Olympiades Mathématiques Belges

Recueil de questions

Société Belge des
Professeurs de Mathématique
d'expression française

6 2003–2006

Olympiades mathématiques belges

Recueil de questions 2003-2006

collationné par P. Dupont

Société belge des professeurs de mathématique
d'expression française

6

Table des matières

Chapitre 1

Préface

Comme ses prédécesseurs, ce sixième recueil de questions des Olympiades mathématiques belges (2003–2006), est édité dans un double but.

Le premier est de fournir aux enseignants du cours de mathématiques ainsi qu'à leurs élèves, une quantité importante de questions pouvant s'intégrer dans les cours dispensés. C'est pourquoi les 720 questions des éliminatoires et des demi-finales, bien que restant séparées selon les trois catégories miNi, miDi et maXi, ont été regroupées en fonction du type de matière (avec les inévitables difficultés de ce genre de classement) et placées, autant que possible, dans un ordre de difficulté croissante.

Le deuxième est de permettre à qui le souhaite de se préparer à participer à l'Olympiade. Dans cette perspective, des tableaux permettent de reconstituer facilement les questionnaires tels qu'ils ont été proposés aux participants des quatre Olympiades concernées.

Les 48 questions posées lors des finales constituent les trois derniers chapitres du document.

Le texte qui fait suite à ce préambule est de Francis Buekenhout, le « père » de l'Olympiade mathématique belge. Il constitue, tout à la fois, un regard posé sur une aventure extraordinaire qui a débuté en 1976 et l'expression d'une grande espérance et d'une forte conviction : celle que les jeunes que sont les élèves possèdent en eux les germes de la compétence et du talent.

Je conclus ce petit mot — c'est le plus agréable — en remerciant les personnes qui m'ont aidé dans à la réalisation de ce volume : Claude Villers, cheville ouvrière des volumes précédents, qui a cette fois encore assuré le pénible travail de classement des questions ; Claudine Festraets, secrétaire nationale de l'Olympiade, qui dactylographie depuis 2004 les questionnaires et dont j'ai pu récupérer le travail ; et Jules Miewis, qui m'a aidé à reconstituer les fichiers de 2003, dont l'original avait été perdu.

Pascal Dupont

1.1 L'Olympiade mathématique belge

L'Olympiade mathématique belge ou O.M.B. est née en 1976. Elle a traversé sans interruption toutes ses éditions annuelles successives. Les dernières de celles-ci ont permis d'enregistrer plus de 28 000 inscriptions et environ 22 000 participants effectifs en Communauté française et au Grand-Duché de Luxembourg.

De quoi remplir un stade important si on les réunissait ! Ils furent au travail durant les mêmes 90 minutes au cours d'un même après-midi de janvier.

Je reconnais la paternité de cette belle organisation mais il importe de souligner que son pouvoir organisateur est la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française ou SBPMef qui compte environ 1200 membres. Il convient de souligner davantage encore que le succès de l'épreuve repose entièrement sur une foule structurée de bénévoles. Selon mon estimation prudente il s'agit d'environ 400 personnes. Des professeurs qui se chargent d'organiser et de faire passer le concours à la base c'est-à-dire dans les écoles.

Cette observation nuance modestement la célèbre et réelle démotivation des enseignants. Au sommet de cette hiérarchie ou plutôt au centre, figurent des responsables divers au nombre d'une dizaine qui réalisent l'organisation et le fonctionnement par un travail opiniâtre et quasi quotidien. Dans ces cas-là, on préfère souvent ne pas citer de noms sous prétexte des oublis mais je veux m'avancer ici en citant dans le désordre des personnes qui se sont longuement illustrées : Marianne Potvliege, Claudine Hamoir-Festraets, Jean-Paul Doignon, Pascal Dupont, Christian Van Hooste, Claude Villers, Willy Vanhamme, Lucien Kieffer, Marc De Neef, Georges Delande, Roger Bex, Alfred Warbecq, Christiane Vandeputte, Pierre Van Elsuwé, Monique Wilmet, Henri Stéphenne...

Le concours évolue en trois tours comme on dit en tennis. D'abord l'éliminatoire, puis la demi-finale et enfin la finale. La demi-finale est organisée dans 10 centres régionaux qui ont leurs équipes de responsables propres. Les responsables régionaux jouent un rôle crucial et difficile en liaison avec les écoles et avec le Secrétariat National. Quelques-uns figurent au nombre des personnes citées ci-dessus. Les demi-finales et les Centres Régionaux furent mis en place en 1982. Ces dernières années, les demi-finales ont regroupé environ 2500 participants durant les mêmes 90 minutes d'un mercredi après-midi en février.

Quels furent et quels sont les principes directeurs de l'O.M.B. ?

Le premier gouverne les autres. C'est l'importance des problèmes dans l'activité mathématique de tout niveau et de toute époque en tout lieu. Cette importance déborde du cadre mathématique. Je cite G. Polya (*Mathematical Discovery*, 1962).

> *Résoudre un problème, c'est chercher un chemin au travers d'une difficulté, un chemin pour contourner un obstacle ou qui permette d'atteindre un but qui n'est pas directement accessible. Résoudre des problèmes est le propre de l'intelligence, et l'intelligence est l'attribut propre de la nature humaine : résoudre des problèmes est l'activité la plus spécifiquement humaine.*

Une parenthèse s'impose ici. Le grand public y compris ses couches les plus cultivées continuent à répandre fièrement le stéréotype selon lequel les mathématiques sont une science achevée. Rien n'est plus faux. Des centaines de milliers de résultats nouveaux sont publiés chaque année et ce rythme de production a connu une croissance accélérée depuis la Renaissance. Ce gigantesque chaos que nul ne peut dominer, est fondé sur des problèmes. Le traitement mathématique d'informations consiste notamment en observations de ces informations par le cerveau, avec ou sans échanges entre des individus. L'observation se fait en formulant des questions et en tentant d'y répondre. La réponse peut exiger de nouvelles questions et ainsi de suite. Certaines questions peuvent devenir plus significatives par leur persistance, la simplicité de leur énoncé en vue de mémorisation et de transmission, par les liens qu'elles évoquent entre des domaines plutôt séparés, etc. Ainsi naissent des problèmes. Il a été écrit que les problèmes sont le pain quotidien du mathématicien. C'est un fait commun à toute production mathématique et à toute époque. Une question pourrait être un problème pour l'enfant de 7 ans et devenir trop facile, immédiate un an plus tard. Lire 33 dans la rue est un problème à 5 ans. Peu après, il devient banal. Peu avant, il est inaccessible. Chacun est confronté constamment à la résolution de problèmes mathématiques soit modestement dans la vie quotidienne, soit pour la détente sous forme de jeux. Nombreux sont les mathématiciens convaincus que les problèmes mathématiques peuvent et doivent jouer un rôle essentiel dans toute formation. Nous étions quelques--uns à partager cette conviction en 1976 et encore à présent. Mais pourquoi faut-il insister si c'est tellement évident ? Ce ne l'est pas pour le grand public. Malheur au professeur qui poserait trop de problèmes et surtout qui voudrait que chacun en fasse. Il irait à l'encontre du courant égalitaire dominant de plus en plus.

Un deuxième principe à la base de l'O.M.B. est la conviction que l'éducation se doit d'être ludique. Pour qu'un individu de 8 ans ou de 65 ans progresse dans un problème intéressant il est préférable de stimuler son enthousiasme. Ainsi, l'O.M.B. est un jeu !

Un troisième principe découlant pour nous du deuxième est l'intérêt de la compétition. L'expérience éducative sur le terrain montre que l'enthousiasme peut être stimulé de manière importante par l'idée de compétition. On ose à peine l'écrire à notre époque où l'idée de compétition est devenue abusivement exorbitante dans tant de domaines de nos existences et à l'opposé extirpée dans le domaine scolaire au nom de l'égalitarisme auquel j'ai déjà fait allusion. Si j'osais un sarcasme, on peut craindre qu'un jour on ne fasse plus de mathématiques dans nos classes sous prétexte que certains sont avantagés. Collègues, ce n'est pas un sarcasme ! Sous couvert de mathématique, on n'offre guère de problèmes dans nos classes. Les bénévoles qui font fonctionner l'O.M.B. et les jeunes participants doivent le saisir plus ou moins consciemment. L'O.M.B. répond à un besoin trop peu ou pas satisfait.

Un quatrième principe qui rejoint les précédents et qui les développe est de penser non pas à quelques « anormaux » aimant les maths mais à tous les enfants et adolescents, eh oui. Si la mathématique consiste dans sa quintessence en traitement d'informations par le cerveau, on peut croire que cette activité constitue un bon entraînement pour ce cerveau, on peut croire que cette activité est ainsi favorable à la résolution d'autres problèmes et on peut avoir la faiblesse de croire que cette activité est bénéfique pour tous. Quand on demande à quoi servent les maths ou qu'on doute de leur utilité il faut répondre par leur efficacité à poser des problèmes et à les résoudre. Encore convient-il que l'enseignement aborde vraiment des problèmes.

À l'O.M.B. en 1976, nous allions donc tenter d'offrir la joie du jeu-compétition à tous sans forcer personne.

Un cinquième principe à mes yeux essentiel est d'échapper au terrorisme des examens. L'O.M.B. évalue. Et de quelle manière prestigieuse pour ceux qui sortent du lot : élèves, parents, professeurs, écoles. Et de quelle manière prestigieuse pour tous ! Le cinquième principe est basé sur le réalisme. Comment faire ? S'adresser à des inscriptions individuelles ? Pas pour une compétition de masse. Trop difficile à gérer. Nous avons opté pour un contact avec les écoles de tous réseaux. Un pluralisme réussi dans le pouvoir organisateur qu'est la SBPM, dans les structures de l'O.M.B., dans son fonctionnement et surtout dans l'adhésion de la base. S'adresser à toutes les écoles ? Mais encore ? Nous ne pensions qu'aux écoles secondaires de toutes les filières ! Pas aux écoles primaires. On peut certes concevoir une version de l'O.M.B. destinée aux écoles primaires mais nous n'étions pas armé pour cette tâche et à l'heure actuelle la SBPMef et son « armée » de l'O.M.B. ne me semblent toujours pas armés pour franchir ce pas. Il le sera probablement par une autre instance. Soit. Mais comment toucher toutes les écoles secondaires ? Il fallait une liste d'adresses.

Elle était disponible dans une publication du Ministère de l'Éducation Nationale. Il faut que chaque école participant au jeu ait un professeur responsable volontaire. Il est chargé de l'inscription des concurrents, en nombre quelconque, de réceptionner les questionnaires, de faire passer le premier tour, de nous communiquer un histogramme des résultats. Telle école peut avoir 400 concurrents. Telle autre peut en avoir un seul. Il n'y a pas de classement officiel des écoles ni même de classement officieux que je sache mais des observations sont possibles. Tous les élèves de la 1^e^ à la 6^e^ étaient invités et le sont encore. Le Secrétariat National, une appellation qui s'est maintenue malgré son caractère communautaire et l'impressionnante présence luxembourgeoise, dresse un histogramme global reprenant les résultats de toutes les écoles et le communique à celles-ci. Ainsi, chacun peut se situer. Mon classement serait par exemple 152^e^ sur 760. Pas mal. Et si j'étais 639^e^ ? Ce n'est qu'un jeu et l'important vous le savez est de participer. Une autre fois, je ferai mieux. Je vois d'ici votre sourire méfiant. Et si tricherie il y a ? Réponse : si elle existe, elle ne peut guère permettre de profits. Nous n'avons pas longtemps envisagé de faire permuter entre eux les professeurs responsables, de désigner des arbitres voire des inspecteurs. L'O.M.B. se base sur la confiance. En outre, la tricherie ne pourrait obtenir aucun bénéfice si ce n'est de participer à la demi-finale. Il n'empêche que ce genre de considération agite encore de nombreuses discussions. Certains sont plus méfiants que d'autres mais la naïveté domine. Il n'est pas exclu que la confiance si souvent refusée aux professeurs et aux écoles soit un facteur de réussite de l'O.M.B.. J'aime à le croire. Les meilleurs résultats individuels en demi-finale, environ une centaine, sont convoqués à une finale. On m'a souvent demandé si je suis élitiste et parfois on ne me l'a pas envoyé dire. J'ai fini par comprendre que c'est mal vu. J'ignore encore ce qu'est le contraire d'élitiste. On veut parfois me persuader que c'est « démocratique » mais la démarche est à vrai dire démagogique. Nous voulions nous adresser à tous et pensions à eux avant tout mais nous voulions souligner les meilleurs. N'est-ce pas la véritable démocratie ? Les meilleurs en finale sont classés. Il y a une proclamation et un palmarès.

Le sixième principe consistait à cerner la forme du questionnaire. Un correcteur allait-il passer trois mois à évaluer les copies de 760 participants ? La solution ? Un questionnaire à choix multiples. Il demeure très discuté parmi nous. Sa correction est ultra rapide. Le participant introduit ses réponses sur une seule feuille et celle-ci est corrigée à l'aide d'une grille. Ultra rapide. Proche de l'informatisation à laquelle nous avons toujours rêvé. C'est la pertinence des choix multiples qui est souvent contestée. On peut répondre au hasard et horreur, obtenir la bonne réponse ! Notre dissuasion ? Il y a toujours 5 réponses proposées. Ni trois, ni sept ! Un bon équilibre. Autre dissuasion ? « Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse ». Ce système nous plaît depuis longtemps. Vous direz : il n'empêche que le concurrent peut procéder par éliminations successives et déterminer ainsi la bonne réponse sans maîtriser entièrement la question. Dissuasion : introduire dans la 5^{e} réponse une possibilité d'ouverture du style « aucune des 4 réponses précédentes ». Bref, je n'ai pas l'intention de vous convaincre sinon du fait que les choix multiples font l'objet dans les discussions pédagogiques de certains arguments inexacts. Force est de reconnaître cependant que les « têtes » de l'O.M.B. n'aiment pas uniformément les choix multiples. Nous avons « inventé » aussi les questions dont la réponse est nécessairement un nombre entier compris entre 0 et 999. C'est un choix multiple déguisé : on offre le choix parmi 1000 réponses ! Ce n'est pas tout ! Il convient que chaque question soit suffisamment brève, qu'elle puisse être résolue en quelques minutes, du moins en principe, qu'elle soit dépourvue de toute ambiguïté, inattaquable dans sa forme, dans sa réponse et qu'elle soit si possible originale... Très très difficile et très très long à élaborer. La substance même du concours. Une des tâches les plus délicates, conduite par le jury constitué d'une vingtaine de personnes. Un jury qui est lui-même chapeauté par un président et un secrétaire dont le travail est immensément difficile. La demi-finale fonctionne selon le même schéma. Chaque année exige ainsi la production de six questionnaires de 30 questions chacun. Pour certains, la tentation de réduire le nombre de questions est très grande. Le plus simple serait qu'il n'y ait pas de questions. Et en finale ? Nous donnons quatre problèmes à traiter en quatre heures. Il est demandé d'en rédiger une solution complète avec la démonstration obéissant aux impératifs de logique et de rigueur largement communs aux mathématiciens de notre temps. Très exigeant pour les concurrents soumis à des standards qu'ils ignorent le plus souvent. Parmi les plus forts, la densité de surdoués est élevée au fil des années. Une belle récompense pour tous ! Les surdoués ne sont pas le centre de nos préoccupations mais ils nous font grand plaisir. Ils montrent que notre travail a un sens. Il convient de se rappeler que la science mathématique millénaire s'est élaborée et s'élabore plus que jamais par des surdoués. Bien entendu, on voudrait savoir aussi ce qu'est le sens de l'O.M.B. pour la masse. La seule réponse que nous possédons est la fidélité des élèves, des professeurs et des écoles au fil des années et un engouement reconnu.

Le septième principe est constitué par les trois niveaux de l'épreuve qualifiés de miNi, miDi et maXi et destinés respectivement aux élèves de 1^{e}–2^{e}, de 3^{e}–4^{e} et de 5^{e}–6^{e}. En 1976, l'idée était de traiter tous les élèves pareillement. Une grande audace rompant avec le célèbre « saucissonnage » horizontal de notre éducation. Une audace qui nous paraissait nécessaire : certains problèmes mathématiques requièrent peu de connaissances. L'imagination est essentielle. Il n'empêche que c'était trop. Les connaissances acquises et l'expérience dans une science cumulative comme les mathématiques jouent un très grand rôle. Dès 1977, nous avons instauré la division en mini-maxi récoltant 893 et 1130 participants. La confrontation verticale nous a valu de nombreuses satisfactions. Il n'empêche que les discussions sur l'injustice du système ont survécu. En 1996, nous passions au détriplement. Pas facile à gérer. Désormais, il y a trois olympiades dans l'O.M.B.. La catégorie la plus peuplée est la miNi avec 10 500 participants en 2001, ce qui représente près de la moitié du total. À mon sens, un bon signe pour les mathématiques mais déconcertant pour bien des personnes qui se figurent que le goût des maths vient après 17 ans. Si j'étais professeur dans une école ou directeur, j'aimerais me positionner par rapport à d'autres grâce à l'O.M.B.. Il est permis de croire que je ne suis pas le seul à penser dans ces termes.

Et les coûts ? L'O.M.B. est autofinancée et bénéficiaire. Chaque participant paye un droit d'inscription de 1,25 euro. Le bénévolat représente évidemment une clé marquante de l'équation financière. L'O.M.B. mériterait néanmoins le financement d'un emploi administratif à temps plein. En résumé, l'Olympiade mathématique belge est un grand succès dû en partie à l'efficacité, la rigueur, la disponibilité et l'enthousiasme de ses nombreux dirigeants. Elle a servi de modèle à bon nombre d'autres disciplines. Elle offre un stock considérable de problèmes intéressants pour les professeurs et le grand public.

Francis Buekenhout
(Université Libre de Bruxelles)

1.2 Tableau des participations successives

Année	miNi		miDi		maXi	
1976	-		-		760	
1977	893		-		1130	
1978	1012		-		1271	
1979	1204		-		1447	
1980	1390		-		1778	
1981	1482		-		1849	
1982	3021	(570)	-		3164	(693)
1983	3010	(664)	-		3292	(689)
1984	4424	(871)	-		3933	(782)
1985	5563	(926)	-		4621	(836)
1986	6339	(981)	-		5146	(871)
1987	7779	(1249)	-		6285	(1088)
1988	8149	(1125)	-		6834	(1086)
1989	9140	(1250)	-		7632	(1140)
1990	10488	(1195)	-		8236	(1154)
1991	7517	(1074)	-		5568	(973)
1992	9967	(1266)	-		6715	(984)
1993	11020	(1215)	-		7941	(1006)
1994	10498	(1314)	-		7288	(1065)
1995	11082	(1373)	-		7423	(1082)
1996	8909	(959)	7129	(919)	4937	(730)
1997	8993	(954)	6838	(972)	5038	(765)
1998	9805	(979)	6786	(842)	5376	(730)
1999	9934	(925)	6365	(719)	4995	(654)
2000	10306	(980)	6603	(770)	4811	(662)
2001	10576	(1022)	6598	(825)	4592	(650)
2002	10758	(1030)	6675	(786)	4463	(637)
2003	10912	(1022)	6604	(814)	4589	(652)
2004	12987	(1024)	8062	(765)	5697	(598)
2005	13289	(1073)	8833	(798)	5968	(669)
2006	13332	(1073)	8026	(795)	5819	(691)

(Entre parenthèses, figurent les nombres de demi-finalistes.)

1.3 L'Olympiade mathématique internationale

Qu'elles soient nationales ou internationales, les Olympiades mathématiques s'inscrivent dans l'évolution actuelle de la pédagogie des mathématiques vers un enseignement faisant une plus grande part à l'activité personnelle des élèves. Privilégiant la réflexion à la mémorisation encyclopédique, elles proposent aux élèves des questions nécessitant une bonne compréhension des concepts, ainsi que des capacités d'analyse, de synthèse et d'imagination. L'O.M.I constitue l'aboutissement logique du processus qui, pour l'élève belge, commence avec la participation à l'O.M.B. L'Olympiade mathématique internationale a été organisée pour la première fois en 1959. Pendant plusieurs années, seuls les pays du bloc soviétique y participaient. Elle s'est élargie progressivement. L'O.M.I. est organisée par un Comité désigné par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Celle-ci est la section pédagogique de l'Union Mathématique Internationale, organisme lié à l'UNESCO. La Belgique est représentée au sein de cette Union via son Comité National de Mathématiques, lequel émane de l'Académie Royale des Arts, Sciences et Lettres. Lorsqu'un pays désire organiser l'O.M.I., son gouvernement fait (plusieurs années à l'avance) acte de candidature. Le moment venu, le pays organisateur adresse des invitations officielles aux pays susceptibles de participer. En Belgique, l'invitation est reçue par le Ministère des Affaires Étrangères, qui la transmet aux deux Ministères Communautaires de l'Enseignement. Chaque pays peut présenter un maximum de 6 élèves, n'ayant pas encore entamé l'enseignement supérieur. Chaque élève est invité à résoudre 6 problèmes. La moitié, au plus, des concurrents sont récompensés par des médailles d'or, d'argent ou de bronze. La Belgique a participé pour la première fois à l'O.M.I. en 1969, sans aucune préparation. Les résultats ne furent guère brillants. À la suite de la création de l'O.M.B., une seconde tentative eut lieu en 1977. Les résultats furent meilleurs mais néanmoins décevants. La SBPMef proposa alors à la Direction Générale de l'Organisation des Études d'assurer la préparation et la sélection des concurrents belges, ce qui fut fait à partir de 1979. Quelques années plus tard, la Communauté Néerlandophone exprima le désir de participer également à l'O.M.I. Depuis, la délégation belge est composée en parts égales d'élèves francophones et néerlandophones.

En vingt-deux participations, les concurrents belges ont obtenu une médaille d'or, sept médailles d'argent et trente-trois médailles de bronze. Ces résultats placent la Belgique au milieu d'un classement dominé par les grands pays : Chine, Russie, USA, Allemagne. En moyenne, la Belgique se classe honorablement parmi les petits pays. La SBPMef agit avec l'accord et pour le compte du Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation. Elle repère des élèves brillants parmi les participants à l'Olympiade mathématique belge. Elle les invite à prendre part à des week-ends de préparation, qui se déroulent au domaine de La Marlagne à Wépion. Les séances de travail sont assurées par des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et de l'enseignement universitaire.

1.4 La SBPMef

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française est née en 1975 à la suite d'une restructuration de la « Société Belge des Professeurs de Mathématique » créée elle-même en 1953. Son but principal est de contribuer à la promotion et à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique.

La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde.

La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un moyen d'expression et un art de raisonner. Les grandes étapes de son développement ont toujours correspondu à celles de l'évolution de la pensée humaine. Ainsi, elle a joué et continue de jouer un rôle de premier plan dans le développement culturel de l'humanité. D'où l'importance de l'objectif que s'est fixé la SBPMef.

La SBPMef est une association sans but lucratif qui se veut représentative de l'ensemble des professeurs de mathématique de la partie francophone du pays. Elle rassemble des enseignants de tous les réseaux (Communauté française, Enseignement catholique, Enseignement officiel neutre subventionné, Enseignement libre subventionné indépendant) et de tous les niveaux d'enseignement (instituteurs, régents, licenciés, professeurs d'écoles supérieures, universitaires ou non universitaires). Sa réflexion porte sur toutes les facettes de l'enseignement des mathématiques. Elle a ainsi été amenée à consacrer une grande partie de son activité à des sujets tels que l'impact sur l'enseignement des moyens modernes de traitement de l'information, les idées pédagogiques nouvelles, l'évaluation, les socles de compétence...

Le contenu des programmes de cours et les questions d'organisation de l'enseignement des mathématiques retiennent également son attention.

Pour nourrir sa réflexion et diffuser un maximum d'information, la SBPMef s'est dotée de moyens qui ont fait la preuve de leur efficacité. Chaque année, elle organise un congrès de trois jours où plus de deux cents professeurs échangent leurs expériences. La revue Mathématique et Pédagogie et le bulletin d'informations SBPM-Infor, ainsi que diverses brochures constituent des supports d'information à la disposition des membres. Des commissions permanentes, auxquelles peuvent participer tous les membres, réfléchissent plus particulièrement à l'évolution de l'enseignement de la mathématique au niveau secondaire et préparent les prises de position de la Société.

La SBPMef s'adresse aussi directement aux élèves, par le canal de la revue Math-Jeunes et de l'Olympiade mathématique belge. Elle les incite ainsi à s'intéresser à l'activité de base du mathématicien, à savoir la résolution de problèmes.

La préparation des jeunes qui représentent la Communauté française de Belgique à l'Olympiade mathématique internationale est également assurée par la SBPMef.

Enfin, la SBPMef tient sa place au sein de la communauté mathématique nationale et internationale et plus particulièrement au sein des groupes qui se préoccupent de l'enseignement des mathématiques. Une convention l'associe aux activités du CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques).

Au niveau institutionnel, de nombreux contacts lient la SBPMef à diverses sociétés étrangères, avec qui elle échange des informations et des publications. Au niveau individuel, nombreux sont les membres de la SBPMef qui participent aux congrès internationaux qui ont lieu chaque année.

Enfin, la SBPMef figure parmi les membres fondateurs de la Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques créée le 12 mai 1999.

RENSEIGNEMENTS PRATIQUES :

Siège administratif :	Rue du Onze Novembre 24 B-7000 MONS
Courriel :	`sbpm@umh.ac.be`
Adresse Internet :	`http ://www.sbpm.be`

En consultant les pages de ce site, vous pourrez trouver tous les renseignements utiles concernant les activités et les publications de la SBPMef.

1.5 Conventions utilisées

Les notations chiffrées qui figurent en regard de chacune des questions permettent de déterminer s'il s'agit d'une question d'éliminatoire ou d'une question de demi-finale, la catégorie concernée et le numéro de la question dans le questionnaire original.

- `e`a : Éliminatoire de l'année a,
  `d`a : Demi-finale de l'année a ;
- `N`q : Catégorie miNi, question q,
  `D`q : Catégorie miDi, question q,
  `X`q : Catégorie maXi, question q.

Exemple :

`d05`
`N18`

signifie qu'il s'agit de la 18e question de la demi-finale 2005 de la miNi olympiade.

Chapitre 2

Éliminatoires et demi-finales miNi

2.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

N	e03	e04	e05	e06	d03	d04	d05	d06
01	53	54	56	55	1	50	94	73
02	88	49	45	189	97	17	106	151
03	19	23	118	215	58	96	113	75
04	60	4	20	164	138	25	108	79
05	21	177	141	117	78	199	188	83
06	47	231	52	143	205	37	80	212
07	92	13	89	100	63	48	8	87
08	178	90	65	101	180	6	14	91
09	46	12	119	136	9	174	74	219
10	3	29	67	211	42	81	186	228
11	181	139	184	111	33	134	84	157
12	10	133	193	72	230	142	135	95
13	201	28	236	109	2	112	59	99
14	5	24	153	126	125	121	159	162
15	220	140	51	167	18	36	98	103
16	62	7	190	22	198	38	104	107
17	166	129	227	32	30	11	64	213
18	123	146	172	185	137	202	76	110
19	16	175	132	161	128	216	229	168
20	145	233	57	122	210	71	148	114
21	196	77	144	82	40	171	93	173
22	61	223	156	183	150	130	208	235
23	152	240	44	224	70	234	69	176
24	191	217	39	102	203	105	158	116
25	26	206	155	218	195	237	115	182
26	149	27	41	66	43	209	207	239
27	194	163	154	147	165	226	68	214
28	221	232	34	131	238	15	160	120
29	197	204	86	85	222	200	225	187
30	127	170	31	169	35	179	124	192

2.2 Arithmétique & algèbre

1. d03 N1 Que vaut la moitié de 999 ?

(A) 444,5 (B) 449,5 (C) 454,5 (D) 494,5 (E) 499,5

2. d03 N13 Soit le nombre 5 798 165 213 218 913 654. Ce nombre est remplacé par la somme de ses chiffres ; le nombre obtenu est lui-même remplacé par la somme de ses chiffres et, ainsi de suite, jusqu'au moment où le nombre n'a plus qu'un seul chiffre. Quel est le dernier nombre ?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7
(E) Un autre nombre que les précédents.

3. e03 N10 $2002 \times 2003 - 2001 \times 2002 - 2 \times 2000 =$

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

4. e04 N4 $43 \times 18 + 57 \times 18 + 43 \times 82 + 57 \times 82 =$

(A) 9000 (B) 9800 (C) 10 000 (D) 10 200 (E) 11 000

5. e03 N14 $2003 - (2002 - 2001) - (2001 - 2000) - (2000 - 1999) - \cdots - (2 - 1) =$

(A) 1 (B) 2 (C) 1001 (D) 2002
(E) Un autre nombre que les précédents

6. d04 N8 Le nez de Pinocchio s'allonge lorsqu'il ment. Initialement, son nez mesurait 3 cm. Sa longueur double à chaque mensonge. Quelle sera la longueur de son nez lorsqu'il aura menti 5 fois ?

(A) 15 cm (B) 30 cm (C) 48 cm (D) 96 cm (E) 192 cm

7. e04 N16 On ouvre au hasard un dictionnaire français et on remarque que les numéros des deux pages visibles sont deux nombres dont la somme est 841. Quel est le numéro de la page de droite ?

(A) 420 (B) 421 (C) 422 (D) 841 (E) 842

8. d05 N7 Lequel des nombres proposés ci-dessous se rapproche le plus de la moyenne (arithmétique) de 1595 et 2405 ?

(A) 1895 (B) 1985 (C) 2005 (D) 2045 (E) 2105

9. d03 N9 Mon petit cousin a deux ans aujourd'hui. Parmi les cinq nombres qui suivent, quel est celui qui donne la meilleure approximation du nombre de secondes qui se sont écoulées depuis la naissance de mon petit cousin ?

(A) 1 050 000
(B) 13 400 000
(C) 31 500 000
(D) 63 000 000
(E) 125 000 000

10. e03 N12 *Sans réponse préformulée* — Si mon avoir était quadruplé, je pourrais m'acheter 36 chocolats de plus. Combien puis-je m'acheter de chocolats ?

11. d04 N17 *Sans réponse préformulée* — Dans le tableau ci-dessous, les lignes et les colonnes additionnées donnent les résultats indiqués en marge, à droite pour les lignes, en dessous pour les colonnes (par exemple, en 1^{e} ligne, $a + b + b = 35$)

a	b	b	35
a	b	c	43
b	c	c	46
40	38	46	

Que vaut c ?

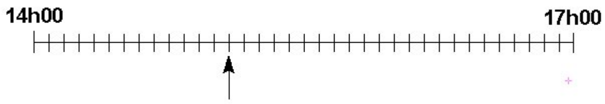
12. e04 N9 64 joueurs de tennis de table débutent un tournoi de simples (par élimination directe). Une nouvelle balle est utilisée pour chaque partie. Combien de balles auront été utilisées à la fin du tournoi ?

(A) 56 (B) 63 (C) 32 (D) 64 (E) 128

13. e04 N7 Dans une école de 273 élèves, quel est le plus grand nombre d'équipes de 5 joueurs qui peuvent être formées simultanément ?

(A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55

14. d05 N8 Sur ce segment gradué, quelle est l'heure indiquée par la flèche ?



(A) 14h55 (B) 15h05 (C) 15h10 (D) 15h15 (E) 15h20

15. d04 N28 *Sans réponse préformulée* — Lorsqu'on applique l'opération $*$ aux deux nombres entiers a et b, on soustrait leur somme de leur produit : $a * b = $ $= a \cdot b - (a + b)$. Quelle est la valeur de $(8 * 7) * (6 * 5)$?

16. e03 N19 *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme des 25 premiers nombres naturels impairs ?

17. d04 N2 Combien de nombres premiers à deux chiffres ont 3 comme chiffre des unités ?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

18. d03 N15 Si a et b sont deux nombres non nuls tels que $a + b = 2a - b$, laquelle des égalités suivantes est fausse ?

(A) $a = 2b$ (B) $b = 2a$ (C) $b = a - b$ (D) $b = \dfrac{a}{2}$ (E) $2(a - b) = a$

19. e03 N3 Un magicien me demande de choisir un nombre, d'y ajouter 4, de multiplier le résultat par 2, puis d'ajouter 7 et enfin de soustraire le nombre choisi au départ. Quel résultat final vais-je forcément communiquer au magicien ?

(A) 7 (B) 11 (C) Le nombre choisi, augmenté de 11 (D) 15
(E) Le nombre choisi, augmenté de 15

20. e05 N4 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit entier positif à la fois multiple de 39 et de 65 ?

21. e03 N5 J'ai 20 euros de plus que toi. Combien dois-je te donner d'euros pour que nos avoirs soient égaux ?

(A) 5 (B) 10 (C) 20 (D) 30 (E) 40

22. e06 N16 *Sans réponse préformulée* — J'ai 5 ans de plus que toi. Dans 4 ans, j'aurai le double de l'âge que tu auras. Quel est, en années, mon âge actuel ?

23. e04 N3 J'ai trois ans de plus que toi. Dans combien d'années aurais-je cinq ans de plus que toi ?

(A) Dans un an ;
(B) Dans deux ans ;
(C) Dans trois ans ;
(D) Dans cinq ans ;
(E) Jamais.

24. e04 N14 *Sans réponse préformulée* — Un tonnelet rempli d'huile pèse 20 kg. Le même tonnelet rempli à moitié pèse 12 kg. Que pèse, en kilogrammes, le tonnelet vide ?

25. d04 N4 *Sans réponse préformulée* — Un train de 9 wagons de 120 places chacun doit être remplacé par une flotte de bus de 58 places chacun. Combien faut-il prévoir de bus au minimum pour offrir au moins autant de places que dans le train ?

26. e03 N25 *Sans réponse préformulée* — Aude et Boris choisissent tous les deux le même nombre. Aude le multiplie par 100 et retranche ensuite 100 du résultat ; par contre, Boris lui ajoute d'abord 50, puis multiplie le résultat par 50. Pourtant, ils obtiennent finalement le même nombre. Quel était le nombre choisi par Aude et Boris ?

27. e04 N26 La somme de 2003 nombres naturels non nuls est 2004. Quel est leur produit ?

(A) 2 (B) 2003 (C) 2004 (D) 1
(E) Le produit n'est pas déterminé par ces données

28. e04 N13 Soustraire 8 au triple de la moitié d'un nombre x donne 13. Quelle est la valeur de x ?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

29. e04 N10 Un cahier et une gomme coutent ensemble 1,50 euros. La gomme coute 0,40 euros de moins que le cahier. Combien coute le cahier en euros ?

(A) 0,75 (B) 0,85 (C) 0,95 (D) 1,10 (E) 1,15

30. d03 N17 *Sans réponse préformulée* — Combien de nombres naturels inférieurs à 100 ont leur quatrième puissance qui se termine par 6 ?

31. e05 N30 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand nombre de deux chiffres qui est égal à deux fois le produit de ses chiffres ?

32. e06 N17 Quel est le plus petit nombre premier qui, ajouté à un nombre premier, donne 2006 ?

(A) 263 (B) 103 (C) 73 (D) 23 (E) 3

33. d03 N11 *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de nombres premiers compris entre 10 et 40 ?

34. e05 N28 *Sans réponse préformulée* — Le nombre 28 est divisé en deux parties telles que l'une vaut le tiers de l'autre. Que vaut la partie la plus grande ?

35. d03 N30 De combien de manières 78 peut-il se mettre sous la forme d'une somme de plusieurs naturels consécutifs non nuls, dans laquelle les termes sont rangés dans l'ordre croissant ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

36. d04 N15 *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme de tous les nombres impairs, divisibles par 5 et comportant deux chiffres ?

37. Si n prend successivement les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, ..., quelle est l'affirmation correcte parmi les suivantes ?
d04
N6

(A) Le nombre $n^2 - n$ est alternativement pair et impair.
(B) Le nombre $n^2 - n$ est toujours strictement positif.
(C) Le nombre $n^2 - n$ n'est jamais un nombre premier.
(D) Le nombre $n^2 - n$ est toujours pair.
(E) Le nombre $n^2 - n$ est toujours impair.

38. Lorsqu'on simplifie $3x - 4y - (4x - 7y)$, on obtient
d04
N16

(A) $x - 11y$ (B) $3x - y$ (C) $-x - 3y$ (D) $-x - 11y$ (E) $3y - x$

39. Un jardinier a planté 200 fleurs en cinq jours. Le premier jour, son travail a été lent ; mais chacun des jours suivants, il a planté 12 fleurs de plus que le jour précédent. Combien en a-t-il planté le premier jour ?
e05
N24

(A) 4 (B) 9 (C) 16 (D) 25 (E) 36

40. Un nombre m'étant donné, d'une part, je soustrais de 2003 le double de ce nombre ; d'autre part, je lui ajoute 1. Combien y a-t-il de nombres entiers pour lesquels les deux résultats obtenus seraient égaux ?
d03
N21

(A) Aucun (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 667

41. En remplaçant dans l'une des expressions ci-dessous n par des naturels bien choisis, on obtient aussi bien 8 que 13, 18, 23 ou 28. Quelle est cette expression ?
e05
N26

(A) $3n + 1$ (B) $4n + 1$ (C) $2n + 5$ (D) $5n + 3$ (E) $8n + 5$

42. Parmi les valeurs de x proposées ci-dessous, laquelle ne vérifie pas l'inégalité $x + 1 < 4$?
d03
N10

(A) -5 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 3

43. *Sans réponse préformulée* — Un livre a 250 pages numérotées de 1 à 250. Combien de fois le chiffre 2 a-t-il été utilisé pour numéroter ces pages ?
d03
N26

44. e05 N23

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des vaches et des poules. Le nombre total de pattes est égal à 14 plus deux fois le nombre total de têtes. Combien y a-t-il de vaches ?

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 12 (E) 14

45. e05 N2

Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand ?

(A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{36}{30}$ (D) $-\frac{2}{10}$ (E) $-\frac{3}{2}$

46. e03 N9

$\frac{8}{3} + \frac{3}{8} =$

(A) $\frac{11}{24}$ (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{67}{24}$ (E) $\frac{73}{24}$

47. e03 N6

Parmi les cinq expressions suivantes :

$$\frac{1}{5} \times 5, \qquad \frac{1}{5} : 5, \qquad \frac{1}{2} : 2, \qquad \frac{1}{2} \times 2, \qquad \frac{1}{5} : \frac{1}{5},$$

combien valent 1 ?

(A) Aucune (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Toutes

48. d04 N7

Que vaut la somme suivante ?

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \cdots + \frac{22}{12} + \frac{23}{12}$$

(A) 12 (B) 18 (C) 23 (D) 24 (E) 35

49. e04 N2

$\dfrac{5 \times 2 + 3 \times 10}{5 \times 2 + 1 \times 10} =$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

50. d04 N1

$\frac{3}{2}$ de $\frac{10}{3}$ vaut

(A) $\frac{9}{20}$ (B) $\frac{20}{9}$ (C) $\frac{29}{6}$ (D) 4 (E) 5

51. e05 N15 Que vaut $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)$?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{8}{3}$ (D) 3 (E) $\frac{9}{2}$

52. e05 N6 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{97}{98}\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}=$

(A) $\frac{97}{9900}$ (B) $\frac{1}{100}$ (C) $\frac{49}{50}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) 1

53. e03 N1 Diviser 10 par $\frac{1}{2}$ donne

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25

54. e04 N1 Le quart de la moitié du double de 32 est

(A) 4 ; (B) 8 ; (C) 16 ; (D) 32 ; (E) 64.

55. e06 N1 Un sixième de deux tiers vaut

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4 (E) 9

56. e05 N1 Le tiers de deux tiers vaut

(A) $\frac{1}{9}$; (B) $\frac{2}{9}$; (C) $\frac{2}{6}$; (D) 2 ; (E) 18.

57. e05 N20 $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) 2 (E) $\frac{7}{3}$

58. d03 N3 $2a-\frac{a}{3}=$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2a}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{5a}{3}$ (E) $5a$

59. d05 N13

$\frac{2}{5}$ divisé par le double de son inverse vaut

(A) 2 (B) $\frac{2}{25}$ (C) $\frac{4}{25}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{25}{2}$

60. e03 N4

La moitié de l'inverse de $\frac{2}{3}$ est égale à

(A) 3 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$ (E) -3

61. e03 N22

Si $ax - 6 = 15$ (avec a non nul), alors $x =$

(A) $\frac{21}{a}$ (B) $\frac{9}{a}$ (C) $6 + \frac{15}{a}$ (D) $9 - a$ (E) $21 - a$

62. e03 N16

Si $\frac{a}{4}$ est l'inverse de $\frac{b}{9}$, que vaut ab ?

(A) 36 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{36}$ (E) C'est impossible à dire.

63. d03 N7

Sans réponse préformulée — Que vaut x si $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 220$?

64. d05 N17

À partir de quel naturel non nul n la somme de l'inverse de n et de l'inverse du successeur de n est-elle plus petite que $\frac{1}{2}$?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) Jamais

65. e05 N8

$0{,}3333\ldots =$

(A) $\frac{3333}{10\,000}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{334}{1001}$ (E) $\frac{332}{999}$

66. e06 N26

Sans réponse préformulée — Que vaut $\frac{6018}{2006 \cdot 2005 - 4012 \cdot 1002}$?

67. e05 N10

$\frac{6}{12} + \frac{21}{14} \cdot \frac{2}{6} =$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) 1 (E) $\frac{3}{2}$

68. d05 N27

Parmi ces quatre propositions :

$$2 \times \frac{3}{7} = \frac{6}{14}\,;$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{2}{10}\,;$$
$$(x+8)^2 = x^2 + 64\,;$$
$$\text{Si } \frac{y}{2} + 5 = x, \text{ alors } y + 5 = 2x,$$

combien sont correctes ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

69. d05 N23

π est un nombre décimal illimité égal à 3,141 592 653... On dit en Chine que le grand Tsu Chiung Chi (430–501) utilisait la fraction $\frac{355}{113}$ comme valeur approchée de π. Par rapport à la valeur exacte de π, combien cette fraction, mise sous forme décimale, possède-t-elle de chiffres corrects situés immédiatement après la virgule ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

70. d03 N23

En moyenne, Jacques mange x barres de chocolat en y jours. À ce rythme, combien mange-t-il de barres de chocolat en une semaine ?

(A) $\frac{7x}{y}$ (B) $\frac{7y}{x}$ (C) $7xy$ (D) $\frac{7}{xy}$ (E) $\frac{x}{7y}$

71. d04 N20

$\frac{1}{2}(a+b)(x-y) + \frac{1}{2}(a-b)(x+y) =$

(A) $ax - by$ (B) ax (C) $ax + by$ (D) $ax - ay + bx - by$ (E) 0

72. e06 N12 Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5}$, que vaut $15a$?

(A) $\dfrac{b}{9}$ (B) b (C) $9b$ (D) $\dfrac{9}{25} \cdot b$ (E) $\dfrac{25}{3} \cdot b$

73. d06 N1 $2^4 - 4^2 =$

(A) -4 (B) 0 (C) 2 (D) 4 (E) Une autre réponse.

74. d05 N9 Quel est le plus petit entier positif non nul par lequel il faut multiplier $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$ pour obtenir un entier ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 12

75. d06 N3 Jean a travaillé le sixième d'une journée de 24 heures, puis les trois huitièmes de cette journée. Combien d'heures a-t-il travaillé en tout ?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 13 (E) 15

76. d05 N18 *Sans réponse préformulée* — La somme de la moitié de mon âge, du tiers de mon âge, du quart de mon âge et de mon âge est 50 ans. Mon âge actuel est un nombre entier d'années. Quel est ce nombre ?

77. e04 N21 Combien de sauts un kangourou doit-il faire au minimum pour parcourir une distance de 3000 m + 3000 dm + 3000 cm + 3000 mm, sachant qu'un saut de kangourou mesure 3 m ?

(A) 1111 (B) 1000 (C) 1110 (D) 3333 (E) 3000

78. d03 N5 Dans l'ensemble des naturels, je divise 825 par 13, puis le quotient obtenu par 7. Quel est le reste de cette dernière division ?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

79. d06 N4 $2006^2 =$

(A) 42 436 (B) 400 012 (C) 4 000 036 (D) 4 016 016 (E) 4 024 036

80. d05 N6 *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de naturels dont le reste de la division par 3 est 2 et qui sont compris entre 1 et 2005 ?

81. d04 N10 *Sans réponse préformulée* — Quand un pot est rempli d'eau au cinquième de sa capacité, il pèse 500 g. Rempli aux quatre cinquièmes de sa capacité, il pèse 740 g. Que pèse, en grammes, le pot vide ?

82. e06 N21 Je tonds toute la pelouse en t minutes. Quelle fraction de la pelouse ai-je tondue en 15 minutes ($t15$) ?

(A) $t - 15$ (B) $\dfrac{t}{15}$ (C) $15t$ (D) $\dfrac{15}{t}$

(E) Les données sont insuffisantes pour le dire.

83. d06 N5 $(0{,}4)^3 - (0{,}3)^4 =$

(A) $-0{,}1$ (B) 0 (C) $0{,}1$ (D) $0{,}0559$ (E) $0{,}17$

84. d05 N11 $\left(\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{17}\right) \times 17^2 =$

(A) -17^2 (B) -272 (C) -1 (D) $\dfrac{17}{16}$ (E) 256

85. e06 N29 Une dactylo utilise une feuille de papier rectangulaire dont les dimensions sont 21 cm et 29 cm. Elle laisse une marge de 2 cm le long de chacun des grands côtés de sa page et une marge de 4 cm le long de chacun des petits côtés. Quelle fraction de la page utilise-t-elle pour taper son texte ?

(A) $\dfrac{63}{100}$ (B) $\dfrac{17}{29}$ (C) $\dfrac{13}{25}$ (D) $\dfrac{17}{25}$ (E) $\dfrac{19}{25}$

86. e05 N29 Un champ rectangulaire a une longueur double de sa largeur. Il est entouré d'une clôture dont la longueur totale est x mètres. Combien vaut, en mètres carrés, l'aire du champ ?

(A) $\dfrac{x^2}{2}$ (B) x^2 (C) $\dfrac{2x^2}{9}$ (D) $\dfrac{x^2}{18}$ (E) $\dfrac{3x^2}{10}$

87. Combien de diviseurs naturels le nombre 144 admet-il ?
d06
N7
(A) 5 (B) 8 (C) 9 (D) 14 (E) 15

88. $2^3 - 2 \times 3 =$
e03
N2
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 18 (E) 23

89. $(-1)^3 - (-1)^2 =$
e05
N7
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

90. $0{,}1^4 - 0,01^2 =$
e04
N8
(A) 3,8 (B) 0,38 (C) 0,038 (D) 0,0038 (E) 0

91. Le double du cube de l'opposé de 0,1 s'écrit
d06
N8
(A) $(2 \cdot (-0{,}1))^3$
(B) $2^3 \cdot (-0{,}1)$
(C) $(-0{,}2)^3$
(D) $2 \cdot (-0{,}1)^3$
(E) $2 \cdot \left(\frac{1}{0{,}1}\right)^3$

92. $0{,}02^3 - 0{,}003^2 =$
e03
N7
(A) 0 (B) 0,054 (C) 0,071 (D) 0,000 001 (E) $-0{,}000\,001$

93. $0{,}01^2 - 0{,}02^2 =$
d05
N21
(A) $-0{,}0003$ (B) $-0{,}003$ (C) $-0{,}03$ (D) $-0{,}02$ (E) 0,01

94. $(1+1)^2 + 1^3 =$
d05
N1
(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 64 (E) 125

95. d06 N12 Lorsqu'il doit soustraire deux fractions, un mauvais élève soustrait les numérateurs et soustrait aussi les dénominateurs ; par exemple, pour lui,

$$\frac{5}{4}-\frac{9}{12}=\frac{5-9}{4-12}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}$$

et, par hasard, il obtient ainsi la réponse correcte. Dans un des cas suivants, son procédé détestable ne lui fournira pas la bonne réponse. Lequel ?

(A) $\frac{6}{7}-\frac{8}{14}$ (B) $\frac{7}{3}-\frac{16}{12}$ (C) $\frac{3}{5}-\frac{4}{10}$ (D) $\frac{5}{6}-\frac{9}{18}$ (E) $\frac{7}{11}-\frac{3}{22}$

96. d04 N3 Que vaut 2^3-3^2 ?

(A) 1^2 (B) $(-1)^2$ (C) 0 (D) $(-1)^3$
(E) Un autre nombre que les précédents

97. d03 N2 Le produit $1^2\times 2^2\times 3^3\times 4^4$ est égal à

(A) $1\times 4\times 6\times 8$ (D) 1234^2
(B) $1\times 4\times 9\times 16$ (E) 1234^{1234}
(C) $1\times 4\times 27\times 256$

98. d05 N15 *Sans réponse préformulée* — Que vaut 38^2-37^2 ?

99. d06 N13 Parmi les cinq nombres suivants, un seul est premier. Lequel ?

(A) 12 799 (B) 13 791 (C) 14 645 (D) 16 803 (E) 73 797

100. e06 N7 Le double du tiers du carré de 9 est égal à

(A) 6 (B) $\frac{27}{2}$ (C) 27 (D) 36 (E) 54

101. e06 N8 $\left(5-\left(4-\left(3-(2-1)^1\right)^2\right)^3\right)^4=$

(A) -625 (B) 0 (C) 81 (D) 256 (E) 625

102. e06 N24

Si on calcule le produit $2^{2005} \times 5^{2006}$, on obtient un très grand nombre ; quelle est la somme de tous ses chiffres ?

(A) 5 (B) 7 (C) 32 (D) 3057 (E) 15 657

103. d06 N15

Combien de nombres naturels non nuls ont, après leur division par 16, un reste égal au quotient ?

(A) 15 (B) 16 (C) 25 (D) 117 (E) 118

104. d05 N16

$2^{2005} \cdot 5^{2000}$ est un très grand nombre. Combien a-t-il de chiffres ?

(A) 2000 (B) 2001 (C) 2002 (D) 2003 (E) 4005

105. d04 N24

L'inverse de la différence des cubes d'un demi et d'un tiers vaut

(A) $\frac{1}{216}$ (B) $\frac{19}{216}$ (C) 1 (D) $\frac{216}{19}$ (E) 216

106. d05 N2

Que vaut la somme des carrés des cinq premiers nombres premiers ?

(A) 39 (B) 88 (C) 205 (D) 208 (E) 385

107. d06 N16

$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{5}{5} + \cdots + \frac{97}{5} + \frac{99}{5} =$

(A) 499 (B) $\frac{999}{2}$ (C) $\frac{2499}{5}$ (D) 500 (E) 990

108. d05 N4

Le chiffre des unités de 12^{12} est

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

109. e06 N13

Parmi les nombres suivants, quel est le plus grand ?

(A) $3^2 - 2^3$ (B) $4^2 - 2^4$ (C) $4^3 - 3^4$ (D) $5^2 - 2^5$ (E) $5^3 - 3^5$

110. d06 N18 Dans un polygone régulier à 2006 côtés, on construit les segments consécutifs joignant un sommet au 17e sommet suivant (en progressant toujours dans le même sens). Combien de segments aura-t-on tracés quand on sera revenu au point de départ ?

(A) 59 (B) 118 (C) 2005 (D) 2006 (E) 4012

111. e06 N11 Le chiffre des unités du carré d'un nombre entier n'est jamais

(A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

112. d04 N13 Si $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$, alors $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{x + y + z}$ vaut

(A) 13 (B) 6 (C) 36 (D) 1
(E) Une autre valeur que celles proposées

113. d05 N3 *Sans réponse préformulée* — La somme des carrés de deux nombres naturels consécutifs vaut 61. Que vaut la somme de ces deux nombres ?

114. d06 N20 Combien existe-t-il de nombres naturels n tels que la fraction $\dfrac{n}{n+2}$ est simplifiable ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 2006 (E) Une infinité.

115. d05 N25 Les nombres naturels a, b et c sont tels que a est un diviseur de b et b est un diviseur de c. Dans ces conditions, on a nécessairement :

(A) ab est un diviseur de c ;
(B) $ab = c$;
(C) $ac = b^2$;
(D) ac est un diviseur de b^2 ;
(E) a est un diviseur de c.

116. d06 N24 *Sans réponse préformulée* — Dans l'égalité $\dfrac{5}{13} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{2}{m}$, que vaut m ?

117. e06 N5 0,25 % de 360 est égal à

(A) 14,4 (B) 1,44 (C) 9 (D) 0,9 (E) 0,99

118. e05 N3 Parmi les montants suivants, quatre sont égaux entre eux et l'un en diffère. Lequel ?

(A) 10 % de 500 euros
(B) 2 % de 2500 euros
(C) 40 % de 125 euros
(D) 25 % de 2000 euros
(E) 8 % de 625 euros

119. e05 N9 La différence entre 99 % de 19 et 19 % de 99 est égale à

(A) 0 (B) $\dfrac{9440}{1881}$ (C) $\dfrac{1881}{9940}$ (D) 940,5 (E) 80

120. d06 N28 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre naturel non nul par lequel il faut multiplier la fraction

$$\frac{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

pour obtenir un nombre entier ?

121. d04 N14 Un capital de 10 000 euros est devenu 10 400 euros après un an. À quel taux annuel était-il placé ?

(A) 4 % (B) 10,4 % (C) 40 % (D) 104 % (E) 400 %

122. e06 N20 Lors de soldes, un commerçant réduit ses prix de 10 %. Puis, quelques jours plus tard, il réduit ses nouveaux prix de 20%. Quelle est la réduction totale appliquée sur les prix de départ ?

(A) 18 % (B) 28 % (C) 30 % (D) 32 % (E) 72 %

123. e03 N18 Je dois acheter 12 films pour mon appareil photographique. Ils coutent habituellement 6,75 euros, mais de nombreux magasins font des « offres spéciales ». Laquelle est la plus avantageuse ?

(A) « Réduction de 20 % sur tous les prix. »
(B) « 4 films pour le prix de 3. »
(C) « Pour deux films payés, le 3ᵉ gratuit. »
(D) « Payez seulement les 3/4 du prix. »
(E) « 30 % de réduction sur les films. »

124. d05 N30 J'ai deux bidons de 3 litres de désherbant pour mon allée large de 5 mètres et longue de 100 m. Quelle partie de mon allée restera non pulvérisée si j'utilise 50 cm^3 de produit par mètre carré ?

(A) 24 % (B) 50 % (C) 76 % (D) 88 % (E) 94 %

125. d03 N14 Dans une éponge gorgée d'eau, 80 % de la masse est de l'eau. Si une compression lui fait perdre 75 % de cette eau, quel pourcentage de la masse est encore de l'eau ?

(A) 5 % (B) 20 % (C) 25 % (D) 50 % (E) 60 %

126. e06 N14 Dans une firme, 40 % des employés sont des femmes et le nombre des employés masculins dépasse de 250 celui des employées. Quel est le nombre total d'employés (hommes et femmes) ?

(A) 625 (B) 705 (C) 750 (D) 1000 (E) 1250

127. e03 N30 Dans une certaine population, 80% des personnes ont été vaccinées contre la grippe. Lors d'une épidémie, 20 % de la population a été malade alors que seulement 10 % des vaccinés ont contracté la maladie. Quelle est la proportion de personnes non vaccinées qui ont eu la grippe ?

(A) 80 % (B) 60 % (C) 50 % (D) 30 % (E) 20 %

128. d03 N19 Soit $N = 11 \times 13 \times 17$. Combien N a-t-il de diviseurs naturels autres que 1 et lui-même ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

129. e04 N17 Si on augmente le dividende d'une division de 65 et si on augmente le diviseur de 5, on s'aperçoit que le quotient et le reste ne changent pas. Que vaut le quotient ?

(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

130. d04 N22 *Sans réponse préformulée* — x et 72 ont pour plus grand commun diviseur 18 et pour plus petit commun multiple 648. Que vaut x ?

131. e06 N28 *Sans réponse préformulée* — Combien de nombres entiers compris entre 100 et 999 inclus sont divisibles par 12 ?

132. e05 N19 Je dispose d'un kilo de bonbons au chocolat, soit 96 bonbons, d'un kilo de bonbons au citron, soit 120 bonbons, et d'un kilo de bonbons à la menthe, soit 144 bonbons. À l'aide de ces trois kilos, je confectionne le plus grand nombre possible de sachets au contenu identique en utilisant tous les bonbons. Combien y aura-t-il de bonbons par sachet ?

(A) 12 (B) 15 (C) 24 (D) 30
(E) Aucun des nombres précédents.

133. e04 N12 1000 litres d'eau de mer abandonnent par évaporation 32 kg de sel. Quel est, au minimum, le nombre de mètres cubes d'eau de mer à faire évaporer pour obtenir une tonne de sel ?

(A) 16 (B) 31 (C) 32 (D) 34 (E) 110

134. d04 N11 Notre école compte entre 1500 et 2000 élèves. Ceux-ci peuvent être répartis exactement en groupes de 18 élèves, ou de 24 élèves, ou de 28 élèves. Il est impossible de les répartir exactement en groupes de

(A) 12 élèves (B) 27 élèves (C) 36 élèves (D) 48 élèves (E) 63 élèves

135. d05 N12 *Sans réponse préformulée* — Je suis à la fois un nombre impair inférieur à 1000 et la quatrième puissance d'un nombre premier. La somme de mes chiffres est un nombre premier. Quel nombre suis-je ?

136. e06 N9 Une voiture roulant à la vitesse de 90 km/h consomme 6 litres aux 100 kilomètres. À cette vitesse, combien de litres consomme-t-elle en une heure ?

(A) 0,666... (B) 1,5 (C) 5,4 (D) 6,66... (E) 15

137. d03 N18 Un cycliste monte une colline d'un kilomètre de long à une vitesse de 15 km/h et la redescend tout aussitôt à une vitesse de 30 km/h. Quelle est la vitesse moyenne sur les deux kilomètres parcourus ?

(A) 18 km/h (B) 20 km/h (C) 22,5 km/h (D) 24 km/h (E) 25 km/h

2.3 Géométrie

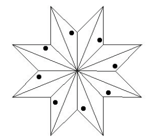
138. d03 N4 Aux États-Unis, Wyre est à 12 km au sud de Piddle et Morton est à 12 km à l'est de Piddle. Par rapport à Wyre, Morton se trouve

(A) Au nord-est ;
(B) Au sud-est ;
(C) Au sud-ouest ;
(D) À l'ouest ;
(E) Au nord-ouest.

139. e04 N11 On trace les bissectrices des angles intérieurs d'un parallélogramme. Les points d'intersection de ces bissectrices déterminent une figure qui est toujours

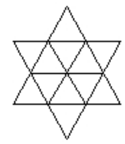
(A) Un point ;
(B) Un rectangle non carré ;
(C) Un carré ;
(D) Un point ou un carré ou un rectangle ;
(E) Un parallélogramme non rectangle.

140. e04 N15 Dans le plan, combien d'axes de symétrie la figure suivante admet-elle ?



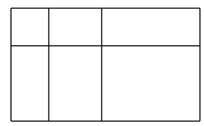
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 8

141. e05 N5 Combien de triangles de toutes tailles et de toutes orientations y a-t-il dans la figure ci-contre ?



(A) 12 (B) 14 (C) 18 (D) 20 (E) 24

142. d04 N12 Combien de rectangles ont leurs côtés sur les segments de la figure ci-contre ?



(A) 6 (B) 7 (C) 12 (D) 16 (E) 18

143. e06 N6 *Sans réponse préformulée* — Dans le plan, on considère trois points non alignés. Combien existe-t-il de parallélogrammes dont ces trois points sont trois sommets ?

144. e05 N21 Combien existe-t-il de parallélipipèdes rectangles de formes différentes, à dimensions entières distinctes, et de volume 2005 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) une infinité

145. e03 N20 Quel est, au maximum, le nombre de points communs que pourraient avoir un cercle et un rectangle ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10

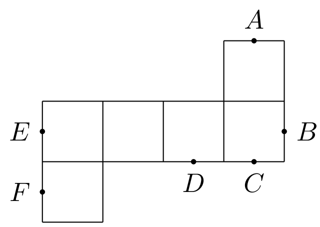
146. e04 N18 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de rectangles d'aire 2004 cm^2 dont les dimensions sont des nombres entiers de centimètres ?

147. e06 N27 Un hall carré est pavé à l'aide de dalles carrées toutes identiques et placées parallèlement aux murs du hall. Sur les deux diagonales du hall se trouvent en tout 125 dalles. Combien de dalles ont été nécessaires pour paver tout le hall ?

(A) 625 (B) 1225 (C) 1369 (D) 3844 (E) 3969

148. d05 N20 *Sans réponse préformulée* — Une diagonale d'un polygone est tout segment de droite joignant un sommet du polygone à un autre sommet non adjacent. Un décagone est un polygone à 10 sommets. Combien y a-t-il de diagonales dans un décagone régulier ?

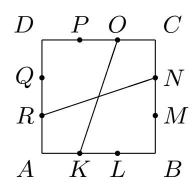
149. e03 N26 La figure ci-dessous montre le développement d'un cube ; les points A, B, C, D, E et F sont des milieux d'arêtes.



Lorsque le cube est construit, F coïncide avec

(A) A ; (B) B ; (C) C ; (D) D ; (E) E.

150. d03 N22 Les côtés du carré $ABCD$ sont divisés en trois parties de même longueur par les points K, L, M, N, O, P, Q et R ; de plus, les segments $[KO]$ et $[RN]$ sont tracés. Alors, la figure obtenue (v. ci-contre)



(A) N'a ni centre de symétrie, ni axe de symétrie ;

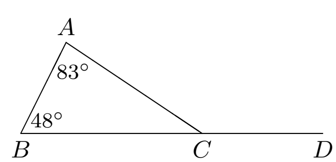
(B) A un centre de symétrie, mais pas d'axe de symétrie ;

(C) A un centre de symétrie et un seul axe de symétrie ;

(D) A un centre de symétrie et deux axes de symétrie ;

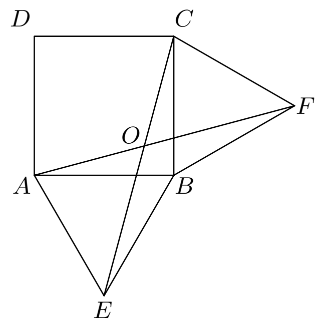
(E) A un centre de symétrie et quatre axes de symétrie.

151. d06 N2 Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle extérieur $\widehat{ACD} = \alpha$?



(A) 119 (B) 123 (C) 127 (D) 131 (E) 141

152. e03 N23 Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré, ABE et BCF sont deux triangles équilatéraux ; de plus, O est le point d'intersection des droites AF et CE. Alors, le segment $[AF]$ a pour image le segment $[EC]$ par une rotation



(A) De centre O et d'angle 60° ;

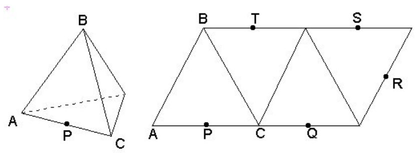
(B) De centre B et d'angle 60° ;

(C) De centre B et d'angle 90° ;

(D) De centre D et d'angle 60° ;

(E) De centre D et d'angle 90°.

153. e05 N14 Voici un tétraèdre régulier et un de ses développements. Les points P, Q, R, S et T sont situés aux milieux des arêtes. À partir du développement, on reconstitue le tétraèdre. Quel est l'autre point du développement qui coïncide avec P ?



(A) Q (B) R (C) S (D) T

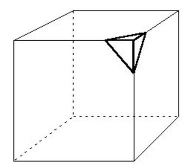
(E) Un autre point que ceux proposés.

154. e05 N27 *Sans réponse préformulée* — Mathieu s'amuse à empiler des cubes en bois ; il en possède moins de 100. S'il fait des piles de 5 cubes, il utilise tous les cubes qu'il possède. Par contre, s'il fait des piles de 6 cubes ou des piles de 7 cubes, il lui reste à chaque fois 1 cube. Combien de cubes Mathieu possède-t-il ?

155. e05 N25 Les centres des faces d'un cube sont les sommets d'un polyèdre. Combien ce polyèdre a-t-il de faces ?

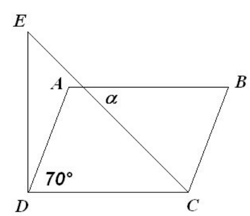
(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12
(E) Un nombre autre que les précédents.

156. e05 N22 Le cube tronqué est le polyèdre obtenu en enlevant une petite pyramide à chaque coin d'un cube, comme le montre la figure ci-contre pour un des coins (les huit pyramides ôtées étant deux à deux disjointes). Quel est le nombre d'arêtes du cube tronqué ?

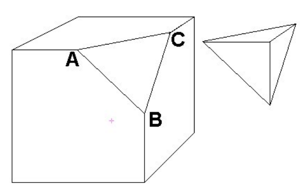


(A) 24 (B) 32 (C) 36 (D) 42 (E) 48

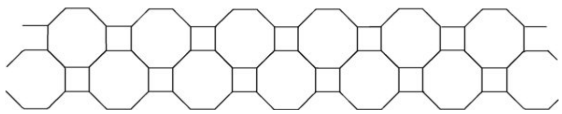
157. d06 N11 *Sans réponse préformulée* — Dans le parallélogramme $ABCD$, l'amplitude de l'angle $\widehat{ADC}$ vaut 70°. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle α sachant que le triangle CDE est rectangle isocèle ?



158. d05 N24 *Sans réponse préformulée* — Sur la figure ci--contre, A, B et C sont les milieux d'arêtes du cube et on a enlevé du cube la petite pyramide de base ABC. On procède de même en chaque sommet du cube. Quel est le nombre d'arêtes du solide ainsi formé ?



159. d05 N14 La frise représentée partiellement ci-dessous consiste en une bande horizontale illimitée vers la droite et vers la gauche.



Laquelle des propositions suivantes est vraie ? Cette frise

(A) Admet exactement un centre de symétrie ;

(B) Admet exactement deux centres de symétrie ;

(C) Admet strictement plus de deux centres de symétrie ;

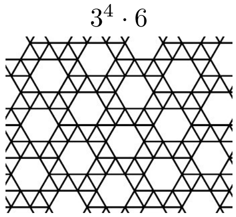
(D) Admet exactement un axe de symétrie ;

(E) Admet exactement deux axes de symétrie.

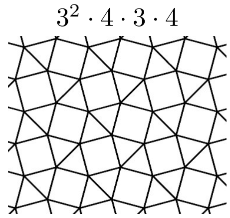
160. d05 N28

Un pavage du plan est un recouvrement complet du plan par un motif répétitif. Les pavages semi-réguliers sont ceux qui utilisent au moins deux types de polygones réguliers assemblés de sorte que deux d'entre eux ont en commun soit aucun point, soit un sommet de chacun d'eux, soit une arête de chacun d'eux. Voici trois « fragments » de pavage semi-régulier du plan ; ces pavages peuvent être décrits respectivement par les symboles

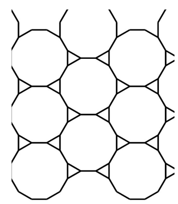
$3^4 \cdot 6$



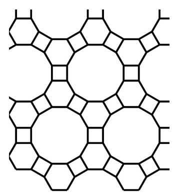
$3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$



$3 \cdot 12^2$



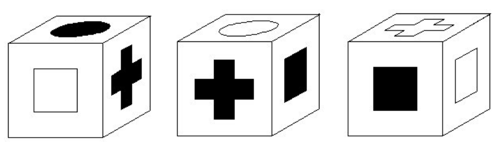
Quel est le symbole qui décrit de la même manière le pavage dont un fragment est représenté ci-dessous ?



(A) $3 \cdot 4 \cdot 6$ (B) $4 \cdot 6 \cdot 4$ (C) $4^6 \cdot 6^6 \cdot 12$ (D) $4^2 \cdot 6 \cdot 12$ (E) $4 \cdot 6 \cdot 12$

161. e06 N19

Voici trois vues d'un même cube :



Sur les faces de ce cube se trouvent les figures suivantes : disque blanc, disque noir, carré blanc, carré noir, croix blanche, croix noire. Quelle est la figure se trouvant sur la face opposée au disque noir ?

(A) Disque blanc

(B) Carré blanc

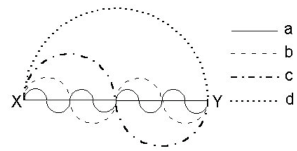
(C) Carré noir

(D) Croix blanche

(E) Croix noire

162. d06 N14 *Sans réponse préformulée* — Dans un cube, un sommet, une arête contenant ce sommet et une face contenant cette arête forment un drapeau. Combien un cube comporte-t-il de drapeaux ?

163. e04 N27 Sur le segment $[XY]$, on a construit des demi-cercles juxtaposés.



Les différents parcours **a**, **b**, **c**, **d** sont tels que

- (A) **a** est le plus long ;
- (B) **d** est le plus court ;
- (C) **a**, **b**, **c** et **d** sont de même longueur ;
- (D) **b** est plus long que **a** ;
- (E) **b** est plus court que **a**.

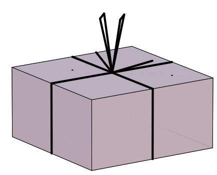
164. e06 N4 Regardé au microscope, un objet long de 2 mm correspond à 50 graduations de l'oculaire. En millimètres, quelle sera la longueur d'une algue dont l'image dans l'oculaire correspond à 10 graduations ?

(A) 1 (B) 0,8 (C) 0,5 (D) 0,4 (E) 0,2

165. d03 N27 Dans une plaine, l'ombre au soleil d'un arbre de 8 m de haut mesure 4,4 m. Au même moment, un arbre voisin a une ombre au soleil de 11 m. Quelle est la différence de hauteur de ces deux arbres ?

(A) 5,6 m (B) 6,6 m (C) 12 m (D) 15,4 m (E) 20 m

166. e03 N17 Une boite à gâteau a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée de 24 cm de côté ; sa hauteur est de 12 cm. Elle est entourée d'une ficelle comme le montre la figure ci-contre. Quelle est la longueur de cette ficelle (en centimètres) sachant qu'il faut 20 cm rien que pour le nœud ?



(A) 116 (B) 124 (C) 140 (D) 144 (E) 164

167. La base d'un parallélipipède rectangle est un carré de côté 2 cm. La hauteur de ce parallélipipède mesure x cm et sa surface totale est de 200 cm^2. Que vaut x ?
e06
N15

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

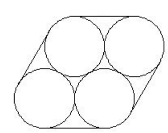
168. Un cercle est tangent à deux demi-droites issues d'un même point et faisant entre elles un angle de 120°. Le segment reliant les deux points de contact
d06
N19

(A) Comprend toujours le centre du cercle ;
(B) A la même longueur que le diamètre du cercle ;
(C) A la même longueur que le rayon du cercle ;
(D) A la même longueur que le quart de la circonférence ;
(E) A la même longueur que le sixième de la circonférence.

169. Un rectangle R est partagé par deux traits en quatre rectangles d'aires respectives 24 cm^2, 45 cm^2, 64 cm^2 et 120 cm^2. Les dimensions des quatre petits rectangles sont des nombres entiers. Quel est, en centimètres, le périmètre du rectangle R ?
e06
N30

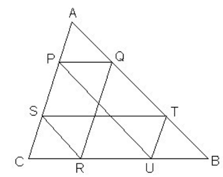
(A) 34 (B) 56 (C) 68 (D) 253 (E) Il manque une donnée.

170. Des tuyaux cylindriques de diamètre extérieur égal à 20 cm sont ficelés au plus serré comme indiqué sur la figure. Quelle est, en centimètres, la longueur de la ficelle (hors nœuds) ?
e04
N30



(A) 100 (B) $100 + 10\pi$ (C) $40 + 20\pi$ (D) $80 + 20\pi$ (E) $80 + 40\pi$

171. Dans un triangle ABC, on choisit un point P sur $[AC]$, mais pas au milieu de $[AC]$, puis on trace les segments $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$, $[ST]$, $[TU]$ et $[UP]$ parallèlement aux côtés du triangle. Quel que soit le choix du point P, la longueur du circuit $PQRSTUP$ est
d04
N21



(A) Toujours égale au périmètre du triangle ABC ;

(B) Constante et toujours plus petite que le périmètre du triangle ABC ;

(C) Constante et toujours plus grande que le périmètre du triangle ABC ;

(D) Variable, dépendant de P, mais proportionnelle au périmètre du triangle ABC ;

(E) Indépendante du périmètre du triangle ABC.

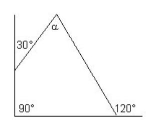
172. Deux cercles ont pour périmètres respectifs 20 cm et 25 cm. Que vaut, en centimètres, la différence de leurs rayons ?
e05
N18

(A) 5 (B) 5π (C) $\dfrac{\pi}{5}$ (D) $\dfrac{5}{2\pi}$ (E) $\dfrac{5\pi}{2}$

173. Un carré et un cercle ont le même périmètre. Le rapport $\dfrac{r}{c}$ du rayon r du cercle au côté c du carré vaut
d06
N21

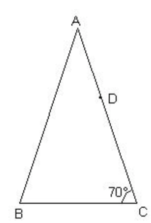
(A) $\dfrac{1}{\pi}$ (B) $\dfrac{2}{\pi}$ (C) 1 (D) $\dfrac{\pi}{2}$ (E) π

174. Dans la figure ci-contre, quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle α ?
d04
N9



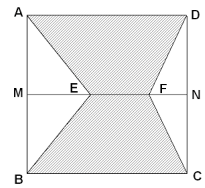
(A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 60 (E) 65

175. Dans la figure ci-contre, $|AB| = |AC|$, $|BC| = |CD|$ et l'amplitude de l'angle C est 70°. L'amplitude de l'angle $\widehat{ABD}$ est
e04
N19



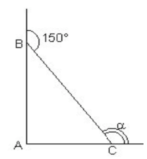
(A) 10° ; (B) 15° ; (C) 20° ; (D) 25° ; (E) 30°.

176. d06 N23 Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 120. Les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ sont M et N. Sur la médiane MN, on place deux points E et F. L'aire du polygone $AEBCFD$ ombré vaut les trois cinquièmes de l'aire du carré. Quelle est la longueur de EF ?



Ⓐ 24 Ⓑ 48 Ⓒ 60 Ⓓ 72 Ⓔ 84

177. e04 N5 *Sans réponse préformulée* — Dans le triangle ABC, l'angle A mesure 90° et l'angle extérieur B mesure 150°. Quelle est la mesure en degrés de l'angle α ?



178. e03 N8 Dans un triangle ABC isocèle ($|AB| = |AC|$), l'angle de sommet A mesure 20°. Si E est le point du côté $[AC]$ tel que $|AE| = |EB|$, alors l'angle $\widehat{EBC}$ vaut

Ⓐ 80° Ⓑ 60° Ⓒ 50° Ⓓ 45° Ⓔ 40°

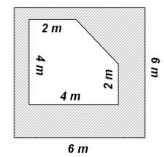
179. d04 N30 *Sans réponse préformulée* — Dans un triangle ABC rectangle en B, la médiatrice de $[AC]$ coupe $[BC]$ en H de sorte que AH est bissectrice de l'angle A. Quelle est alors la mesure en degrés de l'angle C ?

180. d03 N8 *Sans réponse préformulée* — Dans un triangle ABC dont l'angle de sommet A est aigu, la hauteur issue de A coupe $[BC]$ en D et la bissectrice issue de B coupe $[AC]$ en E et $[AD]$ en F. Si l'angle de sommet B de ce triangle mesure 52°, quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AFB}$?

181. e03 N11 Quel est l'amplitude de l'angle que forment les aiguilles d'une horloge lorsqu'elles indiquent exactement 12 h 30 ?

Ⓐ 0° Ⓑ 15° Ⓒ 150° Ⓓ 165° Ⓔ 180°

182. Dans un jardin, la piscine de forme pentagonale est entourée d'une terrasse (ombrée sur la figure). Que vaut, en mètres carrés, l'aire de la terrasse ?
d06
N25

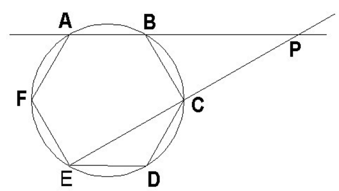


(A) 18 (B) 20,75 (C) 22 (D) 22,5
(E) Les données sont insuffisantes pour le dire.

183. Quelle est l'amplitude de l'angle aigu d'un trapèze rectangle dont la grande base mesure 8 cm, la hauteur 4 cm et l'aire 24 cm^2 ?
e06
N22

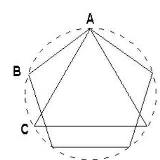
(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 72° (E) 75°

184. Sur la figure ci-dessous, $ABCDEF$ est un hexagone régulier. Les droites AB et CE se coupent en P. Quelle est l'amplitude de l'angle aigu $\widehat{APE}$?
e05
N11



(A) 20° (B) 22,5° (C) 25° (D) 30° (E) 36°

185. Dans la figure ci-contre, un pentagone régulier de côté $[AB]$ et un triangle équilatéral de côté $[AC]$ sont inscrits dans un même cercle et ont même sommet A. Que vaut l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$?
e06
N18

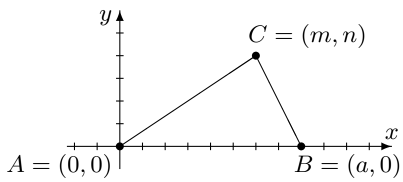


(A) 6° (B) 9° (C) 12° (D) 24° (E) 36°

186. On considère tous les angles de tous les triangles isocèles ayant un angle de 30°. Quelle est, en degrés, l'amplitude du plus grand de ces angles ?
d05
N10

(A) 60 (B) 75 (C) 90 (D) 105 (E) 120

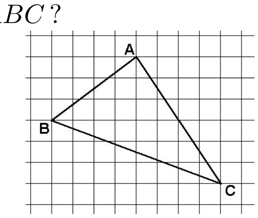
187. d06 N29 Dans le plan muni d'un repère dont les axes x et y sont perpendiculaires, on considère le triangle dont les sommets sont les points A de coordonnées $(0,0)$, B de coordonnées $(a,0)$ et C de coordonnées (m,n), où a, m et n sont des nombres entiers.



Laquelle des propositions ci-dessous est nécessairement vraie, sachant que l'aire du triangle ABC est un nombre entier ?

(A) m est pair ;
(B) n est pair ;
(C) a est pair ;
(D) m et n sont pairs ;
(E) a est pair ou n est pair.

188. d05 N5 Dans le quadrillage représenté ci-dessous, l'aire d'un carreau vaut 1. Que vaut l'aire du triangle ABC ?



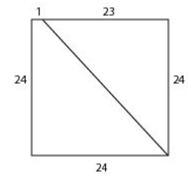
(A) 15 (B) $\frac{19}{2}$ (C) 18 (D) 24 (E) 48

189. e06 N2 Un litre d'huile suffit à polluer une nappe d'eau de 10 000 m^2. Combien de litres d'huile, au minimum, suffisent à polluer une nappe d'eau d'un hectare ?

(A) 0,1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

190. e05 N16

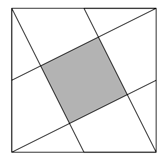
Que vaut la différence des aires des deux parties du carré de côté 24, telles qu'elles sont représentées par la figure ci-contre ?



(A) 2 (B) 12 (C) $\frac{25}{2}$ (D) 23 (E) 24

191. e03 N24

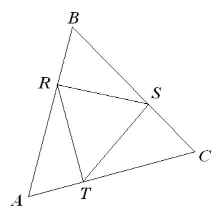
Sur la figure ci-contre, le carré ombré est obtenu en joignant chaque sommet du grand carré au milieu de l'un des côtés de celui-ci. Si l'aire du carré ombré est égale à 1, que vaut celle du grand carré ?



(A) 5 (B) $\frac{14}{3}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{40}{9}$ (E) 4

192. d06 N30

Les points R, S et T appartiennent aux côtés du triangle équilatéral ABC, et sont tels que $|AR| = 2|RB|$, $|BS| = 2|SC|$ et $|CT| = 2|TA|$. Que vaut le rapport de l'aire du triangle RST à l'aire du triangle ABC ?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{5}{18}$ (D) $\frac{3}{10}$ (E) $\frac{4}{9}$

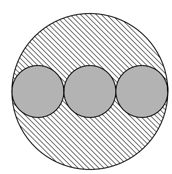
193. e05 N12

Si la longueur d'une diagonale d'un carré est 8, alors l'aire du carré vaut

(A) 16 ; (B) 24 ; (C) 30 ; (D) 32 ; (E) 64.

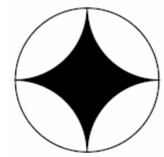
194. e03 N27

Sur la figure ci-contre, les trois cercles ombrés ont le même rayon et leurs centres appartiennent à un même diamètre du grand cercle ; de plus, les deux petits cercles latéraux sont tangents au cercle central et au grand cercle. Quel est le rapport de l'aire de la surface ombrée à celle de la surface hachurée ?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) 1

195. d03 N25 La figure ci-contre montre un disque de rayon 1 ; à l'intérieur de ce disque, la surface ombrée est limitée par des quarts de cercle de même rayon que le disque, chacun d'eux étant tangent à ses deux voisins. Quelle est la mesure de l'aire de cette surface ombrée ?



(A) $4 - \pi$ (B) $4 - \frac{\pi}{2}$ (C) $4 + \frac{\pi}{2}$ (D) $4 + \pi$ (E) 4π

196. e03 N21 L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ vaut 60 cm^2 ; les points P et Q divisent la diagonale $[BD]$ en trois segments de même longueur. Que vaut l'aire du quadrilatère $APCQ$?

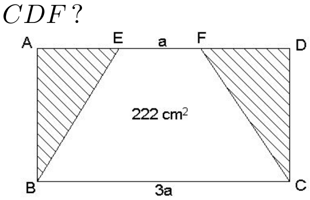
(A) 12 cm^2 (B) 18 cm^2 (C) 20 cm^2 (D) 24 cm^2 (E) 30 cm^2

197. e03 N29 Si P et Q sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$ d'un rectangle $ABCD$, alors le rapport de l'aire du triangle PQD à celle du triangle ABC est égal à

(A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{3}{8}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{5}{8}$; (E) $\frac{3}{4}$.

198. d03 N16 *Sans réponse préformulée* — Trois droites parallèles à un côté d'un triangle divisent chacun des deux autres côtés en quatre parties de même longueur et divisent la surface du triangle en quatre parties. Si l'aire de la plus grande de ces quatre parties a pour mesure 336, quelle est la mesure de l'aire de la plus petite ?

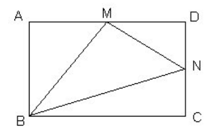
199. d04 N5 $ABCD$ est un rectangle, $|BC| = 3a$ et $|EF| = a$. L'aire du trapèze $BCFE$ est 222 cm^2. Que vaut, en centimètres carrés, la somme des aires des triangles ABE et CDF ?



(A) 74 (B) 111 (C) 444 (D) 666

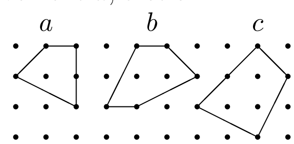
(E) Les données sont insuffisantes pour répondre.

200. d04 N29 M et N sont les milieux des côtés $[AD]$ et $[DC]$ d'un rectangle $ABCD$. Si l'aire du triangle BMN est 27, alors l'aire du rectangle $ABCD$ est



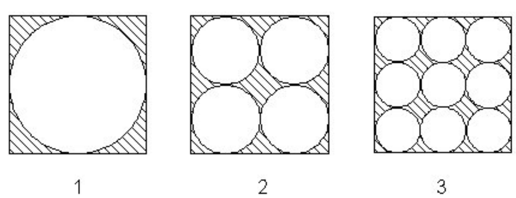
(A) 48 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 80

201. e03 N13 Les sommets des polygones représentés sur la figure ci-dessous sont pris parmi ceux d'un quadrillage à mailles carrées de côté 1. Les aires de ces polygones sont respectivement a, b et c.



(A) $b = 6$ (B) $c = 6$ (C) $a + b = 6$ (D) $b + c = 6$ (E) $a + c = 6$

202. d04 N18 Les trois carrés représentés ci-dessous ont même côté, les cercles sont tangents aux côtés et tangents entre eux. Les aires hachurées des figures 1, 2 et 3 sont désignées respectivement par x, y et z.



Parmi les relations suivantes, quelle est celle qui est vraie ?

(A) $x < y < z$

(B) $x = y < z$

(C) $x = y = z$

(D) $x < y = z$

(E) $x > y > z$

203. La surface latérale d'un cône a pour développement un secteur circulaire (cf. la *figure 1*).
d03
N24

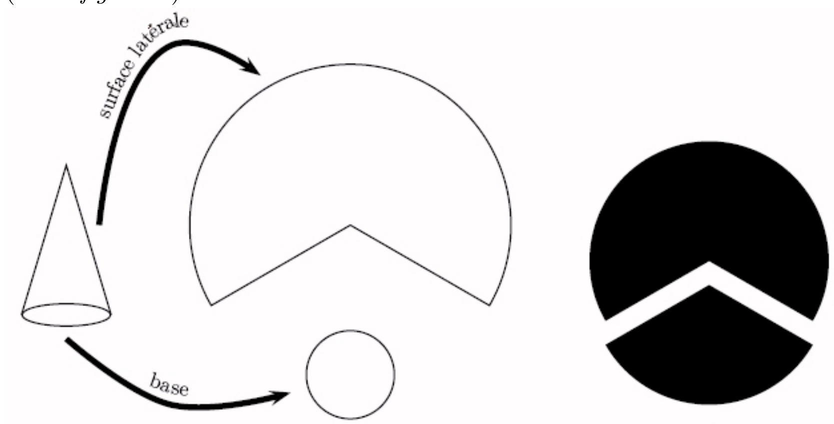
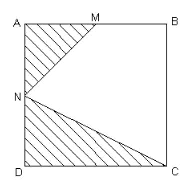


figure 1 *figure 2*

Si les secteurs circulaires obtenus en développant la surface latérale de deux cônes C_1 et C_2 sont deux parties complémentaires d'un même disque (cf. la *figure 2*), leurs aires valant respectivement le tiers et les deux tiers de l'aire de ce disque, alors le rapport des aires des bases de C_1 et de C_2 vaut

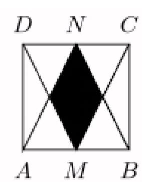
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{\pi}{6}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{2\pi}{9}$

204. $ABCD$ est un carré, M est le milieu de $[AB]$ et N est le milieu de $[AD]$. L'aire de la surface hachurée vaut $12\ \mathrm{cm}^2$. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire du carré $ABCD$?
e04
N29



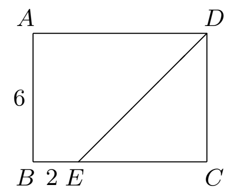
(A) 18 **(B)** 20 **(C)** 24 **(D)** 28 **(E)** 32

205. Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré ; M et N sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[CD]$. Le rapport de l'aire de la partie ombrée à celle de la partie non ombrée du carré vaut
d03
N6



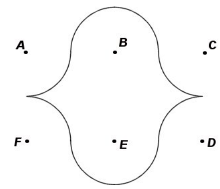
(A) $\frac{1}{5}$; **(B)** $\frac{1}{4}$; **(C)** $\frac{1}{3}$; **(D)** $\frac{1}{2}$; **(E)** 1.

206. e04 N25 Dans le rectangle $ABCD$, le segment $|DE|$ est la bissectrice de l'angle D. Si $|AB| = 6$ et $|BE| = 2$, alors l'aire de $ABCD$ vaut



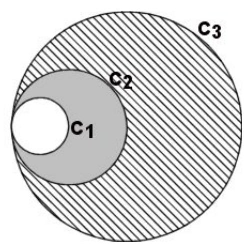
(A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48 (E) 60

207. d05 N26 Sur la figure ci-contre, $ABEF$ et $BCDE$ sont des carrés et A, B, C, D, E, F sont les centres respectifs de huit quarts de cercle de même rayon R. Que vaut l'aire de la surface limitée par ces huit quarts de cercle ?



(A) $4R^2$ (B) $2\pi R^2$ (C) $6R^2$ (D) $8R^2$ (E) $4\pi R^2$

208. d05 N22 Les trois cercles C_1, C_2 et C_3 sont tels que le diamètre du petit cercle C_1 est le rayon du cercle intermédiaire C_2 et le diamètre de C_2 est le rayon du grand cercle C_3. Que vaut le rapport de l'aire grisée dans C_2 à l'aire hachurée dans C_3 ?



(A) $\frac{3}{9}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{5}{10}$ (E) $\frac{1}{4}$

209. d04 N26 *Sans réponse préformulée* — Un parallélipipède rectangle a comme dimensions 1, a et $2a$ où a désigne un nombre naturel non nul. Sa surface totale est 54. Quel est son volume ?

210. d03 N20 Pour peindre une ligne blanche de 10 cm de large et de 2 mm d'épaisseur, une entreprise a utilisé 5 futs de 50 litres de peinture. Quelle est la longueur de la ligne ainsi peinte ?

(A) 1,25 km (B) 2,5 km (C) 3,125 km (D) 6,25 km (E) 12,5 km

2.4 Logique

211. e06 N10 La négation logique de la phrase « Tous les chats sont des animaux domestiques. » est

(A) « Tous les animaux domestiques sont des chats. » ;

(B) « Aucun chat n'est un animal domestique. » ;

(C) « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal domestique. » ;

(D) « Il existe un animal domestique qui n'est pas un chat. » ;

(E) « Certains animaux domestiques sont des chats. ».

212. d06 N6 Quelle est la négation de la phrase « En Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un meurt des conséquences du tabagisme. » ?

(A) « En Belgique, chaque jour de l'année, personne ne meurt des conséquences du tabagisme. »

(B) « En Belgique, au moins un jour de l'année, personne ne meurt des conséquences du tabagisme. »

(C) « En Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un ne meurt pas des conséquences du tabagisme. »

(D) « Hors de Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un meurt des conséquences du tabagisme. »

(E) Aucune des propositions précédentes.

2.5 Combinatoire & probabilités

213. d06 N17 *Sans réponse préformulée* — Un sac contient 4 boules blanches, 5 boules noires et 3 boules rouges. Quel est le pourcentage de boules qui ne sont pas rouges ?

214. d06 N27 *Sans réponse préformulée* — Dix couples se rencontrent lors d'une soirée et se saluent en se serrant la main. Chaque personne serre une seule fois la main de chaque autre personne, mais évidemment aucun mari ne serre la main de sa femme et aucune femme celle de son mari. Combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?

2.6 Problèmes & divers

215. e06 N3 Mon GSM me permet d'appeler mon ami Mathieu pour 0,25 euro par minute en heure creuse (h.c.) et 0,40 euro par minute en heure pleine (h.p.). Laquelle des possibilités suivantes est la moins chère ?

(A) Appeler 10 minutes en h.c. et 5 minutes en h.p.

(B) Appeler 12 minutes en h.p.

(C) Appeler 17 minutes en h.c.

(D) Appeler 5 minutes en h.c. et 8 minutes en h.p.

(E) Appeler 9 minutes en h.c. et 6 minutes en h.p.

216. d04 N19 On considère tous les mots (n'ayant pas nécessairement de signification) de trois lettres distinctes que l'on peut former avec les lettres du mot $AERST$. Combien de ces mots commencent par la lettre A ?

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 20 (E) 24

217. e04 N24 *Sans réponse préformulée* — Alain possède 60 billes, Bernard en possède 18 et Charles 54. Alain et Charles donnent des billes à Bernard pour que tous trois aient le même nombre de billes. Combien Charles en donne-t-il à Bernard ?

218. e06 N25 Le guide d'un groupe de touristes récolte l'argent pour une excursion. S'il demande à chacun 75 euros, il manque 440 euros au total exigé ; s'il demande à chacun 80 euros, il y a un excès de 440 euros. Combien y a-t-il de personnes dans le groupe ? (Le guide ne fait pas partie du groupe.)

(A) 88 (B) 176 (C) 220 (D) 440 (E) 501

219. d06 N9

Un malade pèse 90 kg. Pour se soigner, il doit absorber chaque jour une dose de tonique cardiaque correspondant à 10 mg par kilogramme de masse corporelle. Ce tonique est distribué sous la forme d'une potion, mélange d'eau et de médicament, contenant 300 mg de médicament par 10 ml de potion. Combien de millilitres de potion le malade doit-il absorber quotidiennement ?

(A) 27 (B) 30 (C) 100 (D) 270 (E) 300

220. e03 N15

À chacune des quatre premières interrogations, notées sur 10, j'ai obtenu 8. Si j'obtiens 3 à la cinquième interrogation, également notée sur 10, ma moyenne (sur 10) diminue alors de

(A) 5 ; (B) $\frac{5}{2}$; (C) $\frac{5}{3}$; (D) $\frac{5}{4}$; (E) 1.

221. e03 N28

Sans réponse préformulée — Dans un groupe de 50 jeunes, 18 portent des lunettes ; 14 sont des filles qui ne portent pas de lunettes et 31 sont des garçons. Combien y a-t-il de garçons qui portent des lunettes ?

222. d03 N29

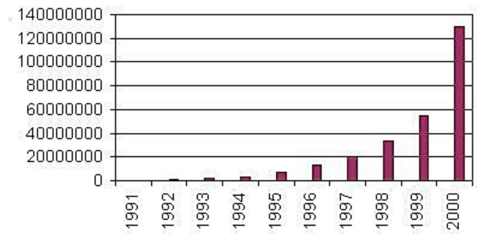
Sans réponse préformulée — Les 20 employés d'une entreprise se serrent la main tous les matins. Combien de poignées de mains sont échangées le jour où il y a 4 absents ?

223. e04 N22

Ma sœur a autant de frères que de sœurs ; mon frère a deux fois plus de sœurs que de frères. Combien y a-t-il d'enfants dans notre famille ?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

224. e06 N23 Le graphique ci-dessous indique le nombre d'utilisateurs de l'internet chaque année de 1991 jusqu'à 2000.



Quel est, en pourcentage, l'accroissement du nombre d'utilisateurs en 2000 par rapport à ce nombre en 1997 ?

(A) 5,5 % (B) 6,5 % (C) 55 % (D) 550 % (E) 650 %

225. d05 N29 *Sans réponse préformulée* — Un livre contient 213 pages numérotées de 1 à 213. Combien de fois le chiffre 2 apparait-il dans la numérotation des pages ?

226. d04 N27 Dans une société, le salaire mensuel moyen est de 1200 euros. On engage trente personnes supplémentaires, dix d'entre elles au salaire de 1000 euros par mois et les vingt autres au salaire de 1300 euros par mois. En euros, le nouveau salaire mensuel moyen x satisfait

(A) $x < 1\,200$
(B) $x = 1\,200$
(C) $1\,200 < x 1\,250$
(D) $1\,250 < x < 1\,300$
(E) Aucune des réponses précédentes

227. e05 N17 Pour des masses inférieures à 5 kg, l'allongement d'un ressort est proportionnel à la masse suspendue à ce ressort. À vide, ce ressort a une longueur de 10 cm. Il mesure 12 cm lorsqu'on y suspend une masse de 1 kg. Quelle masse faut-il y suspendre pour qu'il mesure 15 cm ?

(A) 1,25 kg (B) 1,5 kg (C) 2,5 kg (D) 3 kg (E) 4 kg

228. d06 N10 Quel est le plus grand nombre naturel de deux chiffres égal à la somme de 4 fois son chiffre des dizaines et 5 fois son chiffre des unités ?

(A) 23 (B) 39 (C) 46 (D) 69 (E) 88

229. À propos d'un pays où chaque habitant mange une pizza de 20 cm de
d05 diamètre par jour, un commentateur de radio a dit : « Là, chaque habitant
N19 mange un are de pizza par mois ». C'est évidemment faux. Parmi les superficies suivantes, quelle est celle qui est la plus proche de celle que le commentateur aurait dû citer ?

(A) 1 m^2 (B) 2 m^2 (C) 25 m^2 (D) 0,5 are (E) 2 ares

230. Arpèges-les-Gammes (238 473 habitants) compte 6 accordeurs de piano
d03 qui y travaillent à temps plein depuis longtemps. Selon les renseigne-
N12 ments recueillis, chaque accordeur de piano accorde un piano par jour et travaille 200 jours par an ; en moyenne, chaque piano est accordé une fois tous les quatre ans. Sur base de toutes ces données, il est raisonnable de conclure qu'en moyenne, à Arpèges-les-Gammes, il y a approximativement un piano pour

(A) 25 habitants ;
(B) 50 habitants ;
(C) 100 habitants ;
(D) 250 habitants ;
(E) 800 habitants.

231. Cette année-là, il y avait 5 lundis, 5 mardis et 5 mercredis en janvier. Sur
e04 quel jour de la semaine tombait le 1er février ?
N6

(A) Lundi (B) Mardi (C) Mercredi (D) Jeudi (E) Dimanche

232. Un cycliste quitte la ville A à 8 heures pour se diriger vers la ville B
e04 par une route rectiligne. Il roule à la vitesse constante de 20 km/h.
N28 À 10 heures, un cyclomotoriste quitte B et, par la même route, se dirige vers A à la vitesse constante de 40 km/h. Ces deux usagers se croisent à 11 heures. Quelle est la distance séparant A de B par cette route ?

(A) 20 km (B) 40 km (C) 60 km (D) 80 km (E) 100 km

233. e04 N20 Quand Benoit va à l'école à pied et revient en vélo, cela lui prend une heure et demie. Quand il parcourt les deux trajets en vélo, cela lui prend une demi-heure. Combien de temps met-il lorsqu'il effectue l'aller-retour à pied ?

(A) Une heure et quart
(B) Deux heures
(C) Deux heures et demie
(D) Deux heures trois quarts
(E) Trois heures et demie

234. d04 N23 Une pompe débite 150 litres d'eau par minute et alimente un réservoir initialement vide. Ce réservoir, posé sur un sol horizontal, a la forme d'un parallélipipède droit à base carrée de côté 4 mètres et sa hauteur vaut 6 mètres. À quelle hauteur s'élèvera l'eau après 4 heures de pompage ?

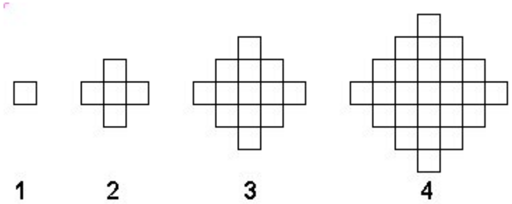
(A) 25 cm (B) 1,60 m (C) 2,25 m (D) 5,40 m (E) 1,62 m

235. d06 N22 *Sans réponse préformulée* — Le nombre 98 est la somme de trois nombres. Le plus petit de ces nombres vaut la moitié du deuxième nombre et le quart du troisième. Que vaut le plus grand de ces trois nombres ?

236. e05 N13 Un automobiliste anglais parcourt 5 milles à la vitesse de 50 milles par heure, puis 5 milles à la vitesse de 60 milles par heure. Un automobiliste français parcourt 5 km à la vitesse de 50 km par heure, puis 5 km à la vitesse de 60 km par heure. Quelle est la différence entre la durée du trajet de l'automobiliste anglais et celle du trajet de l'automobiliste français ? (Considérer qu'un mille vaut 1,6 km.)

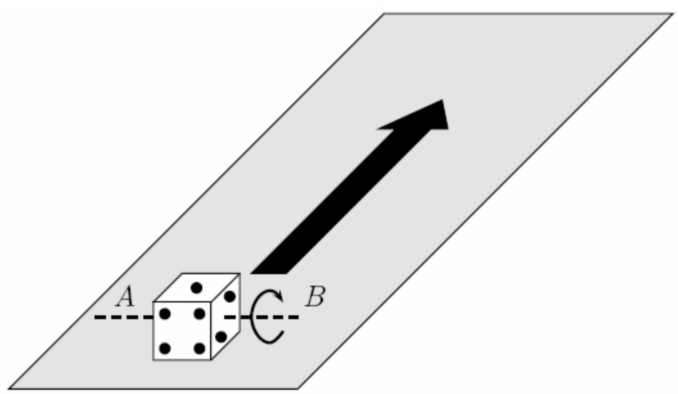
(A) 0 min (B) 6 min (C) 11 min (D) 12 min (E) 22 min

237. d04 N25 Les figures n° 1, n° 2, n° 3 et n° 4 ci-dessous consistent respectivement en 1, 5, 13 et 25 carrés unitaires sans chevauchement. Si on continuait le processus de manière analogue, combien de carrés unitaires sans chevauchement y aurait-il en plus dans la figure n° 100 par rapport à la figure n° 98 ?



(A) 768 (B) 772 (C) 788 (D) 792 (E) 800

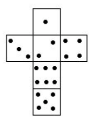
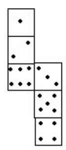
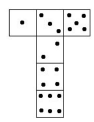
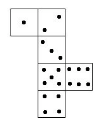
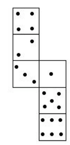
238. d03 N28 *Sans réponse préformulée* — Sur un dé à six faces, la somme des points de deux faces opposées est toujours égale à 7.



Je dispose d'un tel dé dont j'imprègne d'encre les points marqués sur les six faces. Je le dépose sur une feuille de papier dans la position montrée par la figure ci-dessus et je le fais tourner de 5 quarts de tour autour de l'axe AB dans le sens indiqué par la flèche. Quelle est alors la somme des points marqués sur le papier ?

239. d06 N26 *Sans réponse préformulée* — Jean fait plusieurs sachets de bonbons à partir d'un gros paquet de 100 bonbons. Il met dans chaque sachet le même nombre de bonbons et il lui reste alors dans le paquet quelques bonbons en nombre inférieur au nombre de sachets. Pour vider le sachet, il ajoute alors un bonbon supplémentaire dans certains sachets. Sachant que quinze sachets n'ont pas reçu de bonbon supplémentaire, combien Jean a-t-il fait de sachets ?

240. e04 N23 Pour un dé classique, la somme des points sur deux faces opposées est toujours égale à 7. Quel développement de cube parmi les suivants ne respecte pas cette règle ?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

2.7 Table des réponses

N	e03	e04	e05	e06	d03	d04	d05	d06
01	D	B	B	B	E	E	B	B
02	B	B	D	B	C	D	D	D
03	E	E	D	C	D	D	11	D
04	B	C	195	D	A	19	D	E
05	B	120	D	D	A	B	C	D
06	D	D	B	3	C	D	668	B
07	E	D	A	E	462	C	C	E
08	B	E	C	E	116	D	B	D
09	E	B	A	C	D	D	C	B
10	A	C	D	C	E	420	E	D
11	D	D	D	D	8	D	D	45
12	12	C	D	C	B	E	625	E
13	C	A	A	A	C	B	B	A
14	B	4	A	E	D	A	C	48
15	E	A	B	E	B	495	75	A
16	A	B	E	6	48	E	C	D
17	E	D	C	E	40	18	C	75
18	C	6	D	D	B	C	24	B
19	625	B	B	C	D	C	A	C
20	D	C	C	B	A	A	35	E
21	C	A	B	D	A	A	A	B
22	A	C	C	B	D	162	E	56
23	B	C	B	D	A	C	C	A
24	A	10	C	A	A	D	24	208
25	52	D	B	B	A	C	E	C
26	C	A	D	3	106	18	D	23
27	B	C	85	E	C	B	A	180
28	13	E	21	75	23	719	E	5
29	E	E	D	B	120	D	56	E
30	B	D	36	C	D	30	C	B

Chapitre 3

Éliminatoires et demi-finales miDi

3.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

D	e03	e04	e05	e06	d03	d04	d05	d06
01	264	469	454	282	459	414	312	256
02	254	450	263	349	332	279	408	452
03	258	316	305	449	409	373	249	262
04	267	269	302	355	287	321	420	375
05	448	242	330	283	441	281	423	266
06	378	471	451	297	472	347	379	385
07	255	323	348	268	353	265	277	395
08	400	303	417	478	390	398	294	271
09	328	327	311	300	388	364	259	274
10	358	326	359	261	276	313	343	280
11	445	314	284	422	439	288	334	286
12	401	463	410	473	310	252	335	405
13	418	428	431	250	257	424	421	292
14	381	306	474	461	273	243	365	298
15	370	319	278	377	356	342	434	465
16	357	362	380	285	337	246	248	415
17	468	272	391	456	443	324	447	425
18	275	363	366	241	308	393	354	304
19	341	397	270	299	382	317	480	453
20	438	394	296	430	289	301	376	470
21	336	426	247	351	403	371	345	429
22	476	372	387	462	293	251	307	475
23	383	404	407	245	333	325	291	432
24	419	466	427	457	369	367	446	309
25	329	346	435	402	392	318	295	315
26	413	331	455	352	464	253	433	436
27	386	374	338	406	477	322	442	440
28	290	244	396	467	340	260	437	444
29	360	361	389	339	416	412	411	320
30	460	344	350	399	458	368	384	479

3.2 Arithmétique & algèbre

241. e06 D18 Parmi les nombres suivants, un seul n'est pas carré parfait. Lequel est-ce ?

(A) 4 255 083 361
(B) 3 947 100 743
(C) 1 581 255 225
(D) 9 147 774 736
(E) 3 480 646 009

242. e04 D5 Combien de nombres entiers y a-t-il entre -2π et 2π ?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

243. d04 D14 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de nombres naturels à 7 chiffres et dont la somme des chiffres vaut 61 ?

244. e04 D28 Je suis un nombre de deux chiffres. Si on change l'ordre de mes chiffres, on obtient un nombre valant 1 de moins que ma moitié. Qui suis-je ?

(A) 32 (B) 34 (C) 42 (D) 52
(E) Il n'existe pas de tel nombre.

245. e06 D23 Pour tous nombres entiers a et b, on pose $a * b = (a-b)^2 - (b-a)^2$. Que vaut $10 * (11 * 12)$?

(A) 0 (B) 11 (C) 12 (D) 23 (E) 1320

246. d04 D16 Si p est un nombre premier, laquelle des propositions suivantes est vraie ?

(A) $2p+1$ est toujours un nombre premier.
(B) p^2+1 est toujours un nombre premier.
(C) $3p+2$ est toujours un nombre premier.
(D) p^3+2 est toujours un nombre premier.
(E) Aucun des nombres précédents n'est nécessairement premier.

247. e05 D21 Parmi les cinq nombres $5n$, n^2+1, n^2, n^2+n+1, $3n^2-5n$, où n désigne un entier, combien sont nécessairement impairs ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

248. d05 D16 Quelle est la fraction dont l'écriture décimale est 0,125 125 ?

(A) $\dfrac{125}{1001}$ (B) $\dfrac{125}{999}$ (C) $\dfrac{1}{\frac{8}{1/3}}$ (D) $\dfrac{1{,}01}{8}$ (E) $\dfrac{3003}{24\,000}$

249. d05 D3 Lequel des nombres proposés ci-dessous se rapproche le plus de la moyenne (arithmétique) de 1595 et 2405 ?

(A) 1895 (B) 1985 (C) 2005 (D) 2045 (E) 2105

250. e06 D13 Si on calcule le produit $2^{2005} \times 5^{2006}$, on obtient un très grand nombre ; quelle est la somme de tous ses chiffres ?

(A) 5 (B) 7 (C) 32 (D) 3057 (E) 15 657

251. d04 D22 *Sans réponse préformulée* — La moyenne arithmétique de dix nombres est 166. On supprime un de ces nombres et la moyenne arithmétique des neuf nombres restants est 153. Quel est le nombre que l'on a supprimé ?

252. d04 D12 Pour tous les nombres naturels a et b, si l'opération $*$ est définie par $a * b = a^2 + b$, alors $(1 * 2) * 3 - 1 * (2 * 3)$ vaut

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

253. d04 D26 *Sans réponse préformulée* — Quel est le produit maximal que l'on peut former avec deux nombres naturels dont la différence des carrés égale 64 ?

254. e03 D2 *Sans réponse préformulée* — Je multiplie un naturel par celui qui le précède et par celui qui le suit et j'obtiens 2184. Quel est ce naturel ?

255. e03 D7 *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme des 25 premiers nombres naturels impairs ?

256. d06 D1 Pour obtenir a, j'élève 3 à la puissance x. Pour obtenir b, j'élève 3 à la puissance y. Pour obtenir $\frac{a}{b}$, je dois élever 3 à la puissance

(A) $x+y$ (B) $x-y$ (C) $\frac{x}{y}$ (D) $\frac{y}{x}$

(E) Aucune de ces réponses ne convient.

257. d03 D13 $2003^3 - 2001^3 =$

(A) 22 021 022
(B) 22 022 022
(C) 22 044 023
(D) 24 026 024
(E) 24 048 026

258. e03 D3 $999^2 - 1 =$

(A) 1997 (B) 99 800 (C) 99 998 (D) 998 000 (E) 999 998

259. d05 D9 $2^{2005} \cdot 5^{2000}$ est un très grand nombre. Combien a-t-il de chiffres ?

(A) 2000 (B) 2001 (C) 2002 (D) 2003 (E) 4005

260. d04 D28 Quelle est la somme des chiffres du nombre $10^{2004} - 17$?

(A) 4515 (B) 2020 (C) 18 020 (D) 18 029 (E) 20 003

261. e06 D10 *Sans réponse préformulée* — Que vaut $18^3 \cdot 8^3 + 4^3 - 9^3 \cdot 16^3$?

262. d06 D3 L'aire A d'une sphère est donnée en fonction de son rayon R par la formule $A = 4\pi R^2$. Une expression de R comme fonction de A est

(A) $\frac{1}{2}\sqrt{A \times \pi^{-1}}$ (B) $\sqrt{A - 4\pi}$ (C) $\frac{\sqrt{A}}{4\pi}$ (D) $(A - 4\pi)^2$ (E) $\frac{A^2}{16\pi^2}$

263. e05 D2 $(-1)^3 - (-1)^2 =$

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

264. e03 D1 $0{,}02^3 - 0{,}003^2 =$

(A) 0 (B) 0,054 (C) 0,071 (D) 0,000 001 (E) −0,000 001

265. d04 D7 Quel est le chiffre des unités de $2004^{2004} - 1$?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

266. d06 D5 *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme tous les nombres naturels qui sont des diviseurs de 2006 et qui sont inférieurs à 1000 ?

267. e03 D4 $\dfrac{2^{1002} \times 5^{2003}}{50^{1001}} =$

(A) 1 (B) 10 (C) 100 (D) 1000 (E) 10 000

268. e06 D7 Que vaut $\left(-\dfrac{4}{3}\right) \times \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{3}\right) \times \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{5}{4}\right) \times \dfrac{4}{5}$?

(A) -1 (B) $-\dfrac{72}{75}$ (C) $\dfrac{7}{225}$ (D) 1 (E) $\dfrac{16}{135}$

269. e04 D4 $\left(1 + \dfrac{1}{6}\right)\left(1 + \dfrac{1}{7}\right)\left(1 + \dfrac{1}{8}\right)\left(1 + \dfrac{1}{9}\right)\left(1 + \dfrac{1}{10}\right)\left(1 + \dfrac{1}{11}\right) =$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

270. e05 D19 Les nombres réels a et b vérifient l'égalité $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$. Dans ce cas, a et b sont nécessairement tels que

(A) $a = b = 1$;
(B) $a = b$;
(C) $ab = 1$;
(D) $|a| = |b|$;
(E) $a + b = ab$.

271. d06 D8 $\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{5} + \cdots + \dfrac{97}{5} + \dfrac{99}{5} =$

(A) 499 (B) $\dfrac{999}{2}$ (C) $\dfrac{2499}{5}$ (D) 500 (E) 990

272. Si $x = -1$, $y = -2$ et $z = -3$, alors $\dfrac{x^z + y^x + z^y}{xyz} =$
e04
D17

(A) -2 (B) $\dfrac{5}{3}$ (C) $\dfrac{7}{3}$ (D) $\dfrac{7}{108}$ (E) $\dfrac{25}{108}$

273. Si x et y sont des réels non nuls, l'expression
d03
D14

$$\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{y} + \frac{x^2-1}{y} \cdot \frac{y^2-1}{x}$$

est toujours égale à

(A) 1 ; (B) $2xy$; (C) $2(x^2y^2+1)$; (D) $2xy + \dfrac{2}{xy}$; (E) $\dfrac{2x}{y} + \dfrac{2y}{x}$.

274. Parmi les encadrements suivants du nombre $p = 49\,000 \times 21\,000$, un seul est correct. Lequel ?
d06
D9

(A) $10^8 < p < 10^9$
(B) $10^9 < p < 10^{10}$
(C) $10^8 < p < 8 \cdot 10^8$
(D) $8 \cdot 10^8 < p < 9 \cdot 10^8$
(E) $10^{10} < p < 10^{11}$

275. Partant de la fraction $\dfrac{1}{x}$, on effectue trois fois de suite la substitution qui consiste à remplacer x par $1 + \dfrac{1}{x}$. Quelle fraction obtient-on finalement ?
e03
D18

(A) $\dfrac{2x+1}{3x+2}$ (B) $\dfrac{2x+1}{3x+4}$ (C) $\dfrac{5}{3x+4}$ (D) $\dfrac{5x+1}{x+1}$ (E) $\dfrac{5}{x}$

276. En moyenne, Jacques mange x barres de chocolat en y jours. À ce rythme, combien mange-t-il de barres de chocolat en une semaine ?
d03
D10

(A) $\dfrac{7x}{y}$ (B) $\dfrac{7y}{x}$ (C) $7xy$ (D) $\dfrac{7}{xy}$ (E) $\dfrac{x}{7y}$

277. d05 D7 Les trois nombres naturels non nuls et distincts a, b, c sont tels que $a+b+c=6$. Que vaut $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$?

(A) $\frac{17}{30}$ (B) $\frac{27}{40}$ (C) $\frac{37}{50}$ (D) $\frac{47}{60}$ (E) $\frac{57}{70}$

278. e05 D15 Si $\dfrac{a}{b}=2005$, que vaut $\dfrac{a+2005}{b+1}$?

(A) 1002 (B) 2005 (C) 4010 (D) 6015
(E) Il est impossible de le déterminer.

279. d04 D2 *Sans réponse préformulée* — Quand un pot est rempli d'eau au cinquième de sa capacité, il pèse 500 g. Rempli aux quatre cinquièmes de sa capacité, il pèse 740 g. Que pèse, en grammes, le pot vide ?

280. d06 D10 Dans un polygone régulier à 2006 côtés, on construit les segments consécutifs joignant un sommet au 17^{e} sommet suivant (en progressant toujours dans le même sens). Combien de segments aura-t-on tracés quand on sera revenu au point de départ ?

(A) 59 (B) 118 (C) 2005 (D) 2006 (E) 4012

281. d04 D5 Deux fractions sont telles que le numérateur de la première est double du dénominateur de la seconde et que le dénominateur de la première est triple du numérateur de la seconde. Que vaut le produit des deux fractions ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{9}{4}$ (E) 6

282. e06 D1 Lorsqu'on divise $\dfrac{2}{5}$ par l'inverse de son inverse, on obtient

(A) 1 (B) $\frac{2}{25}$ (C) $\frac{4}{25}$ (D) $\frac{5}{4}$ (E) $\frac{25}{4}$

283. e06 D5 L'inverse du carré d'un tiers diminué de l'inverse du carré d'un quart vaut

(A) -7 (B) -1 (C) $-\frac{7}{144}$ (D) $\frac{7}{144}$ (E) $\frac{1}{12}$

284. $(x^{-1}-1):(x-1) =$
e05
D11

(A) -1 (B) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (E) $-\dfrac{1}{x}$

285. Deux nombres naturels sont tels que le produit de leur somme par leur différence est égal à 97. Que vaut leur somme ?
e06
D16

(A) 11 (B) 19 (C) 23 (D) 37 (E) 97

286. Voici cinq couples (x, y) de naturels : $(110, 11)$, $(60, 12)$, $(35, 14)$, $(30, 15)$, $(20, 20)$. Parmi ces couples, combien vérifient l'égalité $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10}$?
d06
D11

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

287. $\sqrt{(-3)^2}+\sqrt{(-4)^2}$
d03
D4

(A) Vaut -7 ; (B) Vaut -1 ; (C) Vaut 1 ; (D) Vaut 7 ;
(E) N'est pas un nombre réel.

288. $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}} =$
d04
D11

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{6}$ (E) $2\sqrt{3}$

289. $\sqrt{9-4\sqrt{2}} =$
d03
D20

(A) $3-2\sqrt{2}$ (B) $3-2\sqrt{\sqrt{2}}$ (C) $2\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{7}$
(E) Un autre nombre que les précédents.

290. Combien y a-t-il de couples d'entiers (a, b) tels que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{12}$?
e03
D28

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 11 (E) 13

291. Dans l'expression $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$, on remplace a par $\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$
d05
D23
et b par $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$. Le résultat est égal à

(A) $2\sqrt{3}$; **(B)** $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$; **(C)** $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$; **(D)** 1 ; **(E)** $4-\sqrt{3}$.

292. Combien existe-t-il de nombres naturels n tels que la fraction $\dfrac{n}{n+2}$ est
d06
D13
simplifiable ?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 2006 **(E)** Une infinité.

293. Soit $S=a^2+b^2+a^2b^2$ où a et b sont deux entiers consécutifs. Alors $\sqrt{S}$
d03
D22

(A) Est toujours un nombre impair ;
(B) Est toujours un nombre pair ;
(C) N'est pas toujours un nombre rationnel ;
(D) N'est jamais un entier ;
(E) Est toujours un nombre irrationnel.

294. Si $x^3=\dfrac{56}{y}$, alors $x\sqrt[3]{y}$
d05
D8

(A) Vaut $2\sqrt[3]{7}$; **(B)** Vaut $\sqrt{56}$; **(C)** Vaut $\dfrac{56}{3}$; **(D)** Vaut $\dfrac{1}{56}$;
(E) N'existe pas.

295. La factorisation réelle de x^4+2 est
d05
D25

(A) $\left(x^2+\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)$;
(B) $\left(x^2+\sqrt{2}\right)\left(x^2-\sqrt{2}\right)$;
(C) $\left(x^2-2x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+2x+\sqrt{2}\right)$;
(D) $x^2(x^2+2)$;
(E) $\left(x^2+\sqrt{2}+x\sqrt[4]{8}\right)\left(x^2+\sqrt{2}-x\sqrt[4]{8}\right)$.

296. e05 D20 Dans la factorisation complète du polynome

$$(1+x)^{10}(1-x^2)^{20}(1+2x+3x^2)^9(2+4x+2x^2)^7,$$

quel est l'exposant de $(1+x)$?

(A) 14 (B) 24 (C) 30 (D) 44 (E) 53

297. e06 D6 On partage 150 en cinq parties respectivement proportionnelles à 2, 4, 6, 8 et 10. La plus grande des cinq parties vaut

(A) 15 (B) 30 (C) 35 (D) 50 (E) 75

298. d06 D14 L'un des réels suivants n'a pas nécessairement la même valeur absolue que x. Lequel ?

(A) $-x$ (B) $|x|$ (C) $-|x|$ (D) $|-x|$ (E) $\frac{1}{2}(x+|x|)$

299. e06 D19 Si x augmente de 20 %, que y diminue de 50 % et que z diminue de 85 %, alors de quel pourcentage augmente le quotient $\dfrac{xy^2}{z}$?

(A) 2 % (B) 24 % (C) 50 % (D) 100 % (E) 200 %

300. e06 D9 Lors de soldes, un commerçant réduit ses prix de 10 %. Puis, quelques jours plus tard, il réduit ses nouveaux prix de 20%. Quelle est la réduction totale appliquée sur les prix de départ ?

(A) 18 % (B) 28 % (C) 30 % (D) 32 % (E) 72 %

301. d04 D20 Soit a, b et c trois nombres réels. Quatre des cinq relations ci-dessous sont équivalentes entre elles. Quelle est celle qui n'est équivalente à aucune autre ?

(A) $b=\frac{1}{2}(a+c)$

(B) $b=\frac{1}{3}(a+b+c)$

(C) $b=\frac{1}{5}(2a+b+2c)$

(D) $b=\frac{1}{7}(4a+2b+c)$

(E) $b=a-b+c$

302. Quel est le degré du polynome $((x^2+x+3)^2(x+1)-(x^2+x+3)^2(x-1))$?
e05
D4

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

303. $(1+x^2)(1-x^3) =$
e04
D8

(A) $1-x^5$
(B) $1-x^6$
(C) $1+x^2-x^3-x^5$
(D) $1+x^2-x^3+x^5$
(E) $1+x^2-x^3-x^6$

304. L'opération $*$ est définie dans l'ensemble des nombres réels par $a * b = = (-a)^{-b}$. Que vaut $(-9) * (1 * 2)$?
d06
D18

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) 3 (D) 9 (E) -9

305. La factorisation complète du polynome x^5-x en polynomes à coefficients réels comporte un nombre de facteurs égal à
e05
D3

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

306. L'égalité $x^2+y^2=(x+y)^2$, où x et y sont des nombres réels,
e04
D14

(A) Est toujours vraie ;
(B) Est vraie si et seulement si x et y sont tous deux nuls ;
(C) Est vraie si et seulement si l'un au moins de x ou de y est nul ;
(D) Est vraie si et seulement si x et y sont opposés ;
(E) N'est jamais vraie.

307. $(a^2-b^2-c^2+2bc) : \dfrac{a+b-c}{a+b+c} =$
d05
D22

(A) $(a+c)^2-b^2$
(B) $a^2+b^2+c^2-2bc$
(C) 1
(D) $(a+b+c)^2$
(E) $2bc-a^2-b^2-c^2$

308. d03 D18 *Sans réponse préformulée* — Quel est le reste de la division de 2^{2003} par 13 ?

309. d06 D24 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre naturel non nul par lequel il faut multiplier la fraction

$$\frac{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

pour obtenir un nombre entier ?

310. d03 D12 *Sans réponse préformulée* — Soit $N = 11 \times 13^2 \times 17^3$. Combien N a-t-il de diviseurs naturels autres que 1 et lui-même ?

311. e05 D9 Combien de diviseurs positifs de 9^9 sont des cubes parfaits ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 18

312. d05 D1 *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de naturels dont le reste de la division par 3 est 2 et qui sont compris entre 1 et 2005 ?

313. d04 D10 *Sans réponse préformulée* — x et 72 ont pour plus grand commun diviseur 18 et pour plus petit commun multiple 648. Que vaut x ?

314. e04 D11 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre qui divisé par 2, 3, 4, 5 et 6 donne respectivement 1, 2, 3, 4 et 5 comme restes ?

315. d06 D25 Que vaut $f(x)$ sachant que $f(x+1) = x^2 - x + 1$?

(A) $x^2 - x$
(B) $x^2 - x + 2$
(C) $x^2 - 2x + 3$
(D) $x^2 + 3x + 3$
(E) $x^2 - 3x + 3$

316. e04 D3 En ajoutant 6 à un nombre entier, on obtient un nombre divisible par 8. Quel est le reste de la division par 8 du nombre de départ ?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 7

317. d04 D19 Lorsqu'on divise un nombre n par 5, on trouve un reste égal à 3. Quel est le reste de la division de $18n$ par 15 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 6 (E) 9

318. d04 D25 Le reste de la division du polynome $P(x)$ par $(x-1)$ est -3. Quel est le reste de sa division par $(x-1)^2$?

(A) -3 (B) 9 (C) $x+9$ (D) $-3x+9$
(E) Ce reste n'est pas déterminé par les données.

319. e04 D15 Si la longueur x d'un trajet est diminuée de 15 % et si le temps y mis pour effectuer ce trajet est augmenté de 25 %, alors la vitesse $\frac{x}{y}$

(A) Diminue de 32 % ;
(B) Augmente de 32 % ;
(C) Diminue de 10 % ;
(D) Augmente de 10 % ;
(E) Diminue de 40 %.

320. d06 D29 Pour combien de nombres naturels n la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ se simplifie-t--elle ?

(A) Aucun (B) 1 (C) 2 (D) 7 (E) Une infinité.

321. d04 D4 Si la moyenne arithmétique des quatre premiers termes de la suite $(1,1,1,x,2,2,2,2)$ vaut celle des cinq derniers, alors x vaut

(A) 17 (B) 19 (C) 23 (D) 25 (E) 41

322. d04 D27 À la poste, Jean donne 10 euros à l'employé et lui dit : « Donnez-moi quelques timbres à 0,20 euros, dix fois autant de timbres à 0,10 euros et le reste en timbres à 0,50 euros. ». Combien Jean reçoit-il de timbres ?

(A) 51 (B) 63 (C) 72 (D) 27
(E) Les données ne déterminent pas le nombre de timbres.

323. e04 D7 Dans 20 ans, ton âge sera le carré de ton âge actuel. Quel âge as-tu ?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

324. d04 D17 À cet examen, noté sur 20, André a eu plus de 10, Bernard a obtenu moins de 10 et leurs deux notes sont des nombres entiers. Si on soustrait à leurs deux notes le tiers de la plus petite, le reste de la plus grande vaudra trois fois le reste de la plus petite. Que vaut la somme des notes obtenues par André et Bernard ?

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 22

325. d04 D23 Quels que soient les réels x et y, l'égalité $(x+y)^n = x^n + nxy + y^n$ est vraie

(A) Pour tout naturel n ;

(B) Pour la seule valeur 2 du naturel n ;

(C) Pour les trois valeurs 0, 1 et 2 du naturel n ;

(D) Pour les deux valeurs 0 et 1 du naturel n ;

(E) Pour les deux valeurs 1 et 2 du naturel n.

326. e04 D10 J'ai deux montres. L'une retarde de deux minutes par heure. L'autre avance d'une minute par heure. La première fois que je les ai regardées, elles indiquaient toutes les deux la même heure, mais la seconde fois, le même jour, celle qui avance indiquait une heure de plus que l'autre. Entre mes deux observations, combien de temps s'est-il écoulé ?

(A) 5 h (B) 10 h (C) 15 h (D) 20 h (E) 30 h

327. e04 D9 Si n est un multiple de 3, lequel parmi les nombres suivants n'est certainement pas multiple de 3 ?

(A) $2n+3$

(B) $9-n$

(C) $5n-1$

(D) $(n+9)(2n-3)$

(E) $7n^2+2n-12$

328. e03 D9 Combien y a-t-il de naturels n tels que $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ soit un entier ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) Plus de 1000

329. e03 D25 Si, pour tout réel x, $f(2x)=x^2-5$, que vaut $f(2)$?

(A) -4 (B) -3 (C) -1 (D) 1
(E) Il est impossible de calculer $f(2)$.

330. e05 D5 Si $\frac{3x+4}{6x+7}=\frac{x+1}{2x+3}$, alors $x=$

(A) $-\frac{5}{4}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{5}{4}$

331. e04 D26 Pour tous a, b réels, posons $a*b=a-ba+b$. Quelle est la solution de l'équation $14*x=-168$?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

332. d03 D2 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre de solutions de l'équation $x(x-1)=x$, d'inconnue réelle x ?

333. d03 D23 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2+\frac{1}{x^2}=2003^2+\frac{1}{2003^2}$?

334. d05 D11 Quel est le nombre de solutions (réelles) de l'équation $x^3+x^2+x+1=0$ d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

335. d05 D12 Combien existe-t-il de couples (x, y) de nombres entiers satisfaisant l'équation $|x^2-y^2|=3$?

(A) Aucun (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) Une infinité

336. Si $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z}$, alors $z =$
e03
D21

(A) $\dfrac{xy}{x-y}$ (B) $\dfrac{x-y}{xy}$ (C) $x-y$ (D) $\dfrac{xy}{y-x}$ (E) $\dfrac{y-x}{xy}$

337. Si $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur (au sens large) à x, l'ensemble des solutions de l'équation
d03
D16

$$\lfloor 2x \rfloor = 2003$$

est

(A) $\left[1001\,;\frac{2003}{2}\right[$;
(B) $\left[\frac{2003}{2}\,;1002\right[$;
(C) $\left[\frac{2003}{2}\,;1002\right]$;
(D) $\left]\frac{2003}{2}\,;1002\right]$;
(E) $\left]\frac{2003}{2}\,;1002\right[$.

338. Les nombres entiers a, b, c sont donnés par
e05
D27

$$a = 2^{5555},\ b = 3^{3333},\ c = 6^{2222}.$$

Laquelle des doubles inégalités ci-dessous est vraie ?

(A) $a < b < c$
(B) $a < c < b$
(C) $c < b < a$
(D) $b < c < a$
(E) $b < a < c$

339. Le nombre réel strictement positif x satisfait à $x^{-1} < x < \sqrt{2x}$. Alors x appartient à l'intervalle
e06
D29

(A) $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ (B) $\left[\frac{1}{2}\,;1\right[$ (C) $]0\,;2[$ (D) $]1\,;2[$ (E) $]2\,;+\infty[$

340. Pour quelles valeurs réelles de x la double inégalité
d03
D28

$$x < \frac{1}{x} < 1$$

est-elle satisfaite ?

(A) $x < -1$ (B) $x < 0$ (C) $0 < x < 1$ (D) $x > 1$
(E) Aucune

341. e03 D19

Si $-2 < x < 6$ et $-4 < y < -2$, alors $x^2 - y^2$ est strictement compris entre

(A) 12 et 20 ; (B) -16 et 32 ; (C) 0 et 20 ; (D) -4 et 20 ; (E) -12 et 32.

342. d04 D15

Soit

$$x = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{8}}}}}}}}.$$

Laquelle des inégalités suivantes est vérifiée ?

(A) $1x < 2$

(B) $2x < 3$

(C) $3x < 4$

(D) $4x < 5$

(E) $5x < 6$

343. d05 D10

À partir de quel naturel non nul n la somme de l'inverse de n et de l'inverse du successeur de n est-elle plus petite que $\frac{1}{2}$?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) Jamais

344. e04 D30

Les seuls réels ne satisfaisant pas l'inégalité $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x-2}$ sont

(A) Les réels x tels que $1x2$;

(B) 1 et 2 ;

(C) Tous les réels strictement supérieurs à 1 ;

(D) Tous les réels inférieurs à 2 ;

(E) Les réels supérieurs à 1 ou inférieurs à 2.

345. L'inégalité
d05
D21

$$|a-c||a-d|+|b-c|,$$

où a, b, c, d désignent des réels, est impliquée par

(A) $a < b$ et $c < d$;
(B) $a < c$;
(C) $b < d$;
(D) $c < a$;
(E) $d < b$.

346. *Sans réponse préformulée* — Une équipe de football comporte onze joueurs. L'âge moyen de cette équipe est de 22 ans. Voilà qu'au cours du match, un joueur se blesse et quitte le terrain. L'âge moyen des dix joueurs restants est alors 21 ans. Quel est, en années l'âge du joueur blessé ?
e04
D25

347. Notre école compte entre 1500 et 2000 élèves. Ceux-ci peuvent être répartis exactement en groupes de 18 élèves, ou de 24 élèves, ou de 28 élèves. Il est impossible de les répartir exactement en groupes de
d04
D6

(A) 12 élèves (B) 27 élèves (C) 36 élèves (D) 48 élèves (E) 63 élèves

348. *Sans réponse préformulée* — Combien de nombres naturels à deux chiffres sont égaux à la somme de leurs chiffres augmentée du produit de ceux-ci ?
e05
D7

349. Mon GSM me permet d'appeler mon ami Mathieu pour 0,25 euro par minute en heure creuse (h.c.) et 0,40 euro par minute en heure pleine (h.p.). Laquelle des possibilités suivantes est la moins chère ?
e06
D2

(A) Appeler 10 minutes en h.c. et 5 minutes en h.p.
(B) Appeler 12 minutes en h.p.
(C) Appeler 17 minutes en h.c.
(D) Appeler 5 minutes en h.c. et 8 minutes en h.p.
(E) Appeler 9 minutes en h.c. et 6 minutes en h.p.

350. e05 D30 Si x maçons mettent y jours pour bâtir z maisons, combien de jours mettront q maçons pour bâtir r maisons (en supposant que tous les maçons travaillent au même rythme et que toutes les maisons sont identiques) ?

(A) $\frac{qry}{xz}$ (B) $\frac{ryz}{qx}$ (C) $\frac{qz}{rxy}$ (D) $\frac{xyr}{qz}$ (E) $\frac{rz}{qxy}$

351. e06 D21 Parmi les affirmations suivantes, une seule est fausse. Laquelle ?

(A) La différence d'un carré parfait et d'un cube parfait est parfois un carré parfait.

(B) La somme de deux carrés parfaits est parfois un carré parfait.

(C) La somme de dix multiples de 2006 est toujours un multiple de 2006.

(D) Tout nombre qui est multiple de 12 et de 15 est multiple de 180.

(E) Quels que soient les nombres naturels a et b, si d est le pgcd de a et b, alors d^2 est le pgcd de a^2 et b^2.

352. e06 D26 Un code est formé de quatre chiffres *abcd* suivi de deux chiffres de contrôle xy. Le nombre xy est le reste de la division du nombre *abcd* par 97. Combien y a-t-il de codes de ce type si les deux derniers chiffres xy sont égaux à 08 ?

(A) 100 (B) 101 (C) 102 (D) 103 (E) 104

353. d03 D7 Dans une éponge gorgée d'eau, 80 % de la masse est de l'eau. Si une compression lui fait perdre 75 % de cette eau, quel pourcentage de la masse est encore de l'eau ?

(A) 5 % (B) 20 % (C) 25 % (D) 50 % (E) 60 %

354. d05 D18 *Sans réponse préformulée* — La moyenne de mes notes a été de 80% pour les trois premières interrogations de mathématique et de 60 % pour les neuf dernières (chacune des douze interrogations est notée sur 20). Quelle a été, en pourcentage, ma moyenne pour les douze interrogations ?

355. e06 D4 Les nombres entiers de 1 à 16 sont placés dans une grille comme montré ci-dessous

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

On ajoute 9 à tous les nombres de la première ligne, 6 à tous ceux de la deuxième ligne et 3 à tous ceux de la troisième ligne. Ensuite, on retranche 9 à tous les nombres de la première colonne, 6 à tous ceux de la deuxième colonne et 3 à tous ceux de la troisième colonne. Dans la nouvelle grille ainsi obtenue, la première colonne est

A	B	C	D	E
1	1	1	4	13
2	5	6	7	14
3	9	11	10	15
4	13	4	13	16

3.3 Géométrie

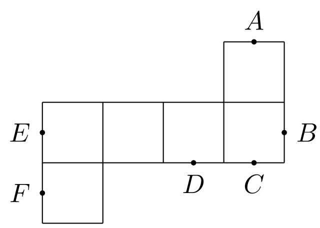
356. d03 D15 Les mesures des longueurs des côtés d'un triangle sont trois nombres entiers impairs. Dans ces conditions, ce triangle

- **(A)** N'est jamais équilatéral ;
- **(B)** N'est jamais isocèle ;
- **(C)** N'est jamais rectangle ;
- **(D)** A toujours un angle obtus ;
- **(E)** A toujours tous ses angles aigus.

357. e03 D16 Soit ABC un triangle, G son centre de gravité, H son orthocentre, I le centre de son cercle inscrit et O le centre de son cercle circonscrit. Sont toujours intérieurs au triangle ABC :

(A) I et G **(B)** G et H **(C)** H et I **(D)** I et O **(E)** O et H

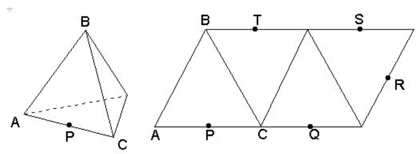
358. e03 D10 La figure ci-dessous montre le développement d'un cube ; les points A, B, C, D, E et F sont des milieux d'arêtes.



Lorsque le cube est construit, F coïncide avec

Ⓐ A ; Ⓑ B ; Ⓒ C ; Ⓓ D ; Ⓔ E.

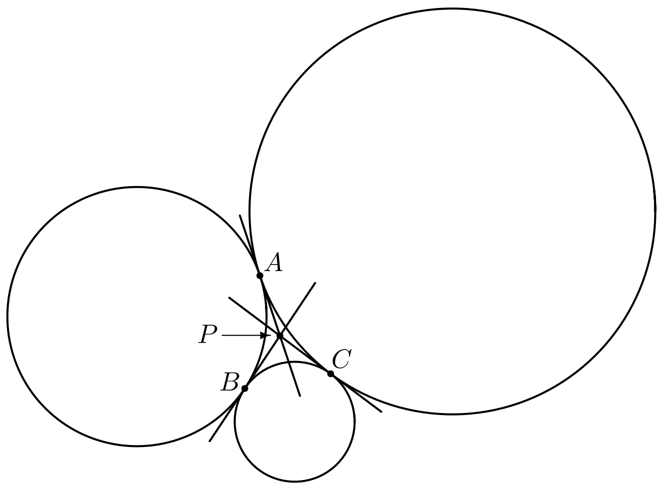
359. e05 D10 Voici un tétraèdre régulier et un de ses développements. Les points P, Q, R, S et T sont situés aux milieux des arêtes. À partir du développement, on reconstitue le tétraèdre. Quel est l'autre point du développement qui coïncide avec P ?



Ⓐ Q Ⓑ R Ⓒ S Ⓓ T

Ⓔ Un autre point que ceux proposés.

360. e03 D29 Trois cercles sont tangents deux à deux extérieurement. Les tangentes communes intérieures à deux de ces cercles se coupent en un même point P (cf. la figure ci-dessous).



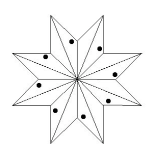
Alors, le triangle ABC dont les sommets sont les points de contact admet le point P comme

(A) Centre de gravité ;
(B) Centre de symétrie ;
(C) Orthocentre ;
(D) Centre du cercle circonscrit ;
(E) Centre du cercle inscrit.

361. e04 D29 Les deux médianes d'un rectangle non carré le partagent en quatre rectangles numérotés de 1 à 4 dans le sens horlogique. Combien d'isométries appliquent le rectangle 1 sur le rectangle 3 ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Une infinité

362. e04 D16 Dans le plan, combien d'axes de symétrie la figure suivante admet-elle ?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 8

363. e04 D18 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de rectangles d'aire 2004 cm^2 dont les dimensions sont des nombres entiers de centimètres ?

364. d04 D9 Un litre d'eau de mer contient 0,000 01 mg d'or. Combien de kilos d'or y a-t-il dans 1 km^3 d'eau de mer ?

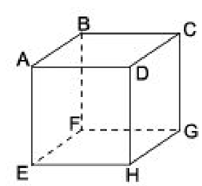
(A) 0,001 kg (B) 0,01 kg (C) 0,1 kg (D) 1 kg (E) 10 kg

365. d05 D14 *Sans réponse préformulée* — Une diagonale d'un polygone est tout segment de droite joignant un sommet du polygone à un autre sommet non adjacent. Un décagone est un polygone à 10 sommets. Combien y a-t-il de diagonales dans un décagone régulier ?

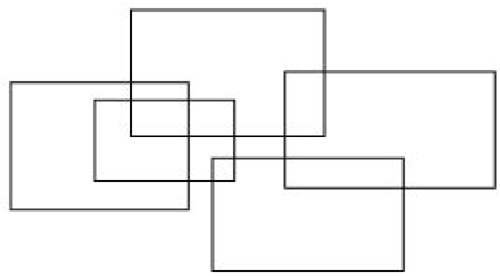
366. e05 D18 *Sans réponse préformulée* — Mathieu s'amuse à empiler des cubes en bois ; il en possède moins de 100. S'il fait des piles de 5 cubes, il utilise tous les cubes qu'il possède. Par contre, s'il fait des piles de 6 cubes ou des piles de 7 cubes, il lui reste à chaque fois 1 cube. Combien de cubes Mathieu possède-t-il ?

367. d04 D24 Du cube $ABCDEFGH$ (voir figure), on enlève les deux tétraèdres $ABDE$ et $CFGH$. Quel est le nombre d'arêtes du polyèdre restant ?

(A) 6 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 14

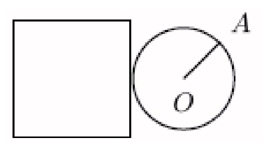


368. d04 D30 Cinq cartons sont posés sur une planche comme l'indique la figure ci--dessous. Ils doivent être fixés à la planche par des punaises dans les positions indiquées sans pouvoir tourner. Quel est le nombre minimum de punaises à utiliser ?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

369. d03 D24 Un cercle roule sans glisser sur les côtés d'un carré, extérieurement à celui-ci (v. la figure imprécise ci-contre). Si le périmètre du carré vaut la longueur du cercle, combien de fois le rayon $[OA]$ aura-t-il tourné autour du point O lorsque le cercle reviendra à sa position initiale ?



(A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) 2,5 (E) 3

370. e03 D15 Combien y a-t-il de points équidistants d'un cercle et de deux droites parallèles, tangentes à ce cercle ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Plus de 1000

371. d04 D21 Un disque opaque de rayon 5 est placé sur une grille infinie formée de carreaux de côté 1 et a son centre en un sommet de cette grille. Combien de carreaux sont entièrement recouverts par ce disque ?

(A) 64 (B) 60 (C) 50 (D) 56 (E) 62

372. De 6 h à 12 h, la petite aiguille d'une montre balaye un angle de 180°.
e04 Pendant ce balayage, combien de fois a-t-elle été perpendiculaire à la
D22 grande aiguille ?

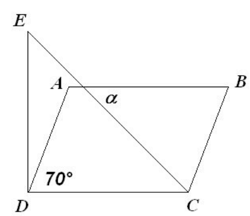
(A) 5 (B) 11 (C) 12 (D) 24 (E) Plus de 60 fois

373. *Sans réponse préformulée* — Trois villages A, B, C sont situés aux som-
d04 mets d'un triangle rectangle en B, avec $|AB| = 20$ km et $|BC| = 15$ km.
D3 Pour aller de A en C en voiture, il faut passer par B et la vitesse moyenne possible est 50 km/h. Un chemin accessible en vélo permet d'aller directement de A à C sans passer par B. La vitesse moyenne de ce trajet en vélo est 20 km/h. Combien de minutes en plus prend le trajet en vélo par rapport à la durée du trajet en voiture ?

374. Dans le triangle ABC, $|AB| = 26$, $|BC| = 28$ et $|AC| = 30$. Si M est le
e04 milieu de $[AB]$ et H est le pied de la hauteur abaissée de A, alors $|HM| =$
D27

(A) 12 (B) 12,5 (C) 13 (D) 13,5 (E) 14

375. *Sans réponse préformulée* — Dans le pa-
d06 rallélogramme $ABCD$, l'amplitude de l'angle
D4 $\widehat{ADC}$ vaut 70°. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle α sachant que le triangle CDE est rectangle isocèle ?



376. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est de longueur a et les côtés de
d05 l'angle droit sont de longueurs b et c. Le rayon du cercle inscrit dans ce
D20 triangle vaut

(A) $\dfrac{a-b+c}{2}$; (D) $\dfrac{2a-b-c}{2}$;

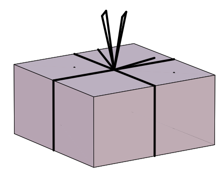
(B) $\dfrac{a+b-c}{2}$; (E) $\dfrac{a+b+c}{4}$.

(C) $\dfrac{-a+b+c}{2}$;

377. e06 D15 Un rectangle R est partagé par deux traits en quatre rectangles d'aires respectives 24 cm^2, 45 cm^2, 64 cm^2 et 120 cm^2. Les dimensions des quatre petits rectangles sont des nombres entiers. Quel est, en centimètres, le périmètre du rectangle R ?

(A) 34 (B) 56 (C) 68 (D) 253 (E) Il manque une donnée.

378. e03 D6 Une boite à gâteau a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée de 24 cm de côté ; sa hauteur est de 12 cm. Elle est entourée d'une ficelle comme le montre la figure ci-contre. Quelle est la longueur de cette ficelle (en centimètres) sachant qu'il faut 20 cm rien que pour le nœud ?



(A) 116 (B) 124 (C) 140 (D) 144 (E) 164

379. d05 D6 *Sans réponse préformulée* — Dans un trapèze, la longueur de la plus grande base vaut 97 et la longueur du segment joignant les milieux des diagonales vaut 3. Quelle est la longueur de l'autre base ?

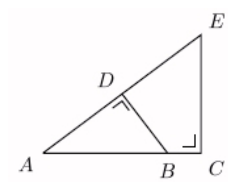
380. e05 D16 Une échelle possède deux versants de 4 mètres chacun. Ces deux versants sont écartés de manière à ce que le sommet de l'échelle soit à 2 mètres du sol. Si on diminue de moitié l'écartement entre les pieds, quelle est alors la hauteur du sommet de l'échelle ?

(A) 2,5 m (B) 3 m (C) $\sqrt{10}$ m (D) $\sqrt{13}$ m (E) $\sqrt{15}$ m

381. e03 D14 Les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent 4 cm et 9 cm. Quelle est alors la longueur, exprimée en centimètres, des diagonales du carré qui a même aire que ce triangle ?

(A) $\frac{9}{2}$ (B) $\frac{16}{3}$ (C) 6 (D) $\frac{20}{3}$ (E) $\frac{17}{2}$

382. d03 D19 Les côtés $[CA]$ et $[CE]$ d'un triangle CAE, rectangle en C, mesurent respectivement 8 et 6. Un point B situé sur le côté $[AC]$ a pour projeté orthogonal sur l'hypoténuse un point D tel que $|AD| = 5$. Quelle est la mesure du segment $[DB]$?



(A) $\frac{9}{4}$ (B) 3 (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{9}{2}$ (E) $\frac{21}{4}$

383. e03 D23 Dans un triangle ABC, les médianes $[AM]$ et $[BN]$ sont perpendiculaires et mesurent respectivement 12 cm et 9 cm. La distance entre leur point d'intersection et la droite AB, mesurée en centimètres, vaut

(A) $3 + \sqrt{3}$; (B) 4,75 ; (C) 4,80 ; (D) $2 + 2\sqrt{2}$; (E) $2\sqrt{6}$.

384. d05 D30 Les médianes issues des sommets des angles aigus d'un triangle rectangle mesurent $\sqrt{20}$ et $\sqrt{40}$. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{40}+1}{2}$ (D) $\sqrt{20} + 2$

(E) Une autre valeur

385. d06 D6 *Sans réponse préformulée* — Dans un cube, un sommet, une arête contenant ce sommet et une face contenant cette arête forment un drapeau. Combien un cube comporte-t-il de drapeaux ?

386. e03 D27 Quelle longueur minimale peut avoir la diagonale d'un rectangle dont le prérimètre mesure 20 cm ?

(A) 5 cm (B) $\sqrt{10}$ cm (C) $2\sqrt{5}$ cm (D) $5\sqrt{2}$ cm (E) 10 cm

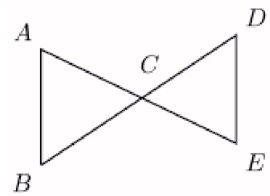
387. e05 D22 Un rectangle est inscrit dans un cercle de rayon R. Quelle est la longueur du côté du losange qui a pour sommets les milieux des côtés de ce rectangle ?

(A) $\sqrt{R^2 - 1}$ (B) $\sqrt{R^2 + 1}$ (C) R (D) $2R\frac{\sqrt{3}}{3}$

(E) Cette longueur dépend des dimensions du rectangle.

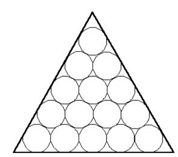
388. d03 D9

Sans réponse préformulée — Sur la figure ci-contre aux dimensions inexactes, les droites AB et DE sont parallèles et les droites AE et BD se coupent en C. Si les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[DE]$ ont respectivement pour mesures 80, 72 et 60, quelle est la mesure du segment $[BD]$?



389. e05 D29

Quinze billes de billard, toutes de rayon 1, sont placées dans un cadre en forme de triangle équilatéral. Ces billes sont, comme le montre la figure ci-contre, soit tangentes entre elles, soit tangentes au cadre. Quelle est la longueur du côté du cadre ?



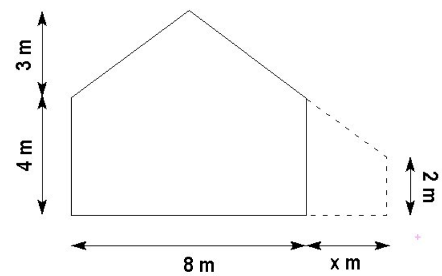
(A) $2\sqrt{3}+8$ (B) $3\sqrt{2}+8$ (C) $8\sqrt{2}+3$ (D) $8\sqrt{3}+2$ (E) $8\sqrt{6}$

390. d03 D8

Pour peindre une ligne blanche de 10 cm de large et de 2 mm d'épaisseur, une entreprise a utilisé 5 futs de 50 litres de peinture. Quelle est la longueur de la ligne ainsi peinte ?

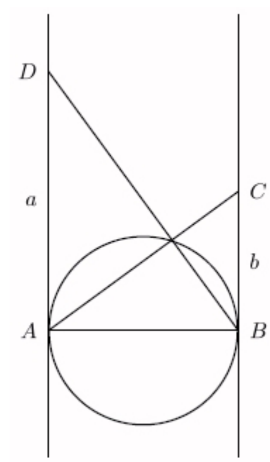
(A) 1,25 km (B) 2,5 km (C) 3,125 km (D) 6,25 km (E) 12,5 km

391. e05 D17 Le profil d'une maison possède un axe de symétrie et est représenté sur la figure ci-dessous en traits pleins. On souhaite agrandir cette maison en lui ajoutant une petite remise (représentée en traits discontinus). Le toit de la remise est dans le prolongement de celui de la maison. Quelle doit être la largeur x de la remise, compte tenu des mesures indiquées sur la figure ?



(A) $\frac{7}{3}$ m (B) $\frac{12}{5}$ m (C) $\frac{5}{2}$ m (D) $\frac{8}{3}$ m (E) 3 m

392. d03 D25 Les droites AD et BC sont tangentes à un cercle de diamètre $[AB]$; de plus, les droites AC et BD se coupent en un point de ce cercle. Si $|AD| = a$ et $|BC| = b$, alors le diamètre de ce cercle a toujours pour mesure

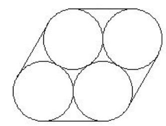


(A) $\sqrt{ab}$;
(B) $\dfrac{a+b}{2}$;
(C) $2|a-b|$;
(D) $\dfrac{ab}{a+b}$;
(E) $\dfrac{ab}{2(a+b)}$.

393. d04 D18 C est un cercle de rayon 1 et C_1, C_2 et C_3 sont trois cercles tangents extérieurement deux à deux et tangents intérieurement à C. Si C_1 et C_2 sont de rayon $\frac{1}{2}$, quel est le rayon de C_3 ?

(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\dfrac{3}{10}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{2}{5}$ (E) $\sqrt{2}-1$

394. e04 D20 Des tuyaux cylindriques de diamètre extérieur égal à 20 cm sont ficelés au plus serré comme indiqué sur la figure. Quelle est, en centimètres, la longueur de la ficelle (hors nœuds) ?

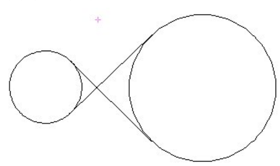


(A) 100 (B) $100+10\pi$ (C) $40+20\pi$ (D) $80+20\pi$ (E) $80+40\pi$

395. d06 D7 Que vaut l'aire du trapèze dont les côtés mesurent 13, 13, 13 et 3 ?

(A) 58,5 (B) 68 (C) 96 (D) 104 (E) 169

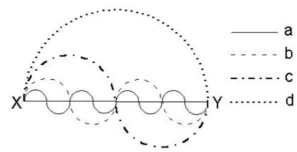
396. e05 D28 Deux roues de rayons r et $2r$ sont reliées par une courroie. À l'endroit où elles se croisent, les branches de la courroie sont perpendiculaires. Quelle est la longueur de cette courroie ?



(A) $3\pi r+6r$ (B) $3\pi r+12r$ (C) $4\pi r+6r$ (D) $\frac{9}{2}\pi r+6r$

(E) Cela dépend de la distance des centres des deux cercles.

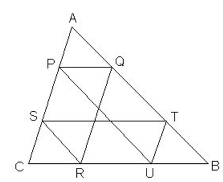
397. e04 D19 Sur le segment $[XY]$, on a construit des demi-cercles juxtaposés.



Les différents parcours **a**, **b**, **c**, **d** sont tels que

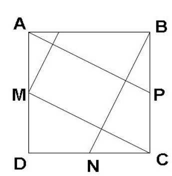
(A) **a** est le plus long ;
(B) **d** est le plus court ;
(C) **a**, **b**, **c** et **d** sont de même longueur ;
(D) **b** est plus long que **a** ;
(E) **b** est plus court que **a**.

398. d04 D8 Dans un triangle ABC, on choisit un point P sur $[AC]$, mais pas au milieu de $[AC]$, puis on trace les segments $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$, $[ST]$, $[TU]$ et $[UP]$ parallèlement aux côtés du triangle. Quel que soit le choix du point P, la longueur du circuit $PQRSTUP$ est



(A) Toujours égale au périmètre du triangle ABC ;
(B) Constante et toujours plus petite que le périmètre du triangle ABC ;
(C) Constante et toujours plus grande que le périmètre du triangle ABC ;
(D) Variable, dépendant de P, mais proportionnelle au périmètre du triangle ABC ;
(E) Indépendante du périmètre du triangle ABC.

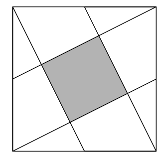
399. e06 D30 Dans le carré $ABCD$ de côté 1 ci-contre, le point M est le milieu du côté $[AD]$. La droite BN est perpendiculaire à la droite MC, la droite AP est perpendiculaire à la droite BN et par M on mène la perpendiculaire à la droite AP. Que vaut l'aire du rectangle intérieur ?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{9}{20}$

400. e03 D8

Sur la figure ci-contre, le carré ombré est obtenu en joignant chaque sommet du grand carré au milieu de l'un des côtés de celui-ci. Si l'aire du carré ombré est égale à 1, que vaut celle du grand carré ?



(A) 5 (B) $\frac{14}{3}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{40}{9}$ (E) 4

401. e03 D12

Si P et Q sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$ d'un rectangle $ABCD$, alors le rapport de l'aire du triangle PQD à celle du triangle ABC est égal à

(A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{3}{8}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{5}{8}$; (E) $\frac{3}{4}$.

402. e06 D25

Un triangle équilatéral d'aire T et un hexagone régulier d'aire H ont même périmètre. En pourcentage de T, H dépasse T de

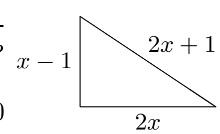
(A) 18 % (B) 30 % (C) 50 % (D) 60 % (E) 73 %

403. d03 D21

Sans réponse préformulée — Neuf droites parallèles à un côté d'un triangle divisent chacun des deux autres côtés en dix parties de même longueur et divisent la surface du triangle en dix parties. Si l'aire de la plus grande de ces dix parties a pour mesure 38, quelle est la mesure de l'aire du triangle ?

404. e04 D23

Que vaut l'aire du triangle rectangle représenté ci-contre, où x est un nombre réel strictement positif ?

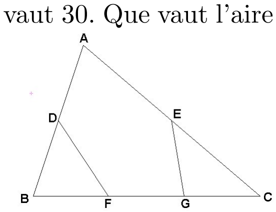


(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 30 (E) 60

405. d06 D12 Un cercle est tangent à deux demi-droites issues d'un même point et faisant entre elles un angle de 120°. Le segment reliant les deux points de contact

(A) Comprend toujours le centre du cercle ;
(B) A la même longueur que le diamètre du cercle ;
(C) A la même longueur que le rayon du cercle ;
(D) A la même longueur que le quart de la circonférence ;
(E) A la même longueur que le sixième de la circonférence.

406. e06 D27 Dans le triangle ABC, les points D et E sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$, et les points F, G sont tels que $|BF| = |FG| = |GC|$. L'aire du triangle ABC vaut 30. Que vaut l'aire du pentagone $ADFGE$?

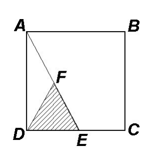


(A) 15 (B) $\frac{40}{3}$ (C) 20 (D) $\frac{104}{5}$ (E) 22

407. e05 D23 Les triangles ABC et DEF sont tels que $|AB| = |AC| = |DE| = |DF|$. L'angle de sommet A du triangle ABC mesure 60° et l'angle de sommet D du triangle DEF mesure 150°. Les aires respectives des triangles ABC et DEF sont notées a et b. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

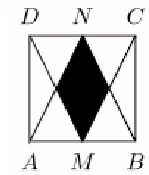
(A) $a = b$ (B) $a = b\sqrt{2}$ (C) $a = b\sqrt{3}$ (D) $a = 2b$ (E) $a = b\sqrt{5}$

408. d05 D2 Les côtés du carré $ABCD$ ont 1 cm de longueur. Le point E est le milieu de $[DC]$ et le point F est le milieu de $[AE]$. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire du triangle DEF ?



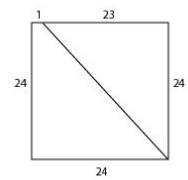
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{9}$

409. d03 D3 Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré ; M et N sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[CD]$. Le rapport de l'aire de la partie ombrée à celle de la partie non ombrée du carré vaut



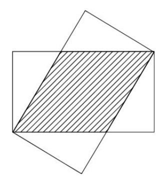
A $\frac{1}{5}$; **B** $\frac{1}{4}$; **C** $\frac{1}{3}$; **D** $\frac{1}{2}$; **E** 1.

410. e05 D12 Que vaut la différence des aires des deux parties du carré de côté 24, telles qu'elles sont représentées par la figure ci-contre ?



A 2 **B** 12 **C** $\frac{25}{2}$ **D** 23 **E** 24

411. d05 D29 Deux rectangles de mêmes dimensions sont placés comme l'indique la figure. Leur largeur est 3 cm et leur longueur est 7 cm. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de la surface hachurée ?



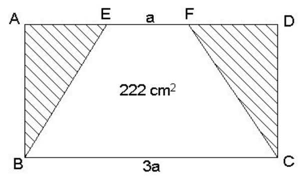
A $\frac{87}{7}$ **B** $\frac{29}{7}$ **C** $\frac{20}{7}$ **D** $\frac{21}{2}$ **E** Une autre valeur

412. d04 D29 *Sans réponse préformulée* — Parmi les triangles déterminés dans un trapèze par ses diagonales, deux n'ont pas de côté commun avec les bases du trapèze. Si la somme des aires de ces deux triangles est 18, si la grande base du trapèze mesure 6 et si la petite base mesure 2, quelle est l'aire totale du trapèze ?

413. e03 D26 Les diagonales d'un trapèze se coupent perpendiculairement ; de plus, sa grande base et sa hauteur mesurent respectivement 6 cm et 4 cm. Quelle est la mesure de son aire, exprimée en centimètres carrés ?

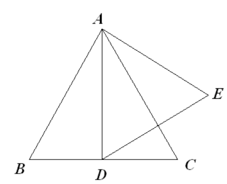
A 16 **B** 17 **C** $\frac{52}{3}$ **D** 18 **E** $\frac{63}{4}$

414. d04 D1 $ABCD$ est un rectangle, $|BC| = 3a$ et $|EF| = a$. L'aire du trapèze $BCFE$ est 222 cm^2. Que vaut, en centimètres carrés, la somme des aires des triangles ABE et CDF ?



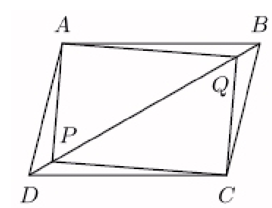
(A) 74 (B) 111 (C) 444 (D) 666
(E) Les données sont insuffisantes pour répondre.

415. d06 D16 Dans le triangle équilatéral ABC, le pied de la hauteur issue de A est D. Le symétrique de D par rapport à la droite AC est le point E. Quel est le rapport de l'aire du triangle ADE à celle du triangle ABC ?



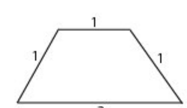
(A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{18}{25}$

416. d03 D29 Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du parallélogramme $ABCD$ mesurent respectivement 10 cm et 12 cm et forment un angle de 60°. Quelle est la mesure de l'aire (en centimètres carrés) du rectangle $APCQ$ dont les sommets P et Q appartiennent à $[BD]$?



(A) $15\sqrt{3}$ (B) 30 (C) 36 (D) $25\sqrt{3}$ (E) $36\sqrt{3}$

417. e05 D8 Que vaut l'aire du trapèze isocèle représenté ci--contre ?



(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) 2

418. e03 D13 Dans un triangle ABC, les bissectrices intérieures issues des sommets B et C forment un angle de 100°. Que vaut l'angle de sommet A de ce triangle ?

(A) 15° (B) 20° (C) 25° (D) 30° (E) 40°

419. e03 D24 *Sans réponse préformulée* — Dans un triangle acutangle (triangle dont tous les angles sont aigus), le plus petit des trois angles vaut le sixième du plus grand ; de plus, la mesure en degrés de chacun des angles du triangle est un nombre entier. Quelle est alors la mesure (en degrés) de la somme des deux plus grands de ces angles ?

420. d05 D4 On considère tous les angles de tous les triangles isocèles ayant un angle de 30°. Quelle est, en degrés, l'amplitude du plus grand de ces angles ?

(A) 60 (B) 75 (C) 90 (D) 105 (E) 120

421. d05 D13 *Sans réponse préformulée* — Le triangle ABC est tel que $|AB| = |AC|$ et $\widehat{BAC} = 40°$. Un point O est situé à l'intérieur du triangle et $\widehat{OBC} = \widehat{OCA}$. Quelle est la mesure en degrés de l'amplitude de l'angle $\widehat{BOC}$?

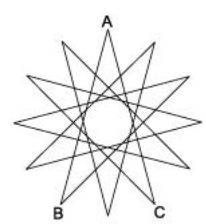
422. e06 D11 Quelle est l'amplitude de l'angle aigu d'un trapèze rectangle dont la grande base mesure 8 cm, la hauteur 4 cm et l'aire 24 cm^2 ?

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 72° (E) 75°

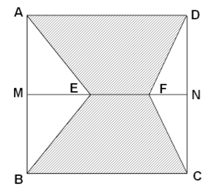
423. d05 D5 Un quadrilatère convexe dont deux côtés adjacents et les deux diagonales ont tous quatre la même longueur a un angle de 60° et nécessairement un autre angle de

(A) 45° ; (B) 75° ; (C) 90° ; (D) 120° ; (E) 150°.

424. d04 D13 *Sans réponse préformulée* — En degrés, quelle est la mesure (comprise entre 0 et 179) de l'angle $\widehat{BAC}$ formé par deux côtés consécutifs BA et AC du dodécagone étoilé régulier représenté ci-contre ?

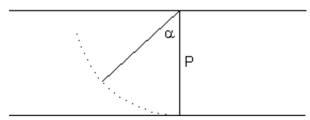


425. d06 D17 Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 120. Les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ sont M et N. Sur la médiane MN, on place deux points E et F. L'aire du polygone $AEBCFD$ ombré vaut les trois cinquièmes de l'aire du carré. Quelle est la longueur de EF ?



(A) 24 (B) 48 (C) 60 (D) 72 (E) 84

426. e04 D21 Dans ce couloir de 2 mètres de large, on glisse sur ses pieds une table carrée de 1 mètre de large.



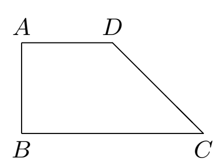
Quel est le plus petit angle α dont on doit faire tourner la porte P pour que la table puisse passer sans la toucher ?

(A) 10° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 90°

427. e05 D24 Dans le triangle ABC, nous avons $\widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 30°$. Un point D situé sur $[AC]$ est tel que $|AD| = |AB|$. La mesure en degrés de l'angle $\widehat{CBD}$ est

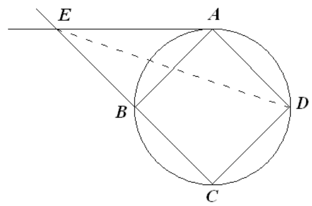
(A) 12 ; (B) 15 ; (C) 17 ; (D) 21 ; (E) 23.

428. e04 D13 Dans le trapèze rectangle $ABCD$ ci-contre, $|AB| = |AD|$ et $|BC| = 2|AD|$. L'amplitude de l'angle $\widehat{ADC}$ est



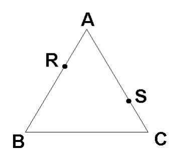
(A) 120° (B) 125° (C) 130° (D) 135° (E) 140°

429. d06 D21 Le carré $ABCD$ est inscrit dans un cercle de rayon 1. La tangente au cercle au point A coupe la droite BC en E. Quelle est la longueur du segment $[ED]$?

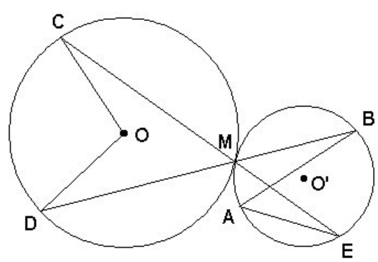


(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 3 (D) $\sqrt{10}$ (E) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

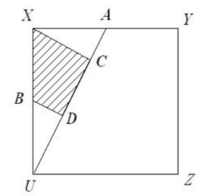
430. e06 D20 *Sans réponse préformulée* — Sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle équilatéral ABC, sont placés deux points R et S tels que $|AR| = \frac{1}{3}|AB|$ et $|AS| = \frac{2}{3}|AC|$. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{ARS}$?



431. e05 D13 *Sans réponse préformulée* — Les deux cercles représentés ci-dessous sont tangents au point M. L'amplitude de l'angle $\widehat{BAE}$ est de 27°. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle aigu $\widehat{COD}$?

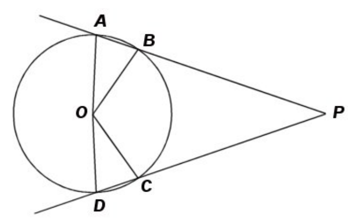


432. d06 D23 Dans le carré $XYZU$ de côté 10, A est le milieu de $[XY]$, B est le milieu de $[XU]$, XC et BD sont perpendiculaires à AU. Que vaut l'aire du quadrilatère $XBDC$?

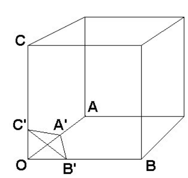


Ⓐ 12,5 Ⓑ $6\sqrt{5}$ Ⓒ 15 Ⓓ $7\sqrt{5}$ Ⓔ 17,5

433. d05 D26 *Sans réponse préformulée* — Dans ce cercle de centre O et de rayon 1, les arcs consécutifs AB, BC et CD mesurent respectivement $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{9}$. Les droites AB et CD se coupent en P. Quelle est, en degrés, la mesure de l'angle $\widehat{APD}$?



434. d05 D15 *Sans réponse préformulée* — Dans un cube d'arête 1, on place sur les trois arêtes $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ respectivement les points A', B', C' tels que $|OA'| = \frac{1}{2}$, $|OB'| = \frac{1}{3}$ et $|OC'| = \frac{1}{4}$, comme indiqué sur la figure. Que vaut le rapport du volume du cube au volume de la pyramide $OA'B'C'$?

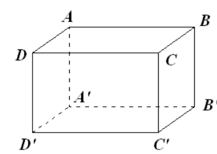


435. e05 D25 Cinq balles de ping-pong sont présentées dans un étui de forme cylindrique. Elles sont superposées de manière à être tangentes entre elles et tangentes à la surface latérale de l'étui ; en outre, chacune des deux balles extrêmes est tangente à une base. Que vaut le rapport du volume total des balles au volume intérieur de l'étui ?

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{\pi}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$

(E) Les données sont insuffisantes pour le dire.

436. d06 D26 La face $ABCD$ du parallélipipède rectangle $ABCDA'B'C'D'$ est un carré et $|AB| = 2|AA'|$. On considère les trois angles $\widehat{ACB'}$, $\widehat{BC'D}$, $\widehat{CD'A'}$. Quelle est la proposition correcte ? Parmi ces trois angles,



(A) Seul $\widehat{ACB'}$ est droit ;

(B) Seul $\widehat{BC'D}$ est droit ;

(C) Seul $\widehat{CD'A'}$ est droit ;

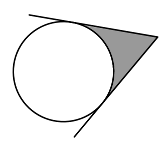
(D) Seuls $\widehat{BC'D}$ et $\widehat{CD'A'}$ sont droits ;

(E) Seuls $\widehat{ACB'}$ et $\widehat{CD'A'}$ sont droits.

437. d05 D28 Dans un demi-cercle de rayon r, on inscrit le triangle qui a la plus grande aire possible. Que vaut cette aire ?

(A) $\frac{1}{2}r^2$ (B) r^2 (C) r^3 (D) $2r^2$ (E) $\sqrt{2}r^2$

438. e03 D20 Les tangentes issues d'un point extérieur à un cercle de rayon 3 font entre elles un angle de 60° (voir la figure ci--contre). Quelle est l'aire de la surface ombrée, comprise entre le cercle et ces tangentes ?



(A) $9 - \pi$

(B) $9\sqrt{3} - 3\pi$

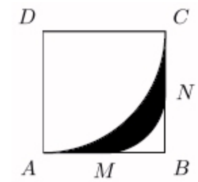
(C) $\pi + 3 + \sqrt{3}$

(D) $\pi + 3\sqrt{3}$

(E) $9\left(\pi - \sqrt{3}\right)$

439. d03 D11

Dans le carré $ABCD$ de côté 1 représenté ci-contre, M et N sont les milieux de $[AB]$ et de $[BC]$; les arcs de cercle AC et MN sont tangents aux côtés $[AB]$ et $[BC]$. Quelle est la mesure de l'aire de la surface ombrée ?

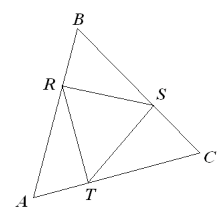


(A) $\frac{\pi-3}{4}$ (B) $\frac{4-\pi}{8}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{3(4-\pi)}{16}$ (E) $\frac{1}{6}$

440. d06 D27

Les points R, S et T appartiennent aux côtés du triangle équilatéral ABC, et sont tels que $|AR| = 2|RB|$, $|BS| = 2|SC|$ et $|CT| = 2|TA|$. Que vaut le rapport de l'aire du triangle RST à l'aire du triangle ABC ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{5}{18}$ (D) $\frac{3}{10}$ (E) $\frac{4}{9}$



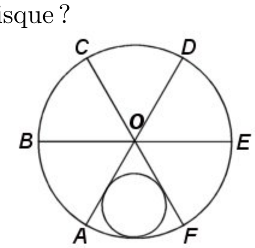
441. d03 D5

Le rapport de l'aire du cercle circonscrit à un carré à l'aire du cercle inscrit dans ce carré est égal à

(A) $\sqrt{2}$; (B) 2 ; (C) $\sqrt{3}$; (D) $2\sqrt{2}$; (E) $2\sqrt{3}$.

442. d05 D27

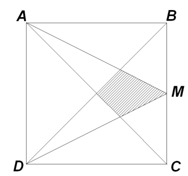
Sans réponse préformulée — $ABCDEF$ est un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre O. Le petit cercle est tangent au grand cercle et tangent aux droites OA et OF. Que vaut le rapport de l'aire du grand disque à celle du petit disque ?



443. d03 D17 Deux cercles concentriques sont situés dans le même plan ; le rayon de l'un vaut le double de celui de l'autre et l'aire de la couronne limitée par ces cercles vaut 7. Que vaut l'aire intérieure au plus petit des deux cercles ?

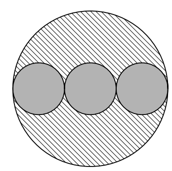
(A) $\frac{7}{4}$ **(B)** $\frac{7}{3}$ **(C)** $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}$ **(D)** $\frac{\pi\sqrt{7}}{3}$ **(E)** $\frac{22}{7}$

444. d06 D28 Le côté du carré $ABCD$ vaut 1 et M est le milieu de $[BC]$. Que vaut l'aire de la zone hachurée limitée par les droites AM, AC, DM et DB ?



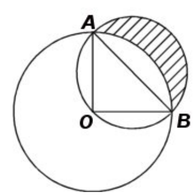
(A) $\frac{1}{18}$ **(B)** $\frac{1}{15}$ **(C)** $\frac{1}{12}$ **(D)** $\frac{1}{8}$ **(E)** $\frac{1}{6}$

445. e03 D11 Sur la figure ci-contre, les trois cercles ombrés ont le même rayon et leurs centres appartiennent à un même diamètre du grand cercle ; de plus, les deux petits cercles latéraux sont tangents au cercle central et au grand cercle. Quel est le rapport de l'aire de la surface ombrée à celle de la surface hachurée ?



(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{5}{9}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** 1

446. d05 D24 L'hypoténuse $[AB]$ du triangle rectangle isocèle OAB est le diamètre du petit cercle ; O est le centre du grand cercle et $|OA| = |OB|$ son rayon. Si $|OA| = 1$, quelle est l'aire de la lunule hachurée ?

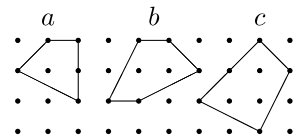


(A) $\frac{\pi}{2}$ **(B)** $\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{\pi}{8}$

447. d05 D17 Un losange de côté 6 possède un angle intérieur de 60°. Que vaut l'aire du cercle inscrit dans ce losange ?

(A) $3\pi\sqrt{3}$ **(B)** 9π **(C)** 6π **(D)** $\frac{27}{4}\pi$ **(E)** $\frac{5}{4}\pi\sqrt{3}$

448. e03 D5 Les sommets des polygones représentés sur la figure ci-dessous sont pris parmi ceux d'un quadrillage à mailles carrées de côté 1. Les aires de ces polygones sont respectivement a, b et c.



(A) $b = 6$ (B) $c = 6$ (C) $a + b = 6$ (D) $b + c = 6$ (E) $a + c = 6$

3.4 Logique

449. e06 D3 La négation logique de la phrase « Tous les chats sont des animaux domestiques. » est

(A) « Tous les animaux domestiques sont des chats. » ;
(B) « Aucun chat n'est un animal domestique. » ;
(C) « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal domestique. » ;
(D) « Il existe un animal domestique qui n'est pas un chat. » ;
(E) « Certains animaux domestiques sont des chats. ».

450. e04 D2 La négation logique de la phrase « Tous les chats sont des animaux carnivores. » est :

(A) « Tous les animaux carnivores sont des chats. » ;
(B) « Aucun chat n'est un animal carnivore. » ;
(C) « Il existe au moins un animal carnivore qui n'est pas un chat. » ;
(D) « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal carnivore. » ;
(E) « Toutes les souris sont des animaux carnivores. ».

451. e05 D6 Si certains professeurs sont des savants et si tous les savants sont des génies, alors on peut en déduire que

(A) Tous les génies sont des savants ;

(B) Certains professeurs sont des génies ;

(C) Certains professeurs ne sont pas des génies ;

(D) Il existe des génies qui ne sont pas des savants ;

(E) Les professeurs qui ne sont pas des savants, ne sont pas non plus des génies.

452. d06 D2 Quelle est la négation de la phrase « En Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un meurt des conséquences du tabagisme. » ?

(A) « En Belgique, chaque jour de l'année, personne ne meurt des conséquences du tabagisme. »

(B) « En Belgique, au moins un jour de l'année, personne ne meurt des conséquences du tabagisme. »

(C) « En Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un ne meurt pas des conséquences du tabagisme. »

(D) « Hors de Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un meurt des conséquences du tabagisme. »

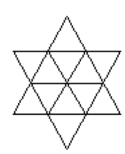
(E) Aucune des propositions précédentes.

3.5 Combinatoire & probabilités

453. d06 D19 Que vaut la somme des nombres naturels formés de quatre chiffres impairs différents ?

(A) 101 100 (B) 111 100 (C) 390 124 (D) 666 600 (E) 4 321 000

454. e05 D1 Combien de triangles de toutes tailles et de toutes orientations y a-t-il dans la figure ci-contre ?



(A) 12 (B) 14 (C) 18 (D) 20 (E) 24

455. e05 D26 *Sans réponse préformulée* — Dans l'ensemble des naturels consécutifs $\{1, 2, \ldots, 10\}$, je veux choisir un ensemble de trois nombres distincts dont la somme est multiple de 3. De combien de manières est-ce possible ?

456. e06 D17 *Sans réponse préformulée* — Dans une classe de 21 élèves, chaque élève a au moins un ami. À la salle d'informatique, devant un ordinateur, s'assoient soit un seul élève, soit deux élèves amis. Combien faut-il prévoir d'ordinateurs au minimum pour être certain que les 21 élèves pourront s'asseoir devant un ordinateur ?

457. e06 D24 Les élèves d'une même classe échangent leurs photos : chacun donne une de ses photos à chacun des autres élèves. Au total, 870 photos sont ainsi échangées. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

(A) 20 (B) 25 (C) 27 (D) 30 (E) 32

458. d03 D30 *Sans réponse préformulée* — De combien de manières 78 peut-il se mettre sous la forme d'une somme d'au moins deux nombres entiers consécutifs, dans laquelle les termes sont rangés dans l'ordre croissant ?

3.6 Problèmes & divers

459. d03 D1 Aux États-Unis, Wyre est à 12 km au sud de Piddle et Morton est à 12 km à l'est de Piddle. Par rapport à Wyre, Morton se trouve

(A) Au nord-est ;
(B) Au sud-est ;
(C) Au sud-ouest ;
(D) À l'ouest ;
(E) Au nord-ouest.

460. e03 D30 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre entier N à trois chiffres différents, si la somme de tous les nombres à deux chiffres formés avec deux chiffres distincts de N vaut le double de N ?

461. e06 D14 Le guide d'un groupe de touristes récolte l'argent pour une excursion. S'il demande à chacun 75 euros, il manque 440 euros au total exigé ; s'il demande à chacun 80 euros, il y a un excès de 440 euros. Combien y a-t-il de personnes dans le groupe ? (Le guide ne fait pas partie du groupe.)

(A) 88 (B) 176 (C) 220 (D) 440 (E) 501

462. e06 D22 Deux bateaux se croisent en mer, l'un se dirigeant vers le sud, l'autre vers l'ouest. Deux heures plus tard, les bateaux sont distants de 60 km. Sachant que la vitesse de l'un des bateaux est supérieure de 6 km/h à celle de l'autre, quelle est, en kilomètres par heure, la vitesse du bateau le plus lent ?

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

463. e04 D12 *Sans réponse préformulée* — Un chat vide un bol de lait en 2 minutes ; un chaton vide le même bol en 3 minutes. En combien de temps (exprimé en secondes) le chat et le chaton videront-ils le bol s'ils s'y mettent ensemble ?

464. d03 D26 *Sans réponse préformulée* — Un livre a 250 pages numérotées de 1 à 250. Combien de fois le chiffre 2 a-t-il été utilisé pour numéroter ces pages ?

465. d06 D15 *Sans réponse préformulée* — Le nombre 98 est la somme de trois nombres. Le plus petit de ces nombres vaut la moitié du deuxième nombre et le quart du troisième. Que vaut le plus grand de ces trois nombres ?

466. e04 D24 Depuis la nuit des temps, une mouche immortelle se promène sur les arêtes d'un cube sans jamais faire demi-tour. Lorsqu'elle arrive en un sommet, elle repart par la seule arête qui n'est pas coplanaire avec les deux dernières arêtes parcourues. À l'heure actuelle, elle a déjà parcouru plusieurs fois les mêmes arêtes. Combien d'arêtes du cube cette mouche n'a-t-elle jamais parcourues ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

467. e06 D28 *Sans réponse préformulée* — Le questionnaire de l'OMB comporte 30 questions. Une bonne réponse rapporte 5 points, une abstention rapporte 2 points et une réponse fausse aucun point. Quel est le nombre de scores possibles ?

468. e03 D17 Le tableau ci-dessous comporte 2003 lignes, composées uniquement avec les nombres 2 et -2. Chaque ligne compte un élément de plus que la précédente, commence par un 2, puis alterne les 2 et les -2.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 2 & & & & \\
 & & & 2 & & -2 & & & \\
 & & 2 & & -2 & & 2 & & \\
 & 2 & & -2 & & 2 & & -2 & \\
2 & & -2 & & 2 & & -2 & & 2 \\
 & \dots & & & \dots & & & \dots &
\end{array}$$

Quelle est la somme des nombres qui remplissent le tableau ?

(A) 0 (B) 2 (C) 2002 (D) 2004 (E) 4004

469. e04 D1 Un mot M contient un mot N si la seule suppression de certaines lettres de M donne N (par exemple $GABADEDDEG$ contient $AADDG$ mais ne contient pas AGA). Quelle est la longueur d'un plus petit mot contenant à la fois $ABCD, BCDA$ et $BADC$?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

470. d06 D20 *Sans réponse préformulée* — Jean fait plusieurs sachets de bonbons à partir d'un gros paquet de 100 bonbons. Il met dans chaque sachet le même nombre de bonbons et il lui reste alors dans le paquet quelques bonbons en nombre inférieur au nombre de sachets. Pour vider le sachet, il ajoute alors un bonbon supplémentaire dans certains sachets. Sachant que quinze sachets n'ont pas reçu de bonbon supplémentaire, combien Jean a-t-il fait de sachets ?

471. e04 D6 1000 litres d'eau de mer abandonnent par évaporation 32 kg de sel. Quel est, au minimum, le nombre de mètres cubes d'eau de mer à faire évaporer pour obtenir une tonne de sel ?

(A) 16 (B) 31 (C) 32 (D) 34 (E) 110

472. d03 D6 Arpèges-les-Gammes (238 473 habitants) compte 6 accordeurs de piano qui y travaillent à temps plein depuis longtemps. Selon les renseignements recueillis, chaque accordeur de piano accorde un piano par jour et travaille 200 jours par an ; en moyenne, chaque piano est accordé une fois tous les quatre ans. Sur base de toutes ces données, il est raisonnable de conclure qu'en moyenne, à Arpèges-les-Gammes, il y a approximativement un piano pour

(A) 25 habitants ;
(B) 50 habitants ;
(C) 100 habitants ;
(D) 250 habitants ;
(E) 800 habitants.

473. e06 D12 Selon le compteur placé à l'entrée, 75 personnes sont entrées hier dans ce magasin. Les relevés faits aux caisses indiquent que l'on a vendu ce jour-là 12 GSM, 18 jeux vidéo et 24 CD. Vingt des clients ont acheté exactement deux articles : six d'entre eux ont acheté un GSM et un jeu vidéo, quatre ont acheté un GSM et un CD et dix ont acheté un jeu vidéo et un CD. Un seul client a acheté trois articles différents. Les autres acheteurs n'ont pris qu'un seul article. Combien de personnes sont sorties sans achat ?

(A) 21 (B) 32 (C) 33 (D) 43
(E) Personne n'est sorti sans rien acheter.

474. e05 D14 Au même moment, Jean et Paul partent tous deux à vélo pour effectuer le même trajet aller et retour de 120 km au total. La vitesse de Jean est de 4 km/h inférieure à celle de Paul. Paul parcourt les 60 km de l'aller, fait demi-tour et croise Jean (le temps mis pour faire demi-tour est négligeable). À ce moment, Paul doit encore parcourir 48 km pour achever le trajet de retour. Quelle est, en kilomètres par heure, la vitesse de Jean ?

(A) 8 (B) 12 (C) 24 (D) 32 (E) 48

475. d06 D22 *Sans réponse préformulée* — Dix couples se rencontrent lors d'une soirée et se saluent en se serrant la main. Chaque personne serre une seule fois la main de chaque autre personne, mais évidemment aucun mari ne serre la main de sa femme et aucune femme celle de son mari. Combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?

476. e03 D22 Pour arriver à l'heure à un rendez-vous, M. Lelièvre doit rouler à une vitesse moyenne de 60 km/h. S'il effectue la première moitié du trajet à la vitesse moyenne de 40 km/h, quelle devra être la vitesse moyenne de M. Lelièvre sur la seconde moitié du trajet pour être au rendez-vous à l'heure convenue ?

(A) 120 km/h (B) 100 km/h (C) 90 km/h (D) 80 km/h

(E) Il manque des données pour pouvoir trouver cette vitesse moyenne.

477. d03 D27 Un cycliste monte une colline d'un kilomètre de long à une vitesse de 15 km/h. À quelle vitesse doit-il la redescendre s'il veut que sa vitesse moyenne soit de 30 km/h sur ces deux kilomètres ?

(A) 45 km/h

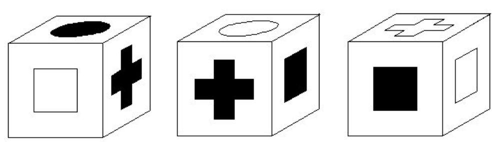
(B) 60 km/h

(C) 75 km/h

(D) Une vitesse strictement supérieure à 75 km/h

(E) Quelle que soit sa vitesse pour redescendre, il est impossible que sa vitesse moyenne soit de 30 km/h.

478. e06 D8 Voici trois vues d'un même cube :



Sur les faces de ce cube se trouvent les figures suivantes : disque blanc, disque noir, carré blanc, carré noir, croix blanche, croix noire. Quelle est la figure se trouvant sur la face opposée au disque noir ?

(A) Disque blanc

(B) Carré blanc

(C) Carré noir

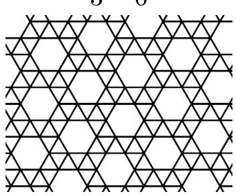
(D) Croix blanche

(E) Croix noire

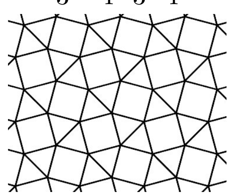
479. *Sans réponse préformulée* — Les examens de décembre et de juin sont
d06 notés sur 60 ; l'examen de décembre intervient pour un tiers et celui de
D30 juin pour deux tiers dans le résultat final qui est noté sur 20. Toutes les notes sont des nombres entiers, le résultat final est arrondi à l'entier le plus proche en forçant éventuellement un demi-point vers le haut. J'ai obtenu 24 sur 60 à l'examen de juin. Combien avais-je obtenu au minimum à l'examen de décembre sachant que mon résultat final est au moins 10 sur 20 ?

480. Un pavage du plan est un recouvrement complet du plan par un motif
d05 répétitif. Les pavages semi-réguliers sont ceux qui utilisent au moins deux
D19 types de polygones réguliers assemblés de sorte que deux d'entre eux ont en commun soit aucun point, soit un sommet de chacun d'eux, soit une arête de chacun d'eux. Voici trois « fragments » de pavage semi-régulier du plan ; ces pavages peuvent être décrits respectivement par les symboles

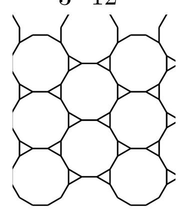
$3^4 \cdot 6$



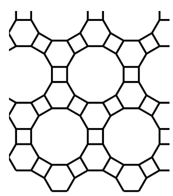
$3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$



$3 \cdot 12^2$



Quel est le symbole qui décrit de la même manière le pavage dont un fragment est représenté ci-dessous ?



(A) $3 \cdot 4 \cdot 6$ (B) $4 \cdot 6 \cdot 4$ (C) $4^6 \cdot 6^6 \cdot 12$ (D) $4^2 \cdot 6 \cdot 12$ (E) $4 \cdot 6 \cdot 12$

3.7 Table des réponses

D	e03	e04	e05	e06	d03	d04	d05	d06
01	E	C	D	A	A	B	668	B
02	13	D	A	C	2	420	D	B
03	D	B	B	C	C	33	C	A
04	B	B	D	A	D	A	E	45
05	C	D	A	A	B	A	E	231
06	E	C	B	D	B	D	91	48
07	625	A	9	D	D	C	D	C
08	A	C	A	C	A	A	A	D
09	E	C	B	B	126	E	C	B
10	C	D	A	64	A	162	C	B
11	B	59	E	B	D	B	B	E
12	E	72	E	D	22	E	D	C
13	B	D	54	A	E	30	110	E
14	C	C	A	B	D	28	35	E
15	D	A	B	C	C	A	144	56
16	A	A	D	E	B	E	E	D
17	D	E	D	20	B	D	D	A
18	A	6	85	B	7	C	65	A
19	B	C	D	D	C	E	E	D
20	B	D	D	90	C	D	C	23
21	D	D	B	D	200	B	A	D
22	A	B	C	D	A	283	A	180
23	C	D	C	A	4	B	D	C
24	166	C	B	D	C	D	C	5
25	A	32	C	C	A	E	E	E
26	C	E	42	E	106	255	40	C
27	D	C	E	C	E	B	9	B
28	C	D	D	145	A	D	B	C
29	D	D	A	D	D	48	A	A
30	198	A	D	C	7	B	B	38

Chapitre 4

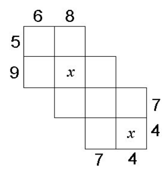
Éliminatoires et demi-finales maXi

4.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

X	e03	e04	e05	e06	d03	d04	d05	d06
01	507	668	482	665	517	564	518	666
02	567	685	656	649	524	667	698	571
03	574	510	672	568	628	692	570	582
04	581	511	589	712	651	525	670	492
05	565	530	497	514	623	500	613	607
06	553	634	697	696	542	505	481	486
07	617	702	483	498	503	689	695	650
08	688	714	648	494	529	526	501	516
09	594	694	699	671	532	711	603	491
10	484	658	590	686	620	690	527	546
11	523	550	703	625	495	513	540	499
12	533	531	659	522	661	687	485	573
13	710	707	560	631	528	551	536	547
14	630	638	558	691	535	680	632	569
15	600	597	512	554	577	675	541	506
16	544	718	681	683	654	593	580	693
17	539	719	636	664	556	677	549	490
18	706	627	655	614	642	504	619	604
19	647	709	713	674	552	575	612	637
20	720	508	626	559	717	576	587	566
21	555	496	640	622	676	538	588	615
22	708	704	657	562	643	487	537	679
23	646	596	644	584	700	618	557	662
24	705	663	515	502	608	616	599	521
25	645	578	592	488	653	715	586	561
26	609	701	520	579	641	509	602	601
27	519	624	591	621	716	606	652	548
28	635	660	493	534	684	545	585	489
29	678	633	682	583	543	639	629	611
30	595	605	598	673	572	669	610	563

4.2 Arithmétique & algèbre

481. d05 X6 Dans le tableau ci-dessous, les cases ne contiennent pas d'autres nombres que 1, 2, 3 ou 4. Les totaux des lignes sont indiqués à gauche ou à droite et ceux des colonnes sont indiqués au-dessus ou en dessous.



Les valeurs que peut prendre x sont

(A) 1 et 2 ; (B) 2 et 3 ; (C) 3 et 4 ; (D) 4 et 1 ;
(E) Aucune des réponses précédentes.

482. e05 X1 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre premier qui est la somme de trois nombres premiers distincts ?

483. e05 X7 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand nombre de deux chiffres qui est égal à deux fois le produit de ses chiffres ?

484. e03 X10 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre entier N à trois chiffres différents, si la somme de tous les nombres à deux chiffres formés avec deux chiffres distincts de N vaut le double de N ?

485. d05 X12 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit naturel de la forme n^2+n+1 qui est aussi la somme d'un carré parfait et d'un cube parfait, n étant un naturel non nul ?

486. d06 X6 Combien de nombres naturels non nuls ont, après leur division par 16, un reste égal au quotient ?

(A) 15 (B) 16 (C) 25 (D) 117 (E) 118

487. d04 X22 *Sans réponse préformulée* — Quel est le produit maximal que l'on peut former avec deux nombres naturels dont la différence des carrés égale 64 ?

488. e06 X25 Parmi les propositions suivantes, où x désigne un nombre réel, laquelle est fausse ?

(A) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$
(B) $x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$
(C) $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$
(D) $x^2 \neq 1 \Rightarrow x^4 \neq 1$
(E) $x^4 = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

489. d06 X28 Les nombres réels a, b, c vérifient les trois relations

$$a^3 + b^3 + c^3 = 25, \quad a + b + c = 2, \quad ab + bc + ca = -3.$$

Que vaut le produit abc ?

(A) -30 (B) $-\dfrac{1}{3}$ (C) $-\dfrac{6}{5}$ (D) $\dfrac{15}{8}$ (E) $\dfrac{40}{3}$

490. d06 X17 L'opération $*$ est définie dans l'ensemble des nombres réels par $a * b = (-a)^{-b}$. Que vaut $(-9) * (1 * 2)$?

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) 3 (D) 9 (E) -9

491. d06 X9 *Sans réponse préformulée* — Le nombre $N = a\underbrace{bb\dots b}_{9}a$ est composé de deux chiffres a et de neuf chiffres b. Que vaut le nombre dont l'écriture est bba sachant que N est divisible par 99 ?

492. d06 X4 *Sans réponse préformulée* — Quelle est la plus grande valeur de l'entier positif n tel que 25 est un diviseur de $n! + 1$ (rappelons que, pour $n \neq 0$, $n!$ est le produit de tous les entiers consécutifs de 1 jusque n) ?

493. e05 X28 Combien de polynomes p à coefficients réels sans terme constant vérifient, pour tout x réel, $p(x + 2) = p(x) + 2$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) Un nombre supérieur à 3 (E) Une infinité

494. e06 X8 Deux nombres naturels sont tels que le produit de leur somme par leur différence est égal à 97. Que vaut leur somme ?

(A) 11 (B) 19 (C) 23 (D) 37 (E) 97

495. d03 X11 Dans l'identité

$$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n},$$

quelle est la valeur de la somme $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$?

(A) 2^n (B) $2^n + 1$ (C) $\dfrac{3^n - 1}{2}$ (D) $\dfrac{3^n}{2}$ (E) $\dfrac{3^n + 1}{2}$

496. e04 X21 Si $f(x+1) = -8x^3 - 4x^2 - 2x + 12$, alors $f\left(\dfrac{x}{2}\right) =$

(A) $-x^3 + 5x^2 - 9x + 18$
(B) $-4x^3 - 2x^2 - x + 5$
(C) $-16x^3 - 8x^2 - 4x + 23$
(D) $-4x^3 - 2x^2 - x + \dfrac{13}{2}$
(E) $-16x^3 - 8x^2 - 4x + 20$

497. e05 X5 Combien de diviseurs positifs de 9^9 sont des cubes parfaits ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 18

498. e06 X7 *Sans réponse préformulée* — Combien de nombres entiers compris entre 100 et 999 inclus sont divisibles par 12 ?

499. d06 X11 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre maximum de nombres naturels qui divisent 2006 sans qu'aucun d'eux n'en divise un autre ?

500. d04 X5 *Sans réponse préformulée* — x et 72 ont pour plus grand commun diviseur 18 et pour plus petit commun multiple 648. Que vaut x ?

501. d05 X8 *Sans réponse préformulée* — Que vaut le nombre naturel n sachant que $53 + n$ est divisible par $18 + n$?

502. e06 X24 Le symbole $n!$ (où n est un nombre naturel non nul) désigne le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Quel est le nombre de diviseurs entiers positifs de $10!$?

(A) 17 (B) 40 (C) 180 (D) 210 (E) 270

503. d03 X7 *Sans réponse préformulée* — Quel est le reste de la division de 2^{2003} par 13 ?

504. d04 X18 Lorsqu'on divise un nombre n par 5, on trouve un reste égal à 3. Quel est le reste de la division de $18n$ par 15 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 6 (E) 9

505. d04 X6 L'inverse de la différence des cubes d'un demi et d'un tiers vaut

(A) $\frac{1}{216}$ (B) $\frac{19}{216}$ (C) 1 (D) $\frac{216}{19}$ (E) 216

506. d06 X15 *Sans réponse préformulée* — Quel est le chiffre des unités du nombre $3^{2006} - 2^{2006}$?

507. e03 X1 $0{,}02^3 - 0{,}003^2 =$

(A) 0 (B) 0,054 (C) 0,071 (D) 0,000 001 (E) −0,000 001

508. e04 X20 Cinq nombres entiers strictement positifs consécutifs sont tels que la somme des carrés des deux plus grands est égale à la somme des carrés des trois autres. Quelle est la somme des cinq nombres ?

(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 55 (E) 60

509. d04 X26 Quelle est la somme des chiffres du nombre $10^{2004} - 17$?

(A) 4515 (B) 2020 (C) 18 020 (D) 18 029 (E) 20 003

510. e04 X3 $2004^2 - 2 \times 2003^2 + 2002^2 =$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 2004

511. e04 X4 Les trois derniers chiffres à droite dans l'écriture décimale du nombre 5^{2004} sont

(A) 000 (B) 125 (C) 375 (D) 625 (E) 875

512. e05 X15 Le nombre réel positif non nul x est tel que $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 5$. Que vaut $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$?

(A) 0 (B) 1 (C) $2\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{5}$ (E) 10

513. d04 X11 *Sans réponse préformulée* — Combien de nombres naturels inférieurs à 10^3 sont à la fois le carré et le cube d'un nombre naturel ?

514. e06 X5 Si on calcule le produit $2^{2005} \times 5^{2006}$, on obtient un très grand nombre ; quelle est la somme de tous ses chiffres ?

(A) 5 (B) 7 (C) 32 (D) 3057 (E) 15 657

515. e05 X24 *Sans réponse préformulée* — Le nombre entier $2^{48}-1$ admet six diviseurs compris entre 50 et 100. Quelle est leur somme ?

516. d06 X8 $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{5}+\cdots+\dfrac{97}{5}+\dfrac{99}{5} =$

(A) 499 (B) $\dfrac{999}{2}$ (C) $\dfrac{2499}{5}$ (D) 500 (E) 990

517. d03 X1 *Sans réponse préformulée* — Que vaut l'inverse des $\dfrac{2}{3}$ de $\dfrac{1}{6}$?

518. d05 X1 Le naturel n étant strictement supérieur à 1, soit $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Que vaut $\dfrac{7!}{3!}\times\dfrac{2!}{5!}$?

(A) $\dfrac{72}{35}$ (B) $\dfrac{42}{5}$ (C) $\dfrac{14}{15}$ (D) $\dfrac{7}{20}$ (E) 14

519. e03 X27 Si a, b et c sont trois entiers naturels distincts et non nuls, alors la plus grande valeur possible de $\dfrac{a+b+c}{abc}$ est

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\dfrac{4}{3}$ (E) $\dfrac{3}{2}$

520. e05 X26

Soit a, b, c des nombres naturels tels que $7{,}3 = a + \dfrac{1}{b + \dfrac{1}{c}}$. Que vaut c ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 8

521. d06 X24

Pour combien de nombres naturels n la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ se simplifie-t-elle ?

(A) Aucun (B) 1 (C) 2 (D) 7 (E) Une infinité.

522. e06 X12

Deux fractions sont inverses l'une de l'autre. Le dénominateur de l'une des fractions est le triple de son numérateur. Quelle est la somme de ces deux fractions ?

(A) $\dfrac{10}{3}$ (B) $\dfrac{3}{10}$ (C) 1 (D) 4

(E) Cette somme est impossible à déterminer.

523. e03 X11

Dans l'ensemble des réels strictement positifs, si l'opérateur $\diamondsuit$ est défini par

$$a \diamondsuit b = \frac{a-b}{a+b},$$

quelle est la solution de l'équation $2 \diamondsuit x = -\dfrac{3}{5}$?

(A) -7 (B) $-\dfrac{3}{8}$ (C) $-\dfrac{3}{10}$ (D) 3 (E) 8

524. d03 X2

Si x et y sont des réels non nuls, l'expression

$$\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{y} + \frac{x^2-1}{y} \cdot \frac{y^2-1}{x}$$

est toujours égale à

(A) 1 ; (B) $2xy$; (C) $2(x^2y^2+1)$; (D) $2xy + \dfrac{2}{xy}$; (E) $\dfrac{2x}{y} + \dfrac{2y}{x}$.

525. d04 X4 *Sans réponse préformulée* — Quand un pot est rempli d'eau au cinquième de sa capacité, il pèse 500 g. Rempli aux quatre cinquièmes de sa capacité, il pèse 740 g. Que pèse, en grammes, le pot vide ?

526. d04 X8 $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} =$

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{6}$ (E) $2\sqrt{3}$

527. d05 X10 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre entier le plus proche de $100\left(12-\sqrt{143}\right)$?

528. d03 X13 Parmi les cinq équations suivantes :

$$\sqrt{x} = \sqrt{x}, \qquad \left(\sqrt{x}\right)^2 = 2\sqrt{x}, \qquad \left(\sqrt{x}\right)^3 = 3\sqrt{x},$$
$$\left(\sqrt{x}\right)^4 = 4\sqrt{x}, \qquad \left(\sqrt{x}\right)^5 = 5\sqrt{x},$$

combien y en a-t-il qui admettent au moins deux entiers naturels pour solutions ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

529. d03 X8 $\sqrt{9-4\sqrt{2}} =$

(A) $3-2\sqrt{2}$ (B) $3-2\sqrt{\sqrt{2}}$ (C) $2\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{7}$

(E) Un autre nombre que les précédents.

530. e04 X5 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 =$

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 6

531. e04 X12 Le nombre de solutions réelles de l'équation $x+\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ est

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

532. d03 X9

Soit $S = a^2 + b^2 + a^2b^2$ où a et b sont deux entiers consécutifs. Alors $\sqrt{S}$

(A) Est toujours un nombre impair ;
(B) Est toujours un nombre pair ;
(C) N'est pas toujours un nombre rationnel ;
(D) N'est jamais un entier ;
(E) Est toujours un nombre irrationnel.

533. e03 X12

Je choisis un nombre réel. De 8, je soustrais le double de ce nombre, puis je prends la racine carrée positive du résultat. J'obtiens alors le nombre initialement choisi. Pour combien de nombres réels cette coïncidence est--elle possible ?

(A) Un seul
(B) Exactement deux
(C) Exactement trois
(D) Exactement huit
(E) Une infinité de nombres

534. e06 X28

Quel est le nombre de solutions entières de l'équation $x^2+y^2 = 2006+z^2$?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) Une infinité

535. d03 X14

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2003^2 + \dfrac{1}{2003^2}$?

536. d05 X13

Les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \neq 0$) sont inverses l'une de l'autre si et seulement si

(A) $a = c$ (B) $a = b$ (C) $a = bc$ (D) $b = c$ (E) $b^2 = ac$

537. d05 X22 Pour tous réels a, b, avec $a \neq 0$, l'équation $ax^2 + (a+b)x + b = 0$

(A) Admet exactement une racine réelle ;

(B) Admet soit une racine réelle, soit deux racines réelles ;

(C) N'admet aucune racine réelle ;

(D) Admet exactement deux racines réelles ;

(E) Admet la racine 1.

538. d04 X21 Les racines de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ sont aussi racines de l'équation $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5 = 0$. Quelle est la troisième racine de la deuxième équation ?

(A) $x = -\frac{1}{2}$ (B) $x = -1$ (C) $x = -5$ (D) $x = 1$

(E) Une autre valeur que celles proposées ci-dessus

539. e03 X17 Le nombre de solutions de l'équation $x^4 - x^2 = \sqrt{x^4} - \sqrt{x^2}$, d'inconnue réelle x, est

(A) 3 ; (B) 4 ; (C) 5 ; (D) 7 ; (E) 8.

540. d05 X11 Quel est le nombre de solutions (réelles) de l'équation $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

541. d05 X15 Combien existe-t-il de couples (x, y) de nombres entiers satisfaisant l'équation $|x^2 - y^2| = 3$?

(A) Aucun (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) Une infinité

542. d03 X6

Si $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur (au sens large) à x, l'ensemble des solutions de l'équation

$$\lfloor 2x \rfloor = 2003$$

est

(A) $\left[1001\,;\frac{2003}{2}\right[$;

(B) $\left[\frac{2003}{2}\,;1002\right[$;

(C) $\left[\frac{2003}{2}\,;1002\right]$;

(D) $\left]\frac{2003}{2}\,;1002\right]$;

(E) $\left]\frac{2003}{2}\,;1002\right[$.

543. d03 X29

Si $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ et $0! = 1$, combien l'équation d'inconnue $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k! = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)!$$

admet-elle de solutions ?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) Au moins 3, mais pas une infinité.

(E) Une infinité.

544. e03 X16

Si la somme des coefficients d'un polynome à une seule variable est nulle, alors nécessairement

(A) Ce polynome n'a pas de racine positive ;

(B) Ce polynome n'a pas de racine négative ;

(C) Le nombre -1 est racine de ce polynome ;

(D) Le nombre 0 est racine de ce polynome ;

(E) Le nombre 1 est racine de ce polynome.

545. d04 X28

Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $\sin x = \dfrac{1}{x^{2004}}$?

(A) 0 (B) 4 (C) 8 (D) 16 (E) Une infinité

546. d06 X10 Parmi les encadrements suivants du nombre $p = 49\,000 \times 21\,000$, un seul est correct. Lequel ?

(A) $10^8 < p < 10^9$
(B) $10^9 < p < 10^{10}$
(C) $10^8 < p < 8 \cdot 10^8$
(D) $8 \cdot 10^8 < p < 9 \cdot 10^8$
(E) $10^{10} < p < 10^{11}$

547. d06 X13 Les nombres réels x, y sont tels que $0 < x < 1$ et $-1 < y < 0$. Quel est le plus grand des réels ci-dessous ?

(A) $x \cdot y$
(B) $x - y$
(C) $\dfrac{y}{x}$
(D) $\dfrac{x}{y}$
(E) $\dfrac{x-y}{x}$

548. d06 X27 Si l'équation $x^2 + bx + c = 0$ admet deux racines réelles strictement supérieures à 1, on a nécessairement

(A) $b + c = 0$;
(B) $b + c0$;
(C) $b + c < 1$;
(D) $b + c > -1$;
(E) $b = c$.

549. d05 X17 L'inégalité

$$|a - c||a - d| + |b - c|,$$

où a, b, c, d désignent des réels, est impliquée par

(A) $a < b$ et $c < d$;
(B) $a < c$;
(C) $b < d$;
(D) $c < a$;
(E) $d < b$.

550. e04 X11 Les nombres a, b, c sont définis par $a = 2^{3^4}$, $b = 3^{4^2}$ et $c = 4^{2^3}$. (REMARQUE : $x^{y^z} = x^{(y^z)}$.) On a toujours :

(A) $a < b < c$;
(B) $b < a < c$;
(C) $c < a < b$;
(D) $b < c < a$;
(E) $c < b < a$.

551. d04 X13 Soit

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5 + \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{8}}}}}}}}.$$

Laquelle des inégalités suivantes est vérifiée ?

(A) $1x < 2$
(B) $2x < 3$
(C) $3x < 4$
(D) $4x < 5$
(E) $5x < 6$

552. d03 X19 Pour quelles valeurs réelles de x la double inégalité

$$x < \frac{1}{x} < 1$$

est-elle satisfaite ?

(A) $x < -1$ (B) $x < 0$ (C) $0 < x < 1$ (D) $x > 1$
(E) Aucune

553. e03 X6 Si $-2 < x < 6$ et $-4 < y < -2$, alors $x^2 - y^2$ est strictement compris entre

(A) 12 et 20 ; (B) -16 et 32 ; (C) 0 et 20 ; (D) -4 et 20 ; (E) -12 et 32.

554. e06 X15 Le nombre réel strictement positif x satisfait à $x^{-1} < x < \sqrt{2x}$. Alors x appartient à l'intervalle

(A) $]\,0\,;\frac{1}{2}\,[$ (B) $[\,\frac{1}{2}\,;1\,[$ (C) $]\,0\,;2\,[$ (D) $]\,1\,;2\,[$ (E) $]\,2\,;+\infty\,[$

555. e03 X21 Si l'équation $x^2 + kx + 8 = 0$ (avec k réel) admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2, alors nécessairement

(A) $|x_1| > 3$ ou $|x_2| > 3$
(B) $|x_1| > 2$ ou $|x_2| > 2$
(C) $x_1 < 0$ ou $x_2 < 0$
(D) $|x_1 - x_2| < \sqrt{2}$
(E) $|x_1 + x_2| > 4\sqrt{2}$

556. d03 X17 Dans $\mathbf{R}^*$, l'inégalité $x > y$ implique nécessairement que

(A) $\sin x > \sin y$;
(B) $|x| > |y|$;
(C) $x^2 > y^2$;
(D) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$;
(E) $x^3 > y^3$.

557. d05 X23 Parmi ces doubles inégalités, quelle est celle qui est correcte ?

(A) $\sin 1 < \sin 2 < \sin 3$
(B) $\sin 1 < \sin 3 < \sin 2$
(C) $\sin 2 < \sin 1 < \sin 3$
(D) $\sin 2 < \sin 3 < \sin 1$
(E) $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

558. e05 X14 En remplaçant successivement n par 1, 2, 3, 4, ... dans l'expression $n^2 + 5n + 3$, on obtient une suite de nombres. Que vaut la différence entre les 999e et 998e termes de cette suite ?

(A) 1815 (B) 1848 (C) 1873 (D) 1907 (E) 2002

559. e06 X20 Une suite de nombres entiers satisfait à la règle suivante : la somme de trois termes consécutifs quelconques vaut toujours 15. Le second terme est 7 et le dixième est 5. Quel est le sixième terme de cette suite ?

(A) 3 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 22

560. e05 X13 Considérons les progressions arithmétiques limitées

$$3, 7, 11, 15, \ldots, 407$$

(de raison 4) et

$$2, 9, 16, 23, \ldots, 709$$

(de raison 7). Combien ont-elles de termes en commun ?

(A) 0 (B) 4 (C) 9 (D) 11 (E) 14

561. d06 X25 *Sans réponse préformulée* — La suite géométrique $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots)$ satisfait aux deux conditions :

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 31,$$
$$s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = 62.$$

Que vaut le dixième terme de cette suite ?

562. Une suite harmonique est une suite de réels non nuls $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ dont
e06
X22 les inverses forment la suite arithmétique $\left(\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}, \ldots\right)$.

Les deux premiers termes d'une suite harmonique sont 3 et 4. Que vaut la somme des quatre premiers termes de cette suite ?

(A) $\frac{5}{6}$ (B) 18 (C) 21 (D) 23 (E) 25

563. Il existe un nombre naturel m tel que pour tout nm, le plus grand des
d06
X30 cinq nombres

$$P = n^4 3^{-n},\ Q = n^5 - 7,\ R = n^4 2^{-n},\ S = n^3 2^n,\ T = 1000n^9 + 2005$$

est :

(A) P ; (B) Q ; (C) R ; (D) S ; (E) T.

564. Le nez de Pinocchio s'allonge lorsqu'il ment. Initialement, son nez mesu-
d04
X1 rait 3 cm. Sa longueur double à chaque mensonge. Quelle sera la longueur de son nez lorsqu'il aura menti 5 fois ?

(A) 15 cm (B) 30 cm (C) 48 cm (D) 96 cm (E) 192 cm

565. Le tableau ci-dessous comporte 2003 lignes, composées uniquement avec
e03
X5 les nombres 2 et -2. Chaque ligne compte un élément de plus que la précédente, commence par un 2, puis alterne les 2 et les -2.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 2 & & & & \\
 & & & 2 & & -2 & & & \\
 & & 2 & & -2 & & 2 & & \\
 & 2 & & -2 & & 2 & & -2 & \\
2 & & -2 & & 2 & & -2 & & 2 \\
 & \ldots & & & \ldots & & & \ldots &
\end{array}$$

Quelle est la somme des nombres qui remplissent le tableau ?

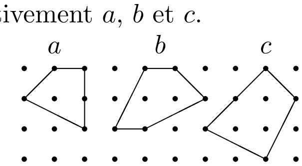
(A) 0 (B) 2 (C) 2002 (D) 2004 (E) 4004

566. Mathilde s'améliore. Ses trois notes de mathématique sont en progression géométrique. Sa moyenne arithmétique est de 9,15 sur 20 et l'écart entre sa première et sa troisième note est de 4,05 points. Si elle continue à s'améliorer dans les mêmes conditions, dans lequel des intervalles suivants se trouvera sa moyenne après sa quatrième interrogation (toutes les interrogations sont notées sur 20) ?
d06
X20

(A) [9 ; 9,5 [**(B)** [9,5 ; 10 [**(C)** [10 ; 10,5 [**(D)** [10,5 ; 11 [**(E)** [11 ; 11,5 [

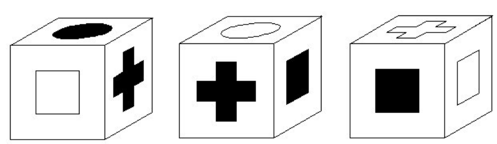
4.3 Géométrie & trigonométrie

567. Les sommets des polygones représentés sur la figure ci-dessous sont pris parmi ceux d'un quadrillage à mailles carrées de côté 1. Les aires de ces polygones sont respectivement a, b et c.
e03
X2



(A) $b = 6$ **(B)** $c = 6$ **(C)** $a + b = 6$ **(D)** $b + c = 6$ **(E)** $a + c = 6$

568. Voici trois vues d'un même cube :
e06
X3



Sur les faces de ce cube se trouvent les figures suivantes : disque blanc, disque noir, carré blanc, carré noir, croix blanche, croix noire. Quelle est la figure se trouvant sur la face opposée au disque noir ?

(A) Disque blanc
(B) Carré blanc
(C) Carré noir
(D) Croix blanche
(E) Croix noire

569. d06 X14 L'image d'une main gauche par une symétrie centrale de l'espace

- (A) Est certainement une main gauche ;
- (B) Est certainement une main droite ;
- (C) Est parfois une main gauche, parfois une main droite ;
- (D) Dépend de la position du centre de symétrie ;
- (E) N'est pas toujours une main.

570. d05 X3 Le clou auquel je désire accrocher un cadre ne peut pas dépasser du mur de plus d'un centimètre. Au départ, le clou mesure 3 cm. Chaque fois que je tape sur ce clou, il s'enfonce dans le mur d'un tiers de ce qui dépassait. Combien de fois, au minimum, dois-je frapper le clou ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 10

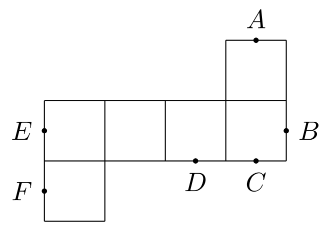
571. d06 X2 *Sans réponse préformulée* — Dans un cube, un sommet, une arête contenant ce sommet et une face contenant cette arête forment un drapeau. Combien un cube comporte-t-il de drapeaux ?

572. d03 X30 *Sans réponse préformulée* — Étant donné un carré, soit l'ensemble E dont les neuf éléments sont les quatre sommets, les milieux des côtés et le centre de ce carré. Combien y a-t-il de parties de E comprenant 4 éléments dont 3 quelconques ne sont jamais alignés ?

573. d06 X12 Le plus grand nombre de directions de droites déterminées par les paires de points d'un ensemble de dix points distincts du plan est

(A) 10 (B) 11 (C) 45 (D) 90 (E) Une infinité.

574. La figure ci-dessous montre le développement d'un cube ; les points A, B,
e03 C, D, E et F sont des milieux d'arêtes.
X3



Lorsque le cube est construit, F coïncide avec

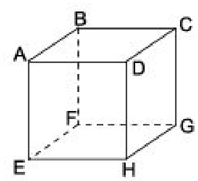
A A ; **B** B ; **C** C ; **D** D ; **E** E.

575. Un disque opaque de rayon 5 est placé sur une grille infinie formée de
d04 carreaux de côté 1 et a son centre en un sommet de cette grille. Combien
X19 de carreaux sont entièrement recouverts par ce disque ?

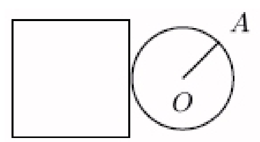
A 64 **B** 60 **C** 50 **D** 56 **E** 62

576. Du cube $ABCDEFGH$ (voir figure), on enlève les
d04 deux tétraèdres $ABDE$ et $CFGH$. Quel est le nombre
X20 d'arêtes du polyèdre restant ?

A 6 **B** 9 **C** 10 **D** 12 **E** 14



577. Un cercle roule sans glisser sur les côtés d'un
d03 carré, extérieurement à celui-ci (v. la figure
X15 imprécise ci-contre). Si le périmètre du carré vaut la longueur du cercle, combien de fois le rayon $[OA]$ aura-t-il tourné autour du point O lorsque le cercle reviendra à sa position initiale ?



A 1 **B** 1,5 **C** 2 **D** 2,5 **E** 3

578. Les deux médianes d'un rectangle non carré le partagent en quatre rec-
e04 tangles numérotés de 1 à 4 dans le sens horlogique. Combien d'isométries
X25 appliquent le rectangle 1 sur le rectangle 3 ?

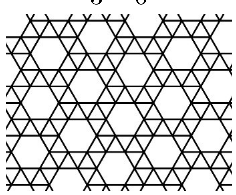
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** Une infinité

579. e06 X26 Une isométrie du plan applique le point $(1,4)$ sur le point $(-3,2)$ et aussi le point $(5,10)$ sur le point $(-9,6)$. Sur quel point envoie-t-elle le point $(3,7)$?

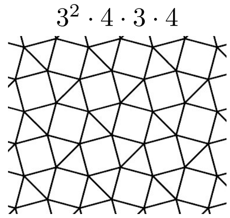
(A) $(-6,4)$ (B) $(4,6)$ (C) $(0,0)$ (D) $(-9,\frac{3}{2})$ (E) $(5,10)$

580. d05 X16 Un pavage du plan est un recouvrement complet du plan par un motif répétitif. Les pavages semi-réguliers sont ceux qui utilisent au moins deux types de polygones réguliers assemblés de sorte que deux d'entre eux ont en commun soit aucun point, soit un sommet de chacun d'eux, soit une arête de chacun d'eux. Voici trois « fragments » de pavage semi-régulier du plan ; ces pavages peuvent être décrits respectivement par les symboles

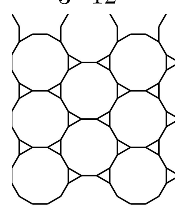
$3^4 \cdot 6$



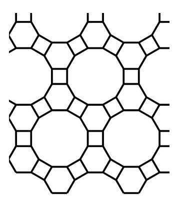
$3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$



$3 \cdot 12^2$



Quel est le symbole qui décrit de la même manière le pavage dont un fragment est représenté ci-dessous ?



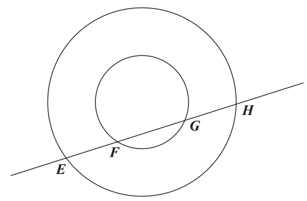
(A) $3 \cdot 4 \cdot 6$ (B) $4 \cdot 6 \cdot 4$ (C) $4^6 \cdot 6^6 \cdot 12$ (D) $4^2 \cdot 6 \cdot 12$ (E) $4 \cdot 6 \cdot 12$

581. e03 X4 Les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent 4 cm et 9 cm. Quelle est alors la longueur, exprimée en centimètres, des diagonales du carré qui a même aire que ce triangle ?

(A) $\dfrac{9}{2}$ (B) $\dfrac{16}{3}$ (C) 6 (D) $\dfrac{20}{3}$ (E) $\dfrac{17}{2}$

582. d06 X3

Dans la figure ci-dessous, les deux cercles ont le même centre et ont comme rayons r et $2r$. Les segments $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$ ont même longueur. En fonction de r, que vaut cette longueur ?



Ⓐ $\frac{3}{2}r$ Ⓑ $\frac{5}{4}r$ Ⓒ $\frac{\sqrt{5}}{2}r$ Ⓓ $\frac{\sqrt{6}}{2}r$ Ⓔ $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$

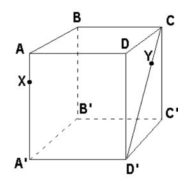
583. e06 X29

Un point P est intérieur au triangle ABC rectangle en A. On sait que $|PA| = 3$, $|PB| = 5$ et que $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA}$. Que vaut $|PC|$?

Ⓐ $\dfrac{63}{1+2\sqrt{2}}$ Ⓑ $\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}$ Ⓒ 16,5 Ⓓ 17 Ⓔ $10\sqrt{3}$

584. e06 X23

Dans le cube ci-contre, les points X et Y sont situés respectivement sur les segments $[AA']$ et $[CD']$ et tels que $|AX| = \frac{1}{4}|AA'|$ et $|CY| = \frac{1}{4}|CD'|$. Si la longueur du côté du cube est 1, quelle est la longueur du segment $[XY]$?



Ⓐ $\sqrt{2}$ Ⓑ $\dfrac{5}{4}$ Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{4}$ Ⓓ $\dfrac{3}{2}$ Ⓔ $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

585. d05 X28

Au milieu M du segment $[AB]$ de longueur a, on élève une perpendiculaire MR avec $|MR| = b$. On trace le cercle de centre R et de rayon $\dfrac{a}{2}$ qui coupe AB en T et Q. Alors $|AT|$ et $|TB|$ sont les racines de l'équation

Ⓐ $x^2 + ax + b^2 = 0$; Ⓓ $x^2 - ax - b^2 = 0$;

Ⓑ $x^2 + ax - b^2 = 0$; Ⓔ $x^2 - ax + b = 0$.

Ⓒ $x^2 - ax + b^2 = 0$;

586. d05 X25 Un point P est choisi arbitrairement à l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC. De P, on abaisse les perpendiculaires PD, PE et PF sur les trois côtés du triangle, les points D, E et F appartenant respectivement à BC, CA et AB. La somme $|PD| + |PE| + |PF|$

(A) Est constante et supérieure à la longueur de la hauteur du triangle ;

(B) Est constante et égale à la longueur de la hauteur du triangle ;

(C) Est constante et égale à la moitié de la somme des longueurs des médianes du triangle ;

(D) Varie et est minimale si le point P est l'orthocentre du triangle ;

(E) Varie et est maximale si le point choisi est l'orthocentre du triangle.

587. d05 X20 Les médianes issues des sommets des angles aigus d'un triangle rectangle mesurent $\sqrt{20}$ et $\sqrt{40}$. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{40}+1}{2}$ (D) $\sqrt{20}+2$

(E) Une autre valeur

588. d05 X21 Les côtés de l'angle droit d'un triangle ABC rectangle en C mesurent 3 et 4. Les points P et Q appartiennent à l'hypoténuse $[AB]$ et sont tels que $\widehat{ACP} = \widehat{PCQ} = \widehat{QCB}$. Quelle est la longueur du plus grand des segments $[CP]$ et $[CQ]$?

(A) $\dfrac{24+18\sqrt{3}}{25}$ (D) $\dfrac{72\sqrt{3}-96}{11}$

(B) $\dfrac{72\sqrt{3}-92}{13}$ (E) $\dfrac{20+18\sqrt{3}}{23}$

(C) 2

589. e05 X4 Dans le rectangle $ABCD$, les points M et N sont les milieux des côtés $[AD]$ et $[CD]$ respectivement. La droite AC coupe BM en P et coupe BN en Q. Si $|AB| = a$ et $|BC| = b$, alors $|PQ| =$

(A) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ (C) $\dfrac{a+b}{4}$ (D) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

(E) Une autre réponse que les précédentes.

590. e05 X10 Un rectangle est inscrit dans un cercle de rayon R. Quelle est la longueur du côté du losange qui a pour sommets les milieux des côtés de ce rectangle ?

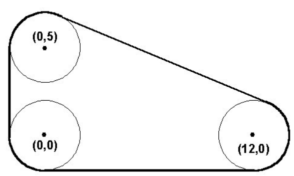
(A) $\sqrt{R^2-1}$ (B) $\sqrt{R^2+1}$ (C) R (D) $2R\frac{\sqrt{3}}{3}$

(E) Cette longueur dépend des dimensions du rectangle.

591. e05 X27 Les bases d'un trapèze mesurent 6 et 18. Les côtés non parallèles mesurent 8 et 12. Une droite parallèle aux deux bases du trapèze le divise en deux trapèzes de périmètres égaux. Quel est le rapport des distances de cette droite à la petite base et à la grande base ?

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{9}{6}$ (C) $\dfrac{4}{1}$ (D) $\dfrac{3}{1}$ (E) $\dfrac{6}{1}$

592. e05 X25 Les centres de trois cercles de rayon 2 sont situés aux points de coordonnées $(0,0)$, $(12,0)$, $(0,5)$ dans un repère orthonormé. Ces cercles représentent des poulies autour desquelles est fixée une courroie comme indiqué sur la figure. Quelle est la longueur de cette courroie ?



(A) $30+2\pi$ (B) $30+4\pi$ (C) $36+2\pi$ (D) $36-2\pi$ (E) $32+4\pi$

593. d04 X16 C est un cercle de rayon 1 et C_1, C_2 et C_3 sont trois cercles tangents extérieurement deux à deux et tangents intérieurement à C. Si C_1 et C_2 sont de rayon $\frac{1}{2}$, quel est le rayon de C_3 ?

(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\dfrac{3}{10}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{2}{5}$ (E) $\sqrt{2}-1$

594. e03 X9

Dans un triangle ABC, les médianes $[AM]$ et $[BN]$ sont perpendiculaires et mesurent respectivement 12 cm et 9 cm. La distance entre leur point d'intersection et la droite AB, mesurée en centimètres, vaut

(A) $3+\sqrt{3}$; (B) 4,75 ; (C) 4,80 ; (D) $2+2\sqrt{2}$; (E) $2\sqrt{6}$.

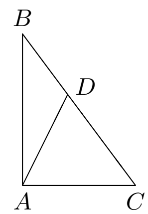
595. e03 X30

Les points D et E partagent l'hypoténuse $[BC]$ d'un triangle rectangle ABC en trois segments de même longueur. Si $[AD]$ et $[AE]$ mesurent respectivement 9 cm et 7 cm, alors l'hypoténuse mesure

(A) 14 cm (B) $6\sqrt{6}$ cm (C) 15 cm (D) $3\sqrt{26}$ cm (E) 16 cm

596. e04 X23

ABC est un triangle rectangle en A tel que $|AC| = 60$ et $|AB| = 80$. Le segment $[AD]$ divise le triangle ABC en deux triangles de même périmètre. Quelle est la longueur de $[AD]$?



(A) $\frac{20}{3}\sqrt{73}$ (B) 50 (C) 54,5 (D) $36\sqrt{2}$ (E) $24\sqrt{5}$

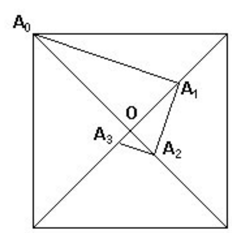
597. e04 X15

Deux barres parallèles sont longues de 10 m et écartées de 1 m ; leur épaisseur est négligeable. Quelle est, en mètres, la plus petite longueur d'une corde joignant deux de leurs extrémités comme indiqué sur la figure ci-contre (qui n'est pas à l'échelle) ?

(A) $\sqrt{109}$ (B) $\sqrt{112}$ (C) 11 (D) 12 (E) 13

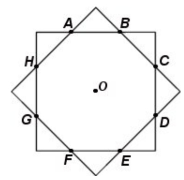
598. e05 X30

Dans le carré de côté 1 et de centre O représenté ci-contre, la ligne brisée $A_0A_1A_2A_3\ldots$ est telle que les points A_i sont tous situés sur une diagonale du carré et que, pour tout naturel i, $|OA_{i+1}| = \frac{1}{2}|OA_i|$. Que vaut la longueur de la ligne brisée ainsi formée ?



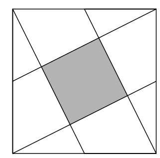
(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (E) $\sqrt{5}$

599. d05 X24 Les deux carrés ci-contre ont leurs côtés de longueur a, leur centre commun est O et l'un est l'image de l'autre par une rotation de centre O et d'angle 45°. Quel est le périmètre de l'octogone $ABCDEFGH$?



(A) $\dfrac{8a}{3}$ (B) $8a\sqrt{2} - 8a$ (C) $16a(\sqrt{2} - 1)$ (D) $\dfrac{8a\sqrt{2}}{3}$ (E) $2a\sqrt{2}$

600. e03 X15 Sur la figure ci-contre, le carré ombré est obtenu en joignant chaque sommet du grand carré au milieu de l'un des côtés de celui-ci. Quel est le rapport du périmètre du grand carré à celui du petit carré ?

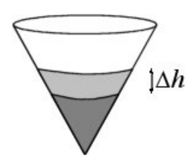


(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$ (E) $\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$

601. d06 X26 Dans le triangle ABC, $|BC| = a$, $|CA| = b$ et $|AB| = c$. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe BC en L et la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{C}$ coupe AB en M. Que vaut $\dfrac{|AM| \cdot |LB|}{|CL| \cdot |MB|}$?

(A) $\dfrac{c}{a}$ (B) $\dfrac{b^2}{ac}$ (C) $\dfrac{a^2}{bc}$ (D) 1 (E) Une autre valeur.

602. d05 X26 Deux liquides non miscibles A et B sont versés dans un récipient de forme conique. Le liquide A occupe 20 % du volume total du récipient, tandis que le liquide B en occupe 40 %. On désigne par Δh_1 la différence de hauteur entre les surfaces supérieures des deux liquides lorsque A est versé avant B et par Δh_2 cette différence de hauteur lorsque B est versé avant A. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?



(A) $\Delta h_1 < \Delta h_2$

(B) $\Delta h_1 = \Delta h_2$

(C) $\Delta h_2 < \Delta h_1 < 2\Delta h_2$

(D) $\Delta h_1 = 2\Delta h_2$

(E) $2\Delta h_2 < \Delta h_1 < 3\Delta h_2$

603. d05 X9 Le plan étant muni d'un repère orthonormé, les coordonnées des trois sommets d'un triangle sont des couples d'entiers. L'aire de ce triangle est

(A) Un nombre entier si le triangle est rectangle ;

(B) Un nombre irrationnel si la longueur d'un côté du triangle est irrationnelle ;

(C) Un nombre irrationnel si le rayon du cercle inscrit au triangle est irrationnel ;

(D) Un nombre rationnel ;

(E) Un nombre entier si le triangle est isocèle.

604. d06 X18 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère tous les triangles dont les trois sommets ont des coordonnées entières et on prend leur aire. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

(A) L'aire est toujours entière.

(B) Si chaque sommet a au moins une coordonnée paire, l'aire est entière.

(C) Si chaque sommet a au moins une coordonnée impaire, l'aire est un entier impair.

(D) Si chaque sommet a ses deux coordonnées paires, l'aire est un entier pair.

(E) Si chaque sommet a une abscisse paire, l'aire est un entier pair.

605. e04 X30 Soit un triangle ABC, un point D sur $[AC]$ et un point E sur $[BC]$ tels que DE soit parallèle à AB. Soit I le point d'intersection de AE et de BD. Si l'aire du triangle ABI vaut 9 et l'aire du triangle EDI vaut 6,25, alors l'aire du triangle ABC vaut

(A) 81 (B) 87 (C) 89,25 (D) 93,5 (E) 99

606. d04 X27 *Sans réponse préformulée* — Parmi les triangles déterminés dans un trapèze par ses diagonales, deux n'ont pas de côté commun avec les bases du trapèze. Si la somme des aires de ces deux triangles est 18, si la grande base du trapèze mesure 6 et si la petite base mesure 2, quelle est l'aire totale du trapèze ?

607. d06 X5 Que vaut l'aire du trapèze dont les côtés mesurent 13, 13, 13 et 3 ?

(A) 58,5 (B) 68 (C) 96 (D) 104 (E) 169

608. d03 X24 Dans un triangle ABC, M est le milieu de $[AC]$, D est le point du côté $[BC]$ tel que $2|BD| = |DC|$ et I le point d'intersection des droites AD et BM. Alors le rapport de l'aire du triangle BDI à l'aire du quadrilatère $IDCM$ est

(A) $\frac{1}{6}$; (B) $\frac{11}{60}$; (C) $\frac{1}{5}$; (D) $\frac{2}{9}$; (E) $\frac{1}{4}$.

609. e03 X26 Quelle est la mesure (en centimètres carrés) de l'aire du disque inscrit dans un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm ?

(A) $\frac{\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}$

(B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}$

(C) $\frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}$

(D) $\frac{\pi}{8}$

(E) $\frac{\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$

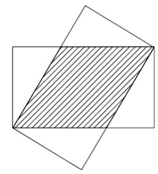
610. d05 X30 *Sans réponse préformulée* — L'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle en C mesure $\sqrt{360}$. Dans un repère orthonormé, les deux médianes issues des sommets A et B ont comme support les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = 2x$. Quelle est l'aire du triangle ?

611. d06 X29 Dans le triangle ABC, on a $|BC| = 5$, $|CA| = 6$ et $|AB| = 7$. Un losange est inscrit dans ce triangle, un des sommets du losange coïncide avec A et les trois autres sommets appartiennent aux côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Que vaut le rapport de l'aire du losange à l'aire du triangle ABC ?

(A) $\frac{6}{13}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{84}{169}$ (D) $\frac{7}{13}$ (E) $\frac{2}{3}$

612. d05 X19

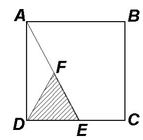
Deux rectangles de mêmes dimensions sont placés comme l'indique la figure. Leur largeur est 3 cm et leur longueur est 7 cm. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de la surface hachurée ?



(A) $\frac{87}{7}$ (B) $\frac{29}{7}$ (C) $\frac{20}{7}$ (D) $\frac{21}{2}$ (E) Une autre valeur

613. d05 X5

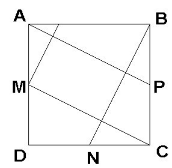
Les côtés du carré $ABCD$ ont 1 cm de longueur. Le point E est le milieu de $[DC]$ et le point F est le milieu de $[AE]$. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire du triangle DEF ?



(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{9}$

614. e06 X18

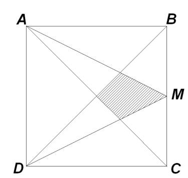
Dans le carré $ABCD$ de côté 1 ci-contre, le point M est le milieu du côté $[AD]$. La droite BN est perpendiculaire à la droite MC, la droite AP est perpendiculaire à la droite BN et par M on mène la perpendiculaire à la droite AP. Que vaut l'aire du rectangle intérieur ?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{9}{20}$

615. d06 X21

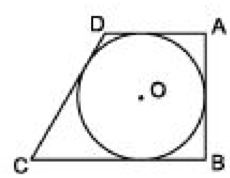
Le côté du carré $ABCD$ vaut 1 et M est le milieu de $[BC]$. Que vaut l'aire de la zone hachurée limitée par les droites AM, AC, DM et DB ?



(A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{6}$

616. d04 X24

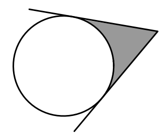
$ABCD$ est un trapèze rectangle circonscrit au cercle de centre O et rayon 2. Quelle est l'aire de ce trapèze sachant que $|AD| = 3$?



(A) 14,75 (B) 17,25 (C) 18 (D) 19,5 (E) 20

617. e03 X7

Les tangentes issues d'un point extérieur à un cercle de rayon 3 font entre elles un angle de 60° (voir la figure ci--contre). Quelle est l'aire de la surface ombrée, comprise entre le cercle et ces tangentes ?



(A) $9 - \pi$

(B) $9\sqrt{3} - 3\pi$

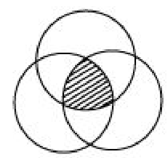
(C) $\pi + 3 + \sqrt{3}$

(D) $\pi + 3\sqrt{3}$

(E) $9\left(\pi - \sqrt{3}\right)$

618. d04 X23

Dans la figure ci-contre, les trois cercles sont de rayon R et deux quelconques d'entre eux passent par le centre du troisième. L'aire de la figure hachurée vaut :



(A) $\dfrac{\pi R^2}{3}$;

(B) $\dfrac{\pi R^2(\sqrt{3}-1)}{2}$;

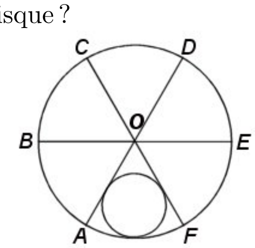
(C) $\dfrac{\pi R^2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2}$;

(D) $\dfrac{R^2(\pi-\sqrt{3})}{2}$;

(E) $\dfrac{R^2(\pi-\sqrt{6})}{2}$.

619. d05 X18

Sans réponse préformulée — $ABCDEF$ est un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre O. Le petit cercle est tangent au grand cercle et tangent aux droites OA et OF. Que vaut le rapport de l'aire du grand disque à celle du petit disque ?



620. La surface latérale d'un cône a pour développement un secteur circulaire
d03 (cf. la *figure 1*).
X10

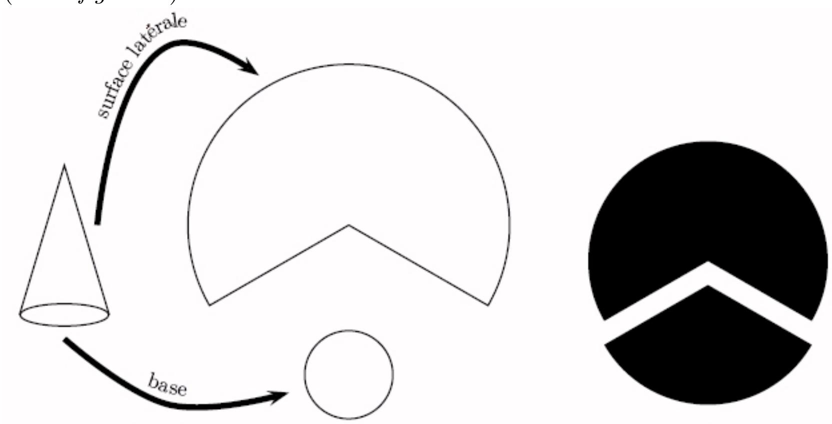
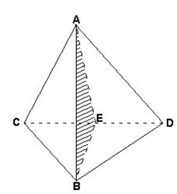


figure 1 *figure 2*

Si les secteurs circulaires obtenus en développant la surface latérale de deux cônes C_1 et C_2 sont deux parties complémentaires d'un même disque (cf. la *figure 2*), leurs aires valant respectivement le tiers et les deux tiers de l'aire de ce disque, alors le rapport des aires des bases de C_1 et de C_2 vaut

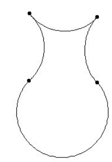
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{\pi}{6}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{2\pi}{9}$

621. La longueur du côté du tétraèdre régulier $ABCD$
e06 est a cm. Par la droite AB, on mène le plan qui par-
X27 tage le tétraèdre en deux pyramides de même volume. Ce plan coupe CD en E. Que vaut, en centimètres carrés, l'aire de la section ABE ?



(A) $\frac{a^2}{3}\sqrt{6}$ **(B)** $\frac{a^2}{4}\sqrt{2}$ **(C)** $\frac{2a^2}{3}$ **(D)** $\frac{3a^2}{16}\sqrt{3}$ **(E)** $\frac{4a^2}{3}$

622. e06 X21 Le dessin d'une carafe (voir ci-contre) est réalisé au moyen de 4 arcs de cercle. Ces cercles ont tous un rayon de 5 cm, ils sont tangents en leurs points communs et leurs centres sont les sommets d'un carré. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de la surface plane ainsi formée ?



(A) $\dfrac{175\pi}{4}$ (B) $25\pi + 25$ (C) $100 + \dfrac{75\pi}{4}$ (D) 100 (E) 50

623. d03 X5 Le tétraèdre $ABCD$ est tel que les arêtes gauches $[AB]$ et $[CD]$ sont perpendiculaires à l'arête $[AC]$. Si ces trois arêtes ont la même longueur a, quel est le volume du tétraèdre ?

(A) $\dfrac{a^3}{6}$ (B) $\dfrac{a^3}{3}$ (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

(E) Les données sont insuffisantes pour déterminer ce volume.

624. e04 X27 $ABCDE$ est un pentagone étoilé inscrit dans un cercle de diamètre $[DE]$. Alors

(A) $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} + \hat{E}$

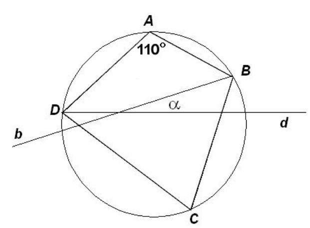
(B) $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} + \hat{E}$

(C) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$

(D) $\hat{A} + \hat{E} = \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}$

(E) $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$

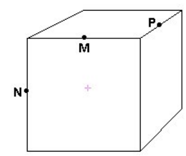
625. e06 X11 Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. L'angle $\widehat{DAB}$ mesure $110°$, la droite b est bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et la droite d est bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$. Quelle est, en degrés, la mesure de l'angle aigu α formé par les droites b et d ?



(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 23 (E) 25

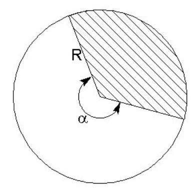
626. e05 X20 Les points M, N et P sont les milieux des arêtes du cube représenté ci-contre. Que vaut la mesure en degrés de l'angle $\widehat{NMP}$?

Ⓐ 60 Ⓑ 90 Ⓒ 120 Ⓓ 150 Ⓔ 180



627. e04 X18 Dans la figure ci-contre, déterminer la mesure en radians de l'angle α, sachant que la longueur du cercle (de rayon R) est égale au périmètre du secteur circulaire hachuré.

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ $2\pi - 2$ Ⓓ $\frac{\pi}{2}$ Ⓔ $\frac{3\pi}{2}$



628. d03 X3 *Sans réponse préformulée* — Si les mesures (exprimées en degrés) des angles intérieurs d'un polygone convexe à 9 côtés sont en progression arithmétique, alors un de ces angles a nécessairement une mesure entière (en degrés). Quelle est-elle ?

629. d05 X29 Dans un cercle, des cordes de longueur 2, 3 et 4 déterminent des angles au centre α, β et $\alpha + \beta$, avec $\alpha + \beta < \pi$. Que vaut $\cos \alpha$?

Ⓐ $\frac{1}{2}$ Ⓑ $\frac{17}{32}$ Ⓒ $\frac{9}{16}$ Ⓓ $\frac{19}{32}$ Ⓔ $\frac{5}{8}$

630. e03 X14 Dans $\mathbf{R}$, l'égalité $\cos(x - y) = \cos(x + y)$

Ⓐ Est toujours vraie ;
Ⓑ N'est jamais vraie ;
Ⓒ Est vraie si l'un des nombres x, y est égal à π ;
Ⓓ Est vraie uniquement si $x = 0$;
Ⓔ Est vraie uniquement si $y = 0$.

631. e06 X13 Combien de nombres réels appartenant à l'intervalle $[\,0\,; 2\pi\,]$ sont solutions de l'équation

$$\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{6}) \cdot \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 0\,?$$

Ⓐ 2 Ⓑ 4 Ⓒ 6 Ⓓ 8 Ⓔ 10

632. Pour tout réel x, $\sqrt{1-\sin 2x} =$
d05
X14

(A) $1 - \sin x$;
(B) $|\sin x - \cos x|$;
(C) $\cos 2x$;
(D) $\cos x - \sin x$;
(E) $\operatorname{tg} x$.

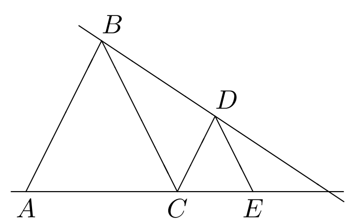
633. $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Que vaut $\sin\alpha - \cos\alpha$?
e04
X29

(A) $2\sqrt{198}$ (B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $-\dfrac{4}{3}$ (E) 0

634. Pour tout réel x, $\big|\sin|x|\big| =$
e04
X6

(A) $\sin x$ (B) $|\sin x|$ (C) $\sin|x|$ (D) $-\sin|-x|$ (E) $\cos\left|\frac{\pi}{2} - x\right|$

635. Les points A, C et E sont alignés et tels que $|AC| = 2\,|CE|$ (v. la figure ci-contre). Les triangles ABC et CDE sont isocèles et leurs angles au sommet, $\hat{B}$ et $\hat{D}$, ont la même amplitude α. Si β est l'amplitude de l'angle formé par les droites AE et BD, alors $\operatorname{tg}\beta =$
e03
X28



(A) $\dfrac{1}{3\operatorname{tg}(\alpha/2)}$ (B) $\dfrac{1}{3\operatorname{tg}\alpha}$ (C) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$ (D) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{3}$ (E) $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$

636. Le nombre de solutions réelles x de l'équation $\sin x = \operatorname{ctg} x$ est
e05
X17

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Infini

4.4 Analyse

637. d06 X19 Si le naturel n est strictement supérieur à 2, l'équation

$$\sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx = n - 1$$

- **A** Admet une infinité de solutions ;
- **B** Admet exactement une solution ;
- **C** Admet exactement $n-1$ solutions ;
- **D** Admet exactement $\frac{1}{2}(n-1)$ solutions ;
- **E** N'admet aucune solution.

638. e04 X14 Si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction impaire, l'une des fonctions suivantes est également impaire. Laquelle ?

A $1+f$ **B** $1-f$ **C** $f-1$ **D** $-1-f$ **E** $-2f$

639. d04 X29 Voici des tableaux d'étude du signe de la dérivée f' d'une fonction f. Quel tableau *ne* peut *pas* être celui correspondant à une fonction f du troisième degré ?

A

x		x_1		x_2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$

D

x		x_1	
f'	$-$	0	$+$

B

x		x_1		x_2	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$

E

x		x_1	
f'	$-$	0	$-$

C

x		x_1	
f'	$+$	0	$+$

640. e05 X21 Dans le plan, la courbe d'équation $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

(A) N'admet aucun centre de symétrie ;

(B) Admet un centre de symétrie de coordonnées $(0, 5)$;

(C) Admet un centre de symétrie de coordonnées $(1, -4)$;

(D) Admet un centre de symétrie de coordonnées $(-1, 4)$;

(E) Admet un centre de symétrie de coordonnées $(-1, -4)$.

641. d03 X26 Soit la fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si cette fonction est continue sur $\mathbf{R}$, alors α est égal à

(A) 0 ; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) $\dfrac{3}{4}$; (D) 1 ; (E) 2.

642. d03 X18 Soient f une fonction non nulle dérivable sur $\mathbf{R}$ et f' sa dérivée. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

(A) Si f est paire, alors f' est paire.

(B) Si f est impaire, alors f' n'est ni paire, ni impaire.

(C) Si f est impaire, alors f' est paire.

(D) Si f est périodique, alors f' n'est pas périodique.

(E) Si f est continue, alors f' est continue.

643. d03 X22 La dérivée de la fonction f est la fonction u, définie sur $\mathbf{R}$. La dérivée de la fonction g telle que $g(x) = f(\sin(x))$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, est alors

(A) $u(\cos(x))$;

(B) $\cos(x) \cdot u(\sin(x))$;

(C) $\sin(x) \cdot u(\cos(x))$;

(D) $\sin(x) \cdot u(\sin(x))$;

(E) $\cos(x) \cdot u(\cos(x))$.

644. e05 X23 Arthur construit une fonction f telle que $f(f(x)) = f(x+2) - 3$ pour tout entier x, avec de plus $f(1) = 4$ et $f(4) = 3$. Dans ces conditions, $f(5)$

(A) Vaut 3 ; (B) Vaut 6 ; (C) Vaut 9 ; (D) Vaut 12 ;
(E) Ne peut être déterminé.

645. e03 X25 Si f et g sont deux fonctions croissantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, laquelle des fonctions suivantes est nécessairement croissante sur $\mathbf{R}$?

(A) $f \cdot g$ (B) $f - g$ (C) $|f \cdot g|$ (D) $g \circ f$ (E) $|f - g|$

646. e03 X23 Si, pour tout réel x, $f(x+1) = x(3x+4)$, alors $f(x-1) =$

(A) $3x^2 + 4x - 2$ (D) $3x^2 - 8x + 4$
(B) $3x^2 + 4x - 1$ (E) $3x^2 - 2x - 1$
(C) $x^2 + 2x$

647. e03 X19 Si les fonctions f et g, définies sur $\mathbf{R}$, sont telles que

$$f(x) = x + 2 \text{ et } (g \circ f)(x) = x^2 - 4,$$

que vaut $g(5)$?

(A) 3 (B) 5 (C) 21 (D) 45 (E) 148

648. e05 X8 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est définie par $f(x) = x^2 + 1$. Que vaut $f(x+1) - f(x-1)$?

(A) $2x^2$ (B) $4x$ (C) 0 (D) $2(x^2+1)$ (E) $2(x^2-1)$

649. e06 X2 La fonction f à valeurs réelles est telle que $f(x) = \sqrt{x - |x|}$. Lorsque x varie dans le domaine de f, combien de valeurs distinctes prend $f(x)$?

(A) Aucune (B) 1 (C) 2 (D) Une infinité
(E) Les données de l'énoncé ne permettent pas de conclure.

650. d06 X7 Pour tout n, l'une des fonctions suivantes applique 4^n sur 8^n. Laquelle ?

(A) $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (B) $x \mapsto 2^x$ (C) $x \mapsto x^2$ (D) $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ (E) $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$

651. d03 X4 Soit la fonction $f : x \mapsto x^3$. Cette fonction et sa dérivée ont la même valeur numérique pour

(A) 0 et 1 ; (B) 0 et 3 ; (C) $-\dfrac{1}{3}$ ou 1 ; (D) $\dfrac{1}{3}$ ou 1 ;

(E) Une infinité de nombres.

652. d05 X27 Laquelle des propositions suivantes est fausse ?

(A) La dérivée d'une fonction périodique est périodique.

(B) La dérivée d'une fonction paire est impaire.

(C) La dérivée d'une fonction impaire est paire.

(D) Toute fonction dérivable est continue.

(E) Toute fonction continue est dérivable.

653. d03 X25 Le graphique d'une des fonctions suivantes admet pour asymptotes les droites d'équations $x = 1$ et $y = 2x + 3$. Laquelle ?

(A) $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$

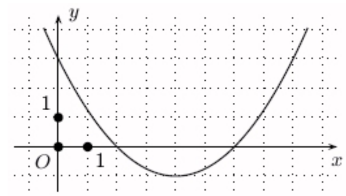
(B) $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+1}$

(C) $f : x \mapsto \dfrac{2x^2}{x-1}$

(D) $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+x}{x-1}$

(E) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

654. d03 X16 Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$. La figure ci-dessous montre une partie du graphique de la fonction g telle que $g(x) = af(x+b)+c$.



Alors,

(A) $a = \frac{1}{4}$, $b = -4$ et $c = -1$;

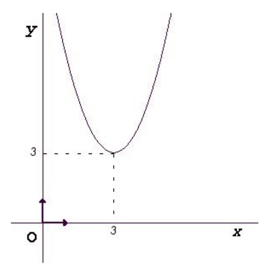
(B) $a = \frac{1}{4}$, $b = -4$ et $c = -2$;

(C) $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$ et $c = -1$;

(D) $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$ et $c = -2$;

(E) $a = \frac{1}{2}$, $b = -4$ et $c = -1$.

655. e05 X18 Parmi les fonctions suivantes, quelle est celle dont le graphique correspond au schéma ci-contre ?



(A) $x \mapsto x^2 + 3$

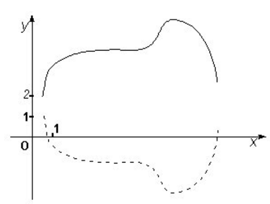
(B) $x \mapsto x^2 - 6$

(C) $x \mapsto (3-x)^2 + 3$

(D) $x \mapsto (x+3)^2 + 3$

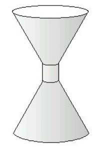
(E) $x \mapsto (x+3)^2 - 3$

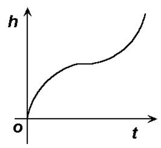
656. e05 X2 Le graphique dessiné en trait continu est celui de la fonction f. Le graphique dessiné en pointillés est celui de la fonction définie par $g(x) =$

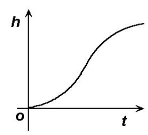


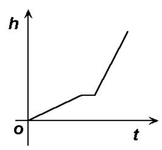
(A) $-f(x)$ (B) $f(x) - 1$ (C) $-f(x) + 3$ (D) $|f(x)|$ (E) $f(x) - 3$

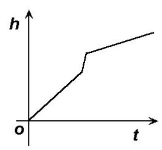
657. e05 X22 Un robinet à débit constant remplit d'eau le vase représenté ci-contre, posé sur un sol horizontal. Au départ, le vase est vide. Quel graphique représente la hauteur de l'eau dans le vase en fonction du temps ?

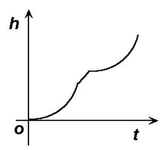


(A)


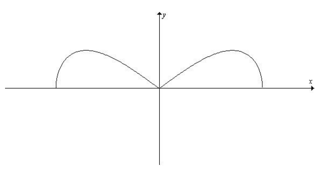
(D)


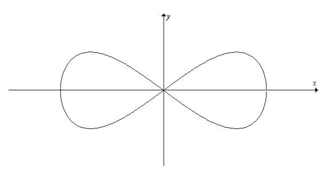
(B)


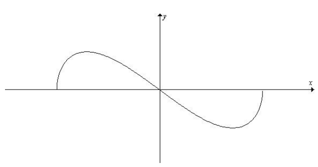
(E)


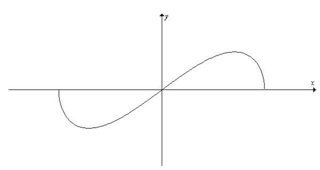
(C)


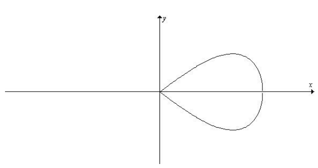
658. e04 X10 La courbe d'équation $y = x\sqrt{1-x^2}$ a pour graphique

(A)


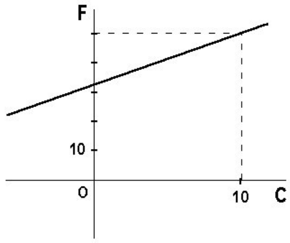
(D)


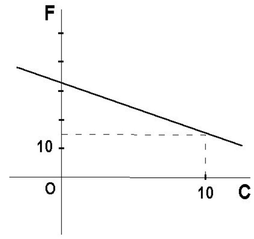
(B)


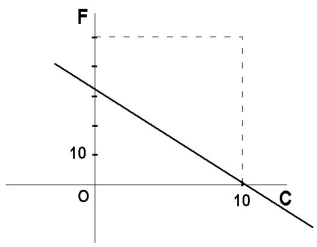
(E)


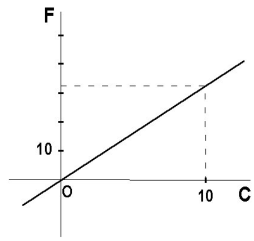
(C)


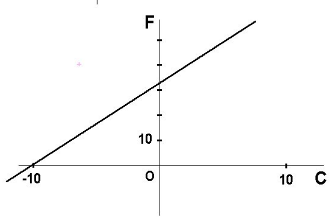
659. On sait qu'à 0° Celsius correspondent 32° Fahrenheit et qu'à 100° Celsius
e05 correspondent 212° Fahrenheit. Le graphique qui permet de passer de
X12 l'échelle Celsius à l'échelle Fahrenheit est

(A) 

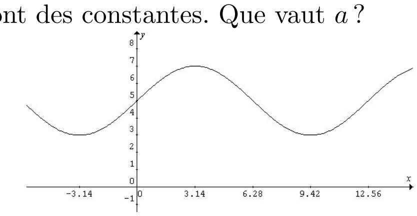
(D) 

(B) 

(E) 

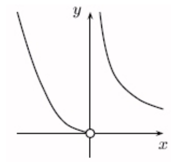
(C) 

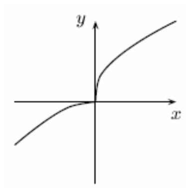
660. Voici le graphique d'une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto a\sin(\omega x + \varphi) + b$,
e04 où a, b, ω et φ sont des constantes. Que vaut a ?
X28

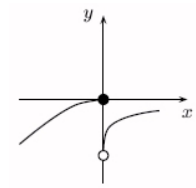


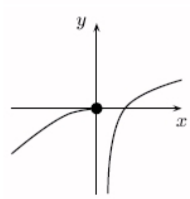
(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 1 (D) 2 (E) 4

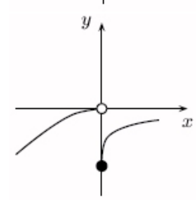
661. d03 X12 La figure ci-contre montre le graphique de la dérivée d'une certaine fonction f dans un intervalle centré sur 0. Lequel des cinq graphiques ci-dessous n'est surement pas celui de f ? (N.B. : un petit disque blanc signifie que le point n'appartient pas au graphique de la fonction ; au contraire, un petit disque noir précise que le point en fait partie.)

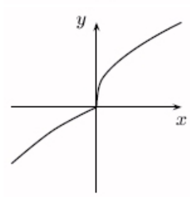


(A)


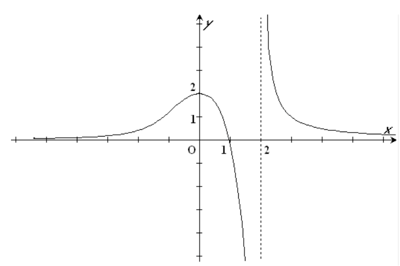
(D)


(B)


(E)


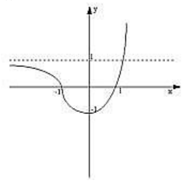
(C)


662. d06 X23 Le graphique ci-contre est celui de la fonction réelle f. Quel est le nombre de solutions de l'équation $\big||f(x)| - 2\big| = 1$?

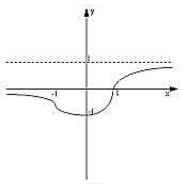


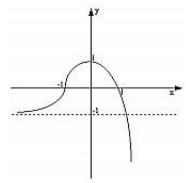
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 10

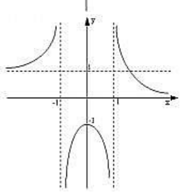
663. La fonction f a pour graphique
e04
X24

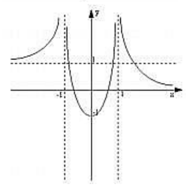


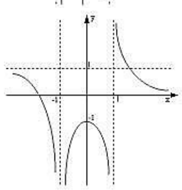
Parmi les graphiques suivants, quel est celui de la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$?

(A) 

(D) 

(B) 

(E) 

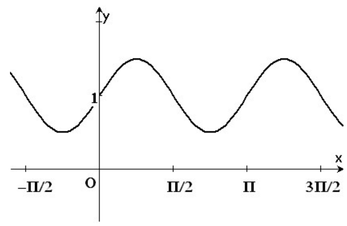
(C) 

664. e06 X17 L'un des graphiques ci-dessous représente la fonction

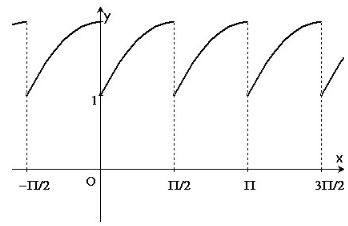
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto y = |\sin x| + |\cos x|.$$

Lequel ?

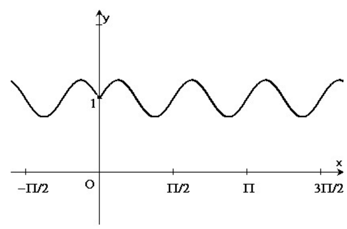
A



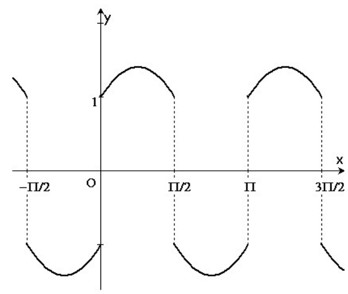
D



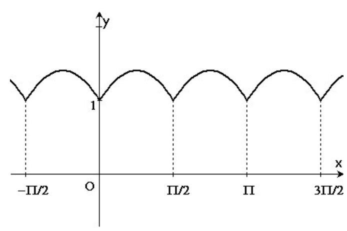
B



E



C



4.5 Logique

665. e06 X1

La négation logique de la phrase « Tous les chats sont des animaux domestiques. » est

(A) « Tous les animaux domestiques sont des chats. » ;

(B) « Aucun chat n'est un animal domestique. » ;

(C) « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal domestique. » ;

(D) « Il existe un animal domestique qui n'est pas un chat. » ;

(E) « Certains animaux domestiques sont des chats. ».

666. d06 X1

Quelle est la négation de la phrase « En Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un meurt des conséquences du tabagisme. » ?

(A) « En Belgique, chaque jour de l'année, personne ne meurt des conséquences du tabagisme. »

(B) « En Belgique, au moins un jour de l'année, personne ne meurt des conséquences du tabagisme. »

(C) « En Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un ne meurt pas des conséquences du tabagisme. »

(D) « Hors de Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un meurt des conséquences du tabagisme. »

(E) Aucune des propositions précédentes.

667. d04 X2

La négation de la propriété « Si x est multiple de 4, alors x est multiple de 2. » est

(A) « Si x est multiple de 2, alors x est multiple de 4. »

(B) « Si x est multiple de 4, alors x n'est pas multiple de 2. »

(C) « Si x n'est pas multiple de 4, alors x est multiple de 2. »

(D) « x est multiple de 4 et x n'est pas multiple de 2. »

(E) « Il existe x multiple de 2 tel que x n'est pas multiple de 4. »

668. e04 X1 La négation logique de la phrase « Tous les chats sont des animaux carnivores. » est :

(A) « Tous les animaux carnivores sont des chats. » ;

(B) « Aucun chat n'est un animal carnivore. » ;

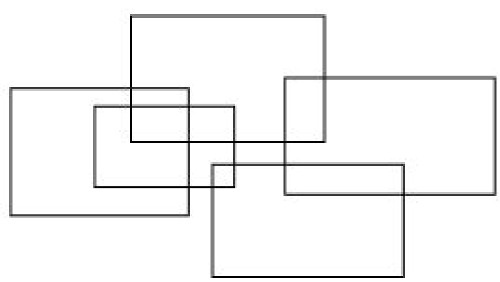
(C) « Il existe au moins un animal carnivore qui n'est pas un chat. » ;

(D) « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal carnivore. » ;

(E) « Toutes les souris sont des animaux carnivores. ».

4.6 Combinatoire & probabilités

669. d04 X30 Cinq cartons sont posés sur une planche comme l'indique la figure ci--dessous. Ils doivent être fixés à la planche par des punaises dans les positions indiquées sans pouvoir tourner. Quel est le nombre minimum de punaises à utiliser ?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

670. d05 X4 *Sans réponse préformulée* — Combien faut-il prendre au minimum de sous-ensembles à 3 éléments dans l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pour être sûr que chaque sous-ensemble de E comprenant 2 éléments est contenu dans un des sous-ensembles sélectionnés ?

671. e06 X9

Sans réponse préformulée — Dans une classe de 21 élèves, chaque élève a au moins un ami. À la salle d'informatique, devant un ordinateur, s'assoient soit un seul élève, soit deux élèves amis. Combien faut-il prévoir d'ordinateurs au minimum pour être certain que les 21 élèves pourront s'asseoir devant un ordinateur ?

672. e05 X3

2005 maisons doivent être connectées par des câbles téléphoniques. Quel est le nombre minimum de tels câbles à installer pour que chacune des 2005 maisons puisse envoyer un message téléphonique vers chaque autre, ce message pouvant transiter par des maisons intermédiaires ?

(A) 1003 (B) 2004 (C) 999 000 (D) 1
(E) Cette installation est impossible.

673. e06 X30

Un compartiment de train est équipé de deux banquettes se faisant face. Sur chacune d'elles peuvent s'asseoir quatre personnes. Quatre couples (H_1, F_1), (H_2, F_2), (H_3, F_3) et (H_4, F_4) viennent s'y installer. Toutes les femmes sont assises dans le sens de la marche du train et aucune femme n'est en face de son mari. Voici une telle disposition :

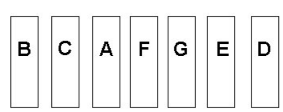
$$\begin{matrix} H_2 & H_4 & H_1 & H_3 \\ F_1 & F_3 & F_2 & F_4 \end{matrix}$$

De combien de manières ceci peut-il se réaliser ?

(A) 24 (B) 144 (C) 216 (D) 576 (E) 864

674. e06 X19

Sans réponse préformulée — Sept livres se trouvent placés sur une étagère comme l'indique la figure :



Pour les ranger par ordre alphabétique, je répète l'opération qui consiste à échanger deux de ces livres. Combien de telles opérations dois-je accomplir au minimum pour ranger ces sept livres ?

675. Il n'y a que six livres sur cette planche de ma bibliothèque. Chaque jour, je vais les reclasser dans un ordre nouveau différent de ceux qui ont précédé. Dans combien de temps aurai-je utilisé tous les rangements possibles ?
d04
X15

(A) Une semaine
(B) Un mois
(C) 360 jours
(D) Deux ans moins une dizaine de jours
(E) 2160 jours

676. *Sans réponse préformulée* — De combien de manières 78 peut-il se mettre sous la forme d'une somme d'au moins deux nombres entiers consécutifs, dans laquelle les termes sont rangés dans l'ordre croissant ?
d03
X21

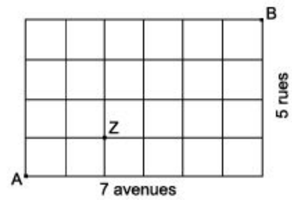
677. Dans un polygone convexe régulier à 2004 sommets, quel est le plus grand nombre de diagonales de longueurs deux à deux distinctes ?
d04
X17

(A) 501 (B) 1001 (C) 1002 (D) 2001 (E) 2002

678. *Sans réponse préformulée* — Parmi les entiers 1, 2, 3, ..., 15, de combien de manières peut-on choisir trois entiers distincts tels que leur somme soit un multiple de 3 ?
e03
X29

679. *Sans réponse préformulée* — On désire placer cinq personnes autour d'une table ronde. Combien existe-t-il de manières possibles si l'on compte que deux dispositions où tout le monde a exactement la même paire de voisins sont équivalentes ?
d06
X22

680. d04 X14 *Sans réponse préformulée* — Voici le plan d'une partie d'une ville moderne où les pâtés de maisons sont carrés. Combien de plus courts chemins mènent de A à B sans passer par Z ?



681. e05 X16 Les sept enfants d'une famille, âgés de 7, 8, 10, 13 et 15 ans, sont réunis chez le photographe. Trois d'entre eux sont des triplés indiscernables. Combien de photos différentes sont obtenues en plaçant les 7 enfants assis côte à côte ?

(A) 120 **(B)** 144 **(C)** 168 **(D)** 840 **(E)** 1640

682. e05 X29 Un sac contient quatre balles portant les numéros -2, -1, 1 et 2. On tire simultanément deux balles du sac. Quelle est la probabilité que le produit de leurs numéros soit positif et pair ?

(A) $\dfrac{1}{6}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** $\dfrac{2}{3}$ **(E)** $\dfrac{3}{7}$

683. e06 X16 On joue à pile ou face avec une pièce bien équilibrée. Lors des trois premiers jets, on obtient à chaque fois « face ». Quelle est la probabilité d'obtenir « pile » au jet suivant ?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{3}{5}$ **(E)** $\frac{4}{5}$

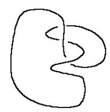
4.7 Problèmes & divers

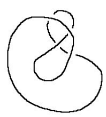
684. Un triangle est déteminé en prenant ses sommets au hasard parmi ceux
d03
X28
d'un polygone régulier à 2003 côtés. Il est admis que chaque sommet du polygone a la même chance d'être choisi. Quelle est la probabilité que le centre du polygone soit intérieur à ce triangle ?

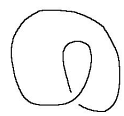
(A) $\frac{500}{2001}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{501}{2003}$ (D) $\frac{501}{2001}$ (E) $\frac{503}{2003}$

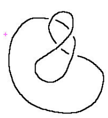
685. Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, laquelle de ces boucles est nouée ?
e04
X2

(A) 

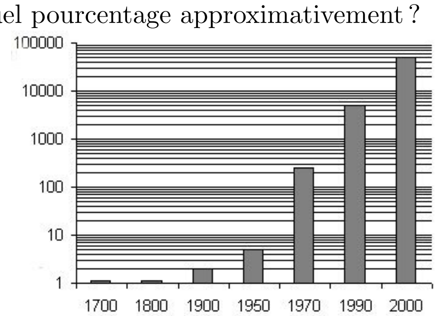
(D) 

(B) 

(E) 

(C) 

686. Le graphique ci-dessous indique le nombre d'espèces animales ayant disparu définitivement en certaines années. Remarquez que, sur l'axe vertical, la graduation n'est pas linéaire ; par exemple, en 1950, 5 espèces ont disparu. De 1990 à 2000, le nombre d'espèces disparues a fortement augmenté. De quel pourcentage approximativement ?
e06
X10



(A) 50 % (B) 100 % (C) 250 % (D) 750 % (E) 900 %

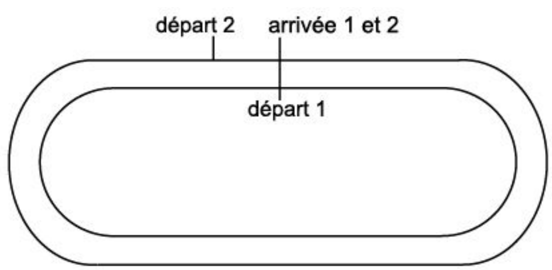
687. d04 X12 Sur la planète Mars, les olympiades de mathématique comportent 30 questions. Chaque bonne réponse rapporte 7 points, mais chaque mauvaise réponse en retire 12. Une question non résolue ne modifie pas le score. Le score d'une Martienne est 77 et elle est certaine de s'être trompée au moins une fois. À combien de questions cette Martienne a-t-elle fourni une réponse fausse ?

(A) Entre 0 et 2 (B) Entre 3 et 5 (C) Entre 6 et 8 (D) Entre 9 et 12
(E) Les informations données sont insuffisantes pour le dire.

688. e03 X8 Pour arriver à l'heure à un rendez-vous, M. Lelièvre doit rouler à une vitesse moyenne de 60 km/h. S'il effectue la première moitié du trajet à la vitesse moyenne de 40 km/h, quelle devra être la vitesse moyenne de M. Lelièvre sur la seconde moitié du trajet pour être au rendez-vous à l'heure convenue ?

(A) 120 km/h (B) 100 km/h (C) 90 km/h (D) 80 km/h
(E) Il manque des données pour pouvoir trouver cette vitesse moyenne.

689. d04 X7 Un circuit de petites voitures (représenté ci-dessous de manière imprécise) est formé de deux rails distants de 1 mètre. La voiture 1 roule sur le rail intérieur et doit effectuer un seul tour complet (depuis « départ 1 » jusqu'à « arrivée 1 »). Pour que la voiture 2 qui roule sur le rail extérieur ait la même distance à parcourir, son point de départ est décalé. De combien de mètres ?



(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 1 (E) 4

690. d04 X10 Un récipent conique fermé, posé sur sa base, est rempli de sable jusqu'à la moitié de sa hauteur h. On le retourne pointe en bas et hauteur verticale. Quelle est la hauteur atteinte par le sable ?

(A) $\frac{1}{2}h$ (B) $\frac{3}{4}h$ (C) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$ (D) $\frac{7}{8}h$

(E) Cela dépend des dimensions du récipient.

691. e06 X14 *Sans réponse préformulée* — Le questionnaire de l'OMB comporte 30 questions. Une bonne réponse rapporte 5 points, une abstention rapporte 2 points et une réponse fausse aucun point. Quel est le nombre de scores possibles ?

692. d04 X3 *Sans réponse préformulée* — Le troisième samedi du mois tombe toujours au plus tôt le m^{e} jour du mois et au plus tard le n^{e} jour du mois. Que vaut $m+n$?

693. d06 X16 *Sans réponse préformulée* — Les nombres m et n ont chacun trois chiffres et n est obtenu en inversant l'ordre des chiffres de m (le chiffre des centaines de m et de n est non nul). Quel est le nombre de valeurs possibles pour $m-n$?

694. e04 X9 Depuis la nuit des temps, une mouche immortelle se promène sur les arêtes d'un cube sans jamais faire demi-tour. Lorsqu'elle arrive en un sommet, elle repart par la seule arête qui n'est pas coplanaire avec les deux dernières arêtes parcourues. À l'heure actuelle, elle a déjà parcouru plusieurs fois les mêmes arêtes. Combien d'arêtes du cube cette mouche n'a-t-elle jamais parcourues ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

695. d05 X7 *Sans réponse préformulée* — Dans la classe d'Arthur, les interrogations sont toutes notées sur 100. Si Arthur obtient 71 à sa prochaine interrogation, alors la moyenne de toutes ses interrogations sera 83. Tandis que s'il obtient 99, alors cette moyenne sera 87. Combien a-t-il déjà fait d'interrogations ?

696. Le guide d'un groupe de touristes récolte l'argent pour une excursion.
e06 S'il demande à chacun 75 euros, il manque 440 euros au total exigé ; s'il
X6 demande à chacun 80 euros, il y a un excès de 440 euros. Combien y a-t-il de personnes dans le groupe ? (Le guide ne fait pas partie du groupe.)

(A) 88 (B) 176 (C) 220 (D) 440 (E) 501

697. *Sans réponse préformulée* — Mathieu s'amuse à empiler des cubes en
e05 bois ; il en possède moins de 100. S'il fait des piles de 5 cubes, il utilise
X6 tous les cubes qu'il possède. Par contre, s'il fait des piles de 6 cubes ou des piles de 7 cubes, il lui reste à chaque fois 1 cube. Combien de cubes Mathieu possède-t-il ?

698. *Sans réponse préformulée* — Un examen est organisé dans un auditoire
d05 qui comporte 8 rangées, chacune de 16 sièges. Il faut que deux sièges
X2 occupés ne soient pas sur des rangées consécutives et qu'entre deux sièges occupés d'une même rangée, il y ait au moins deux sièges libres. Selon cette règle, quel est le plus grand nombre de sièges utilisables ?

699. Parmi les cinq nombres $5n$, n^2+1, n^2, n^2+n+1, $3n^2-5n$, où n désigne
e05 un entier, combien sont nécessairement impairs ?
X9

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

700. *Sans réponse préformulée* — Pour combien de valeurs positives de x la
d03 fraction $\dfrac{31x+35}{9x+13}$ est-elle égale à un nombre entier ?
X23

701. *Sans réponse préformulée* — L'entier n est le plus petit multiple stricte-
e04 ment positif de 15 tel que chaque chiffre de n soit 0 ou 8. Que vaut $\dfrac{n}{120}$?
X26

702. *Sans réponse préformulée* — Un chat vide un bol de lait en 2 minutes ;
e04 un chaton vide le même bol en 3 minutes. En combien de temps (ex-
X7 primé en secondes) le chat et le chaton videront-ils le bol s'ils s'y mettent ensemble ?

703. e05 X11 Si x maçons mettent y jours pour bâtir z maisons, combien de jours mettront q maçons pour bâtir r maisons (en supposant que tous les maçons travaillent au même rythme et que toutes les maisons sont identiques) ?

(A) $\dfrac{qry}{xz}$ (B) $\dfrac{ryz}{qx}$ (C) $\dfrac{qz}{rxy}$ (D) $\dfrac{xyr}{qz}$ (E) $\dfrac{rz}{qxy}$

704. e04 X22 Quel est le produit de tous les naturels p tels que $\dfrac{18p+23}{p-1}$ soit un naturel ?

(A) 0 (B) 2 (C) 82 (D) 84 (E) 86

705. e03 X24 L'exposant de la plus grande puissance de 6 qui divise

$$50! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 50$$

est

(A) 29 ; (B) 22 ; (C) 16 ; (D) 9 ; (E) 8.

706. e03 X18 Quel est le nombre formé des deux derniers chiffres de la somme

$$1! + 2! + \cdots + 30!\,?$$

Rappel : si n est un naturel non nul, la notation $n!$ représente le produit de tous les naturels depuis 1 jusqu'à n.

(A) 13 (B) 33 (C) 53 (D) 73 (E) 93

707. e04 X13 *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme des chiffres du nombre $(2\underbrace{00\ldots00}_{2004 \text{ zéros}}4)^4$ écrit en système décimal ?

708. e03 X22 *Sans réponse préformulée* — La somme de 17 nombres naturels distincts et non nuls vaut 153. Quel est le plus grand de ces nombres ?

709. e04 X19 S est la somme de tous les nombres de 4 chiffres différents que l'on obtient en utilisant uniquement les chiffres 1, 2, 3 et 4. La somme des chiffres de S est

(A) 6 (B) 12 (C) 16 (D) 24 (E) 46

710. e03 X13 *Sans réponse préformulée* — De combien de pourcents faut-il augmenter le rayon d'un cercle pour que son aire augmente de 96 % ?

711. d04 X9 *Sans réponse préformulée* — Un théâtre a augmenté le prix des places de 40 % et pourtant la recette totale n'a augmenté que de 26 %. De quel pourcentage le nombre de spectateurs a-t-il diminué ?

712. e06 X4 Selon le compteur placé à l'entrée, 75 personnes sont entrées hier dans ce magasin. Les relevés faits aux caisses indiquent que l'on a vendu ce jour-là 12 GSM, 18 jeux vidéo et 24 CD. Vingt des clients ont acheté exactement deux articles : six d'entre eux ont acheté un GSM et un jeu vidéo, quatre ont acheté un GSM et un CD et dix ont acheté un jeu vidéo et un CD. Un seul client a acheté trois articles différents. Les autres acheteurs n'ont pris qu'un seul article. Combien de personnes sont sorties sans achat ?

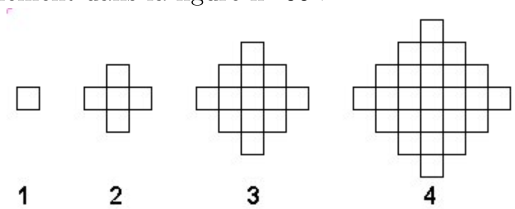
(A) 21 (B) 32 (C) 33 (D) 43
(E) Personne n'est sorti sans rien acheter.

713. e05 X19 Deux jets d'arrosage rotatifs d'un mètre de portée sont placés à un mètre de distance l'un de l'autre. Quelle est l'aire de la zone arrosée ?

(A) $\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{3}$ (D) $\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) 2π

714. e04 X8 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de rectangles d'aire 2004 cm^2 dont les dimensions sont des nombres entiers de centimètres ?

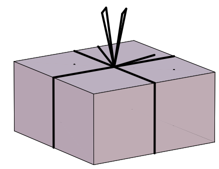
715. d04 X25 Les figures n° 1, n° 2, n° 3 et n° 4 ci-dessous consistent respectivement en 1, 5, 13 et 25 carrés unitaires sans chevauchement. Si on continuait le processus de manière analogue, combien y aurait-il de carrés unitaires sans chevauchement dans la figure n° 99 ?



(A) 10 401 (B) 19 405 (C) 20 201 (D) 39 805 (E) 40 801

716. d03 X27 *Sans réponse préformulée* — Deux cubes sont tels que leurs arêtes ont pour mesures des nombres entiers. De plus, la somme des mesures de leurs volumes est égale à la somme des mesures de toutes leurs arêtes. Que vaut cette somme ?

717. d03 X20 Une ficelle de 150 cm de long entoure une boite ayant la forme d'un parallélipipède rectangle à base carrée (cf. la figure ci-contre), le nœud et la boucle nécessitant à eux seuls 30 cm de ficelle. Quel est le volume maximal (exprimé en centimètres cubes) que pourrait avoir cette boite ?



(A) 3600 (B) 3680 (C) 3820 (D) 4000 (E) 4200

718. e04 X16 Dans un parallélipipède rectangle, considérons les trois faces qui sont disposées autour d'un sommet. Les centres de ces faces sont les sommets d'un triangle dont les côtés mesurent 4, 5 et 6. Le volume de ce parallélipipède est

(A) $120\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{210}$ (C) $90\sqrt{6}$ (D) $120\sqrt{3}$ (E) 125

719. e04 X17 Soit $x_n = 1+2+3+\cdots+n$ et $y_n = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$. Que vaut y_{13} ?

(A) 321 (B) 392 (C) 437 (D) 451 (E) 455

720. e03 X20 Il reste 3 cl de shampooing dans un flacon d'une contenance de 600 ml. Pour le rincer, je le remplis d'eau, puis je le vide. En admettant qu'après chaque rinçage il reste 3 cl de liquide dans le flacon, combien de fois au moins devrai-je procéder de la sorte pour que la quantité résiduelle de shampooing devienne inférieure à la millionième partie des 3 cl restant alors dans le flacon ?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

4.8 Table des réponses

X	e03	e04	e05	e06	d03	d04	d05	d06
01	E	D	19	C	9	D	E	B
02	C	A	C	B	D	D	24	48
03	C	B	B	C	140	36	C	D
04	C	D	A	D	B	420	4	4
05	D	D	B	A	E	162	D	C
06	B	B	85	B	B	D	B	A
07	B	72	36	75	7	C	6	D
08	A	6	B	E	C	B	17	D
09	C	C	B	20	A	10	D	779
10	198	E	C	E	A	C	4	B
11	E	E	D	C	E	4	B	3
12	A	C	A	A	C	C	31	C
13	40	54	E	D	C	A	A	E
14	C	E	E	145	4	105	B	B
15	D	A	C	D	C	D	D	5
16	E	C	D	B	A	C	E	17
17	C	E	E	C	E	B	A	A
18	A	A	C	C	C	E	9	D
19	B	D	D	5	A	B	A	E
20	A	E	C	A	D	D	B	C
21	E	A	D	D	7	A	D	C
22	17	D	D	E	B	255	B	12
23	D	E	D	B	1	D	E	D
24	B	B	452	E	C	C	B	A
25	D	D	B	C	D	B	B	512
26	A	74	C	A	B	D	E	A
27	C	B	C	B	72	48	E	D
28	A	D	A	E	D	E	C	B
29	155	C	C	C	B	D	B	C
30	D	E	D	C	78	B	40	D

Chapitre 5

Finales miNi

5.1 Finale 2003

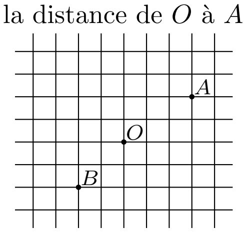
1. Est-il possible de disposer les nombres entiers 1, 2, 3, ..., 16 sur

a) Une droite ;

b) Un cercle

De façon que la somme de deux nombres voisins soit un carré parfait ? Si oui, donner un exemple.

2. Dans un réseau illimité à mailles carrées de côté 1, on définit la distance entre deux sommets du réseau comme la longueur du plus court chemin qui les sépare en suivant les lignes du réseau. Ainsi, sur la figure ci-dessous, la distance de O à A est 5 et celle de O à B est 4.



Combien y a-t-il de sommets du réseau situés à

a) La distance 1 de O ?

b) La distance 10 de O ?

c) La distance n de O (où n est un nombre naturel) ?

3. L'ensemble $E = \{1, 2, 3, \ldots, 2002, 2003\}$ est décomposé en deux parties A et B :

- A comprend les nombres de E dont la somme des chiffres est impaire ;
- B comprend les nombres de E dont la somme des chiffres est paire.

Si a est la somme des nombres appartenant à A et si b est la somme des nombres appartenant à B, quelle est la valeur de $a - b$?

4. ABC est un triangle dont tous les angles sont aigus. La rotation de centre B et d'angle $+60°$ (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) applique A sur A'. Par cette rotation un point P de CA' est appliqué sur le point P'.

- Prouver que la somme des distances de P aux sommets du triangle ABC est égale à $|P'A'| + |P'P| + |PC|$.
- Expliquer comment construire P sur CA' de manière que cette somme soit la plus petite possible.

5.2 Finale 2004

1. Le code d'un cadenas est un nombre à quatre chiffres (de 0 à 9, le nombre pouvant commencer par 0).

Mathieu a oublié le code mais il se rappelle que ce nombre est inférieur à 2004 et que ses quatre chiffres sont tous différents.

Combien de codes doit-il essayer pour être certain que le cadenas s'ouvre ?

2. Quatre nombres entiers différents a, b, c et d sont tels que

$$(a - 2004)(b - 2004)(c - 2004)(d - 2004) = 4.$$

Que vaut $a + b + c + d$?

3. Dans le triangle ABC, D est le milieu de $[BC]$, E est le milieu de $[AD]$, F est le milieu de $[BE]$ et G est le milieu de $[CF]$. Sachant que l'aire du triangle ABC vaut 1, calculer l'aire du triangle EFG.

4. Les masses, en kilogrammes, de cinq citrouilles sont des naturels tous différents. On place ces citrouilles deux par deux sur une balance. Les plus petites masses ainsi obtenues sont 16 kg et 18 kg, tandis que les plus grandes sont 26 kg et 27 kg.

a) Ces informations permettent-elles de déterminer la masse de chacune des citrouilles ?

b) Si non, combien de cas en tout sont cohérents avec ces informations ? Donner les cinq masses dans chacun des cas.

5.3 Finale 2005

1. Déterminer tous les nombres premiers de quatre chiffres distincts ayant les trois propriétés suivantes :

- Le nombre formé des deux premiers chiffres et le nombre formé des deux derniers chiffres sont premiers ;
- La somme des deux premiers chiffres vaut 10 et la somme des deux derniers chiffres vaut 10 ;
- Le chiffre des unités et le chiffre des dizaines sont premiers.

2. Un journal organise un sondage auprès de ses abonnés. Il détermine le sexe, l'état civil et la profession de 1000 lecteurs et obtient les résultats suivants : 312 hommes, 470 personnes mariées, 525 étudiants ou étudiantes, 42 étudiants de sexe masculin, 147 étudiants ou étudiantes mariés, 86 hommes mariés et 25 étudiants de sexe masculin mariés. Mon copain affirme qu'il doit y avoir une erreur dans ces résultats. A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

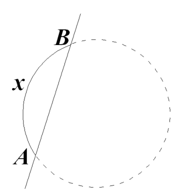
3. Une fraction est telle que, multipliée par 5, elle reste plus petite que 1, tandis que, multipliée par 6, elle dépasse 1. Les deux termes de cette fraction sont des nombres naturels et le numérateur est un nombre de deux chiffres différents.

a) Montrez qu'il existe plusieurs fractions satisfaisant ces conditions et donnez un exemple d'une telle fraction.

b) Parmi ces fractions, quelle est celle qui a le plus petit dénominateur ?

c) Parmi ces fractions, quelle est celle qui a le plus grand dénominateur ?

4. Un cercle de rayon 5 est partagé en quatre arcs de même longueur par les points A, B, C, D. Appelons x, y, z, t les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$.



Soit x' l'arc symétrique de x par rapport à la droite AB, y' l'arc symétrique de y par rapport à la droite BC, z' l'arc symétrique de z par rapport à la droite CD, t' l'arc symétrique de t par rapport à la droite DA.

a) Que vaut l'aire de la figure limitée par $x'yz't$?

b) Que vaut l'aire de la figure limitée par $x'y'z't'$?

5.4 Finale 2006

1. Les nombres naturels sont écrits successivement pour former la suite

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 0 1 1 1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 . . .

a) Quel est le 2006$^{\text{e}}$ chiffre de cette suite ?

b) Combien y a-t-il de chiffres 0 depuis le début de la suite jusqu'au 2006$^{\text{e}}$ chiffre inclus ?

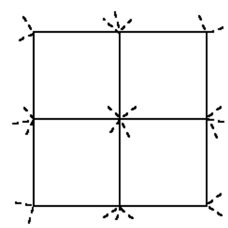
2. Henriette possède 2006 morceaux de ficelle, tous de même longueur. Elle les noue l'un à l'autre afin de réaliser un grand filet carré à mailles carrées : chaque morceau de ficelle devient un côté d'une maille. Ci-dessous est représenté un petit filet 2×2. À chaque nœud, dépassent 2, 3 ou 4 bouts de ficelle (dessinés en pointillés). Il lui faudra couper ces bouts de ficelle.

a) Si elle réalise un grand filet 15×15,

i. Combien de morceaux de ficelle devra-t--elle utiliser ?

ii. Combien de bouts de ficelle qui dépassent devra-t-elle couper ?

b) Si elle réalise le plus grand filet carré possible avec ses 2006 morceaux de ficelle, combien de bouts de ficelle qui dépassent devra-t-elle couper ?

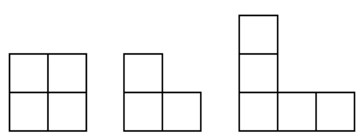


3. Le triangle ABC est isocèle avec $|AB| = |AC|$. L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu et tel que le cercle de centre B et de rayon $|BC|$ coupe $[AC]$ en D et $[AB]$ en E. Si les triangles BCD et BED sont symétriques par rapport à BD,

a) Que vaut, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$? (Justifier cette réponse.)

b) Prouver que le triangle AED est isocèle.

4. On désire paver un rectangle en utilisant uniquement des pièces identiques à celles dessinées ci-dessous, formées de petits carrés de dimension 1×1. Ce pavage doit s'effectuer sans laisser de trou dans le rectangle et sans superposer deux pièces.



Ce pavage est-il possible si les dimensions du rectangle sont

a) 4×6 ?

b) 4×5 ?

c) 3×7 ?

d) $m \times n$ où m et n sont des naturels supérieurs à 2 ?

Chapitre 6

Finales miDi

6.1 Finale 2003

1. Un aquarium a la forme d'un parallélipipède rectangle de largeur l, de longueur L et de hauteur $h = 30$ cm, avec $l < h < L$. Il est totalement rempli d'eau et posé sur un sol horizontal. Pour le vider d'une partie de son eau, si on le fait pivoter autour de l'une des deux plus longues arêtes de sa base jusqu'à ce que cette base fasse un angle de 45° avec le sol, il perd un tiers de son eau ; tandis que si on le fait pivoter autour de l'une des deux plus courtes arêtes de sa base jusqu'à ce que cette base fasse un angle de 45° avec le sol, il perd les quatre cinquièmes de son eau. Quel est le volume de cet aquarium ?

2. Les quatre nombres réels positifs a, b, c, d sont tels que $a > b > c > d$ et $a+b+c+d = 1$. Dans ces conditions, l'inégalité $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 < 1$ est-elle toujours valide ?

3. En numération décimale, on considère tous les nombres de 10 chiffres distincts (le chiffre le plus à gauche étant différent de 0). Combien de ces nombres sont divisibles par 99 999 ?

4. Soit ABC un triangle isocèle avec $|AB| = |AC|$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite AC en un point D tel que $|BC| = |BD| + |AD|$. Déterminer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

6.2 Finale 2004

1. Parmi tous les entiers positifs multiples de 2004, quels sont ceux qui ont exactement 20 diviseurs positifs ?

2. Dans le parallélogramme $ABCD$, le point M est le milieu de $[BC]$. Le point E est le pied de la perpendiculaire à MA issue de D.

Démontrer que $|CD| = |CE|$.

3. 2004 bougies seront disposées sur un gâteau à étages. Sur l'étage du haut se trouvent n bougies, et chaque autre étage comporte k bougies de plus que l'étage immédiatement supérieur ($k > 0$).

a) Trouver le nombre maximum d'étages d'un tel gâteau.

b) Pour ce nombre maximum, déterminer toutes les valeurs possibles des nombres naturels n et k.

4. Un jeu de 2004 cartes est déposé en un paquet sur la table, dans un ordre que nous qualifierons d'initial. L'opération suivante lui sera appliquée plusieurs fois :

Prendre la carte A située tout en haut et la carte B située tout en bas, placer A au dessus de B puis remettre ces deux cartes entre la n^e et la $(n+1)^e$ carte des cartes restantes du paquet ($1 \leq n \leq 2001$).

Cette opération est répétée avec la même valeur de n en prenant chaque fois les cartes situées alors aux extrémités du paquet comme A et B.

a) Est-il certain que les 2004 cartes retrouveront à un moment l'ordre initial ? Si oui, pour la première fois après combien d'opérations ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de n ce nombre d'opérations sera-t-il minimum, et pour quelle(s) valeur(s) de n ce nombre sera-t-il maximum ?

6.3 Finale 2005

1. Quelles sont toutes les listes d'entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 2005 ?

2. Dans un billard rectangulaire $ABCD$, une bille est lancée à partir du coin A ; elle rebondit selon les lois de la réflexion sur le côté CD, puis sur le côté BC, puis sur le côté BA et termine sa course dans le coin D. Quelle est la longueur du trajet du centre de la bille sachant que le diamètre de la bille est 6 cm et que les dimensions du billard sont $|AD| = |BC| = 156$ cm et $|AB| = |CD| = 306$ cm ?

3. La finale d'une compétition mathématique comporte quatre problèmes. Pour chacun des problèmes les notes possibles sont 0, 1, 2, 3 et 4 points. Après la compétition, le jury constate que pour n'importe quelle paire de participants, ces deux participants n'ont pas eu le même nombre de points sur plus d'un problème. Quel est le nombre maximal de participants ?

4. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe n'ayant aucun angle droit et dont les quatre sommets appartiennent à un même cercle. Désignons par P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées de D respectivement sur AB et BC. Désignons par R et S les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement de B sur AD et CD. Le quadrilatère convexe formé par les quatre points P, Q, R, S

a) Est-il nécessairement un trapèze ?

b) A-t-il nécessairement deux côtés égaux ?

6.4 Finale 2006

1. Par le sommet A du triangle ABC, on mène une droite d. Les pieds des perpendiculaires abaissées de B et de C sur d sont respectivement D et E. Le point M étant le milieu de $[BC]$, démontrer que $|MD| = |ME|$.

2. Dans le tableau ci-dessous, chaque case est repérée par son numéro de ligne et son numéro de colonne. La ligne 1 commence par 2006 et pour passer du nombre inscrit dans la colonne k au nombre inscrit dans la colonne $k+1$, on soustrait 1. La ligne 2 commence par 2005 et on soustrait à chaque fois 2. La ligne 3 commence par 2004 et on soustrait à chaque fois 3. Et ainsi de suite.

	1	2	3	4	5	...
1	2006	2005	2004	2003	2002	...
2	2005	2003	2001	1999	1997	...
3	2004	2001	1998	1995	...	
4	2003	1999	1995	1991	...	
5	2002	1997	1992	...		
...	...					

a) Quel est le nombre inscrit en ligne 10, colonne 20 ?

b) Dans quelles cases le nombre 0 figure-t-il ? Expliquer votre réponse.

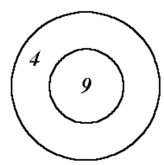
c) Si le nombre figurant dans le tableau en ligne 1, colonne 1 est n, comment déterminer, en fonction de n, les cases où figure le nombre 0 ?

3. Trois nombres dont le produit vaut 1 sont tels que leur somme est égale à la somme de leurs inverses.

a) Donner un exemple numérique où les trois nombres sont différents.

b) Est-il vrai qu'au moins un des nombres vaut toujours 1 ? Si oui, le démontrer ; si non, donner un contrexemple.

4. Dans la cible dessinée ci-dessous, il n'y a que deux régions, l'une à 4 points et l'autre à 9 points. Lorsqu'on lance plusieurs flèches successivement, le score est la somme des points marqués dans les régions où les flèches ont abouti.



a) Existe-t-il des nombres naturels qui ne s'obtiennent pas comme des scores ? Quel est, s'il existe, le plus élevé d'entre eux ?

b) Certains nombres naturels peuvent être obtenus comme des scores au moins de deux manières différentes. Quel est le plus petit à partir duquel tous les scores suivants peuvent être obtenus au moins de deux manières ?

Chapitre 7

Finales maXi

7.1 Finale 2003

1. Entre les chiffres 4 et 9, on insère un ou plusieurs chiffres 4 suivis par le même nombre de chiffres 8. Les deux premiers nombres ainsi obtenus sont $4489 = 67^2$ et $444889 = 667^2$. Tous les nombres construits de cette façon sont-ils des carrés d'entiers ?

2. Soit un quadrilatère inscriptible $ABCD$ tel que $\widehat{ACB} = 2\widehat{CAD}$ et $\widehat{ACD} = 2\widehat{BAC}$. L'égalité $|CA| = |CB| + |CD|$ est-elle nécessairement vraie ?

3. Sur un cube dont la longueur des côtés est 1, considérons des chemins allant d'un sommet (quelconque) du cube à un autre (quelconque). Ces chemins sont formés par des arêtes et des diagonales de faces du cube et ils ne passent pas deux fois par le même point.
Calculer la plus grande longueur d'un tel chemin.

4. Dans la table infinie ci-dessous, la première ligne et la première colonne sont formées par la progression arithmétique 4, 7, 10, 13, 16, ..., de raison 3. Les lignes suivantes sont aussi des progressions arithmétiques successivement de raisons impaires 5, 7, 9, 11, ...

4	7	10	13	16	19	22	$\cdots$
7	12	17	22	27	32	37	$\cdots$
10	17	24	31	38	45	52	$\cdots$
13	22	31	40	49	58	67	$\cdots$
16	27	38	49	60	71	82	$\cdots$
19	32	45	58	71	84	97	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

L'affirmation suivante est-elle correcte pour tout entier strictement positif n ?
Le nombre n ne figure pas dans cette table si et seulement si $2n+1$ est premier.

7.2 Finale 2004

1. a) Existe-t-il un polynome p à coefficients entiers tel que $p(2) = 0$ et $p(0) = 4$?

b) Existe-t-il un polynome p à coefficients entiers tel que $p(1) = 7$ et $p(8) = 9$?

c) Pour quelles valeurs de l'entier n existe-t-il un polynome p à coefficients entiers tel que $p(1) = 7$ et $p(8) = n$?

2. Combien existe-t-il d'entiers compris entre 10 000 et 99 999 comportant un nombre pair de chiffres pairs ?

3. Dans le triangle ABC, le point D appartient à $[AC]$ et est tel que $|BD| = |CD|$. Une droite parallèle à BD coupe le segment $[BC]$ en E et coupe la droite AB en F. Le point d'intersection des droites AE et BD est G. Démontrer que les angles $\widehat{BCG}$ et $\widehat{BCF}$ ont même amplitude.

4. Une liste initiale contient tous les entiers de 1 à 2004 dans un ordre quelconque.

L'opération suivante lui sera appliquée de manière répétée :
Si la première valeur de la liste est le nombre k, les k premières valeurs sont récrites dans l'ordre inverse de celui où elles étaient (les autres valeurs sont inchangées). Notons que si $k = 1$, la liste n'est pas modifiée.

a) Existe-t-il une liste initiale telle que, après lui avoir appliqué l'opération quatre fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?

b) Existe-t-il une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération dix-sept fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?

c) Existe-t-il, pour tout naturel n tel que $1 \leq n \leq 2004$, une liste initiale telle que, après lui avoir appliqué l'opération n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?

d) Pour toute liste initiale, existe-t-il nécessairement un naturel n tel que, après avoir appliqué l'opération à la liste n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position ?

7.3 Finale 2005

1. Dans l'expression

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_1x_n + \cdots + 2x_{n-1}x_n,$$

les nombres réels non nuls x_1, x_2, x_3, …, x_n ne sont pas tous positifs. Existe-t-il des valeurs de ces nombres réels qui rendent le nombre de doubles produits positifs égal au nombre de doubles produits négatifs

a) Si $n = 4$?

b) Si $n = 2005$?

Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le nombre de doubles produits positifs soit égal au nombre de doubles produits négatifs.

2. Dans l'espace de dimension 3, existe-t-il deux points P et Q à coordonnées rationnelles tels que $|PQ| = \sqrt{7}$?

3. Dans le triangle ABC, les droites AE et CD sont les bissectrices intérieures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ respectivement ; E appartient à BC et D appartient à AB. Pour quelles amplitudes de l'angle $\widehat{ABC}$ a-t-on certainement

a) $|AD| + |EC| = |AC|$?

b) $|AD| + |EC| > |AC|$?

c) $|AD| + |EC| < |AC|$?

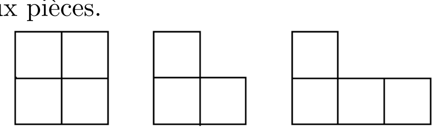
4. La suite infinie
$$1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, \ldots$$
ne comprend que des nombres appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ et est construite de la manière suivante : après le quatrième nombre, chaque nouveau nombre est formé du chiffre des unités de la somme des quatre nombres précédents.

a) Les nombres $2, 0, 0, 5$ apparaissent-ils de manière consécutive dans cette suite ?

b) Les nombres $1, 2, 3, 4$ apparaissent-ils une deuxième fois de manière consécutive dans cette suite ?

7.4 Finale 2006

1. On désire paver un rectangle en utilisant uniquement des pièces identiques à celles dessinées ci-dessous formées de petits carrés de dimension 1×1. Ce pavage doit s'effectuer sans laisser de trou dans le rectangle et sans superposer deux pièces.



Ce pavage est-il possible si le rectangle est de dimension

a) 3×5 ?

b) 3×3 ?

c) $m \times n$ où m et n sont des naturels supérieurs à 2 ?

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Sur DC et BC, on construit les parallélogrammes $DCFE$ et $BCHG$, tels que A, B et G soient alignés, ainsi que A, D et E. Montrer que EH, FG et AC sont concourantes.

3. Déterminer tous les entiers naturels k et n tels que

a) $2^k - 1 = n^2$;

b) $3^k - 1 = n^3$.

4. Les réels positifs x, y sont tels que $y = 2 - x$.

a) Quelle est la valeur maximale de $x^2y^2(x^2 + y^2)$?

b) Pour quelles valeurs de (x, y) ce maximum est-il atteint ?

c) Quel est l'ensemble des valeurs de $x^2y^2(x^2 + y^2)$?