réponse 1).

Maxi 22 – Midi 28

Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse vaut 9 et la longueur de la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit vaut 3. La somme des longueurs des côtés de l'angle droit vaut alors

(A) $3\sqrt{15} + 3\sqrt{6}$ (B) 9 (C) $3\sqrt{15}$ (D) $5\sqrt{6}$ (E) 13

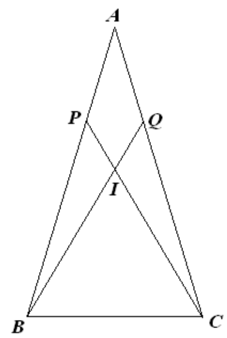
Solution

Soit a, b les longueurs des côtés de l'angle droit du triangle. L'aire du triangle vaut d'une part $\frac{1}{2}ab$, d'autre part $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9$, d'où $ab = 27$. On a aussi $a^2 + b^2 = 9^2 = 81$, donc

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 81 + 2 \cdot 27 = 135$ et $a + b = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}$ (réponse C).

Maxi 24 – Midi 29

Le triangle ABC est isocèle avec $|AB| = |AC|$. Les points P et Q se trouvent respectivement au tiers de $|AB|$ et au tiers de $|AC|$ à partir de A. Les droites CP et BQ se coupent en I. Quel est le rapport de l'aire du quadrilatère $APIQ$ à celle du triangle ABC ?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Solution

aire $APC = \frac{1}{3}$aire ABC car $|AP| = \frac{1}{3}|AB|$.
Les triangles APQ et ABC sont semblables et $|AP| = \frac{1}{3}|AB|$, on a donc aire $APQ = \frac{1}{9}$aire ABC et $|PQ| = \frac{1}{3}|BC|$.
Les triangles PQI et CBI sont semblables et comme $|PQ| = \frac{1}{3}|BC|$, on a $|PI| = \frac{1}{3}|IC|$ et donc $|PI| = \frac{1}{4}|PC|$. D'où

$$\begin{aligned}\text{aire } PQI &= \frac{1}{4}\text{aire } PQC\\ &= \frac{1}{4}(\text{aire } APC - \text{aire } APQ)\\ &= \frac{1}{4}(\frac{1}{3} - \frac{1}{9})\text{aire } ABC = \frac{1}{18}\text{aire } ABC\end{aligned}$$

et
aire $APIQ =$ aire $APQ +$ aire $PIQ = \frac{1}{6}$aire ABC (réponse D).

Maxi 27

Sans réponse préformulée — Les nombres réels a, b, c sont strictement positifs et tels que

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = ac - 3a \\ c^2 - b^2 = bc - 3b \\ b^2 - 9^2 = ab - bc \end{cases}$$

Le nombre b est entier. Que vaut-il ?

Solution

Additionnons les deux premières équations :
$a^2 - b^2 = c(a + b) - 3(a + b)$
$(a - b)(a + b) = (a + b)(c - 3)$
et comme $a + b \neq 0$, on a $a - b = c - 3$.
Remplaçons a par $b + c - 3$ dans la dernière équation : $b^2 - 9^2 = b^2 + bc - 3b - bc$, d'où $3b = 9^2$ et $b = 27$ (réponse 27).