Olympiades Mathématiques Belges

5

Recueil de questions 1999 – 2002

Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française
(ASBL)

Table des matières

Chapitre 1

Préface

Ce recueil de questions des Olympiades mathématiques belges qui se sont déroulées de 1999 à 2002, est édité dans un double but.

Le premier est de fournir aux enseignants du cours de mathématiques ainsi qu'à leurs élèves, une quantité importante de questions pouvant s'intégrer dans les cours dispensés. C'est pourquoi les 720 questions des éliminatoires et des demi-finales, bien que restant séparées selon les trois catégories miNi, miDi et maXi, ont été regroupées en fonction du type de matière et placées, autant que possible, dans un ordre de difficultés croissantes.

Le deuxième est de permettre à qui le souhaite de se préparer à participer à l'Olympiade. Dans cette perspective, des tableaux permettent de reconstituer facilement les questionnaires tels qu'ils ont été proposés aux participants des quatre Olympiades concernées.

Les 48 questions posées lors des finales figurent dans la dernière partie du document.

Le texte qui fait suite à ce préambule est de Francis Buekenhout, le « père » de l'Olympiade mathématique belge. Il constitue, tout à la fois, un regard posé sur une aventure extraordinaire qui a débuté en 1976 et l'expression d'une grande espérance et d'une forte conviction : celle que les jeunes que sont les élèves possèdent en eux les germes de la compétence et du talent.

Nous vous souhaitons de tirer le plus grand profit de cette brochure !

Pascal Dupont   Claude Villers

1.1 L'Olympiade mathématique belge

L'Olympiade mathématique belge ou O.M.B. est née en 1976. Elle a traversé sans interruption toutes ses éditions annuelles successives. Les dernières de celles-ci ont permis d'enregistrer plus de 28 000 inscriptions et environ 22 000 participants effectifs en Communauté française et au Grand-Duché de Luxembourg.

De quoi remplir un stade important si on les réunissait ! Ils furent au travail durant les mêmes 90 minutes au cours d'un même après-midi de janvier.

Je reconnais la paternité de cette belle organisation mais il importe de souligner que son pouvoir organisateur est la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française ou SBPMef qui compte environ 1200 membres. Il convient de souligner davantage encore que le succès de l'épreuve repose entièrement sur une foule structurée de bénévoles. Selon mon estimation prudente il s'agit d'environ 400 personnes. Des professeurs qui se chargent d'organiser et de faire passer le concours à la base c'est-à-dire dans les écoles.

Cette observation nuance modestement la célèbre et réelle démotivation des enseignants. Au sommet de cette hiérarchie ou plutôt au centre, figurent des responsables divers au nombre d'une dizaine qui réalisent l'organisation et le fonctionnement par un travail opiniâtre et quasi quotidien. Dans ces cas-là, on préfère souvent ne pas citer de noms sous prétexte des oublis mais je veux m'avancer ici en citant dans le désordre des personnes qui se sont longuement illustrées : Marianne Potvliege, Claudine Hamoir-Festraets, Jean-Paul Doignon, Pascal Dupont, Christian Van Hooste, Claude Villers, Willy Vanhamme, Lucien Kieffer, Marc De Neef, Georges Delande, Roger Bex, Alfred Warbecq, Christiane Vandeputte, Pierre Van Elsuwé, Monique Wilmet, Henri Stéphenne...

Le concours évolue en trois tours comme on dit en tennis. D'abord l'éliminatoire, puis la demi-finale et enfin la finale. La demi-finale est organisée dans 10 centres régionaux qui ont leurs équipes de responsables propres. Les responsables régionaux jouent un rôle crucial et difficile en liaison avec les écoles et avec le Secrétariat National. Quelques-uns figurent au nombre des personnes citées ci-dessus. Les demi-finales et les Centres Régionaux furent mis en place en 1982. Ces dernières années, les demi-finales ont regroupé environ 2500 participants durant les mêmes 90 minutes d'un mercredi après-midi en février.

Quels furent et quels sont les principes directeurs de l'O.M.B. ?

Le premier gouverne les autres. C'est l'importance des problèmes dans l'activité mathématique de tout niveau et de toute époque en tout lieu. Cette importance déborde du cadre mathématique. Je cite G. Polya (*Mathematical Discovery*, 1962).

> *Résoudre un problème, c'est chercher un chemin au travers d'une difficulté, un chemin pour contourner un obstacle ou qui permette d'atteindre un but qui n'est pas directement accessible. Résoudre des problèmes est le propre de l'intelligence, et l'intelligence est l'attribut propre de la nature humaine : résoudre des problèmes est l'activité la plus spécifiquement humaine.*

Une parenthèse s'impose ici. Le grand public y compris ses couches les plus cultivées continuent à répandre fièrement le stéréotype selon lequel les mathématiques sont une science achevée. Rien n'est plus faux. Des centaines de milliers de résultats nouveaux sont publiés chaque année et ce rythme de production a connu une croissance accélérée depuis la Renaissance. Ce gigantesque chaos que nul ne peut dominer, est fondé sur des problèmes. Le traitement mathématique d'informations consiste notamment en observations de ces informations par le cerveau, avec ou sans échanges entre des individus. L'observation se fait en formulant des questions et en tentant d'y répondre. La réponse peut exiger de nouvelles questions et ainsi de suite. Certaines questions peuvent devenir plus significatives par leur persistance, la simplicité de leur énoncé en vue de mémorisation et de transmission, par les liens qu'elles évoquent entre des domaines plutôt séparés, etc. Ainsi naissent des problèmes. Il a été écrit que les problèmes sont le pain quotidien du mathématicien. C'est un fait commun à toute production mathématique et à toute époque. Une question pourrait être un problème pour l'enfant de 7 ans et devenir trop facile, immédiate un an plus tard. Lire 33 dans la rue est un problème à 5 ans. Peu après, il devient banal. Peu avant, il est inaccessible. Chacun est confronté constamment à la résolution de problèmes mathématiques soit modestement dans la vie quotidienne, soit pour la détente sous forme de jeux. Nombreux sont les mathématiciens convaincus que les problèmes mathématiques peuvent et doivent jouer un rôle essentiel dans toute formation. Nous étions quelques--uns à partager cette conviction en 1976 et encore à présent. Mais pourquoi faut-il insister si c'est tellement évident ? Ce ne l'est pas pour le grand public. Malheur au professeur qui poserait trop de problèmes et surtout qui voudrait que chacun en fasse. Il irait à l'encontre du courant égalitaire dominant de plus en plus.

Un deuxième principe à la base de l'O.M.B. est la conviction que l'éducation se doit d'être ludique. Pour qu'un individu de 8 ans ou de 65 ans progresse dans un problème intéressant il est préférable de stimuler son enthousiasme. Ainsi, l'O.M.B. est un jeu !

Un troisième principe découlant pour nous du deuxième est l'intérêt de la compétition. L'expérience éducative sur le terrain montre que l'enthousiasme peut être stimulé de manière importante par l'idée de compétition. On ose à peine l'écrire à notre époque où l'idée de compétition est devenue abusivement exorbitante dans tant de domaines de nos existences et à l'opposé extirpée dans le domaine scolaire au nom de l'égalitarisme auquel j'ai déjà fait allusion. Si j'osais un sarcasme, on peut craindre qu'un jour on ne fasse plus de mathématiques dans nos classes sous prétexte que certains sont avantagés. Collègues, ce n'est pas un sarcasme ! Sous couvert de mathématique, on n'offre guère de problèmes dans nos classes. Les bénévoles qui font fonctionner l'O.M.B. et les jeunes participants doivent le saisir plus ou moins consciemment. L'O.M.B. répond à un besoin trop peu ou pas satisfait.

Un quatrième principe qui rejoint les précédents et qui les développe est de penser non pas à quelques « anormaux » aimant les maths mais à tous les enfants et adolescents, eh oui. Si la mathématique consiste dans sa quintessence en traitement d'informations par le cerveau, on peut croire que cette activité constitue un bon entraînement pour ce cerveau, on peut croire que cette activité est ainsi favorable à la résolution d'autres problèmes et on peut avoir la faiblesse de croire que cette activité est bénéfique pour tous. Quand on demande à quoi servent les maths ou qu'on doute de leur utilité il faut répondre par leur efficacité à poser des problèmes et à les résoudre. Encore convient-il que l'enseignement aborde vraiment des problèmes.

À l'O.M.B. en 1976, nous allions donc tenter d'offrir la joie du jeu-compétition à tous sans forcer personne.

Un cinquième principe à mes yeux essentiel est d'échapper au terrorisme des examens. L'O.M.B. évalue. Et de quelle manière prestigieuse pour ceux qui sortent du lot : élèves, parents, professeurs, écoles. Et de quelle manière prestigieuse pour tous ! Le cinquième principe est basé sur le réalisme. Comment faire ? S'adresser à des inscriptions individuelles ? Pas pour une compétition de masse. Trop difficile à gérer. Nous avons opté pour un contact avec les écoles de tous réseaux. Un pluralisme réussi dans le pouvoir organisateur qu'est la SBPM, dans les structures de l'O.M.B., dans son fonctionnement et surtout dans l'adhésion de la base. S'adresser à toutes les écoles ? Mais encore ? Nous ne pensions qu'aux écoles secondaires de toutes les filières ! Pas aux écoles primaires. On peut certes concevoir une version de l'O.M.B. destinée aux écoles primaires mais nous n'étions pas armé pour cette tâche et à l'heure actuelle la SBPMef et son « armée » de l'O.M.B. ne me semblent toujours pas armés pour franchir ce pas. Il le sera probablement par une autre instance. Soit. Mais comment toucher toutes les écoles secondaires ? Il fallait une liste d'adresses.

Elle était disponible dans une publication du Ministère de l'Éducation Nationale. Il faut que chaque école participant au jeu ait un professeur responsable volontaire. Il est chargé de l'inscription des concurrents, en nombre quelconque, de réceptionner les questionnaires, de faire passer le premier tour, de nous communiquer un histogramme des résultats. Telle école peut avoir 400 concurrents. Telle autre peut en avoir un seul. Il n'y a pas de classement officiel des écoles ni même de classement officieux que je sache mais des observations sont possibles. Tous les élèves de la 1^{e} à la 6^{e} étaient invités et le sont encore. Le Secrétariat National, une appellation qui s'est maintenue malgré son caractère communautaire et l'impressionnante présence luxembourgeoise, dresse un histogramme global reprenant les résultats de toutes les écoles et le communique à celles-ci. Ainsi, chacun peut se situer. Mon classement serait par exemple 152^{e} sur 760. Pas mal. Et si j'étais 639^{e} ? Ce n'est qu'un jeu et l'important vous le savez est de participer. Une autre fois, je ferai mieux. Je vois d'ici votre sourire méfiant. Et si tricherie il y a ? Réponse : si elle existe, elle ne peut guère permettre de profits. Nous n'avons pas longtemps envisagé de faire permuter entre eux les professeurs responsables, de désigner des arbitres voire des inspecteurs. L'O.M.B. se base sur la confiance. En outre, la tricherie ne pourrait obtenir aucun bénéfice si ce n'est de participer à la demi-finale. Il n'empêche que ce genre de considération agite encore de nombreuses discussions. Certains sont plus méfiants que d'autres mais la naïveté domine. Il n'est pas exclu que la confiance si souvent refusée aux professeurs et aux écoles soit un facteur de réussite de l'O.M.B.. J'aime à le croire. Les meilleurs résultats individuels en demi-finale, environ une centaine, sont convoqués à une finale. On m'a souvent demandé si je suis élitiste et parfois on ne me l'a pas envoyé dire. J'ai fini par comprendre que c'est mal vu. J'ignore encore ce qu'est le contraire d'élitiste. On veut parfois me persuader que c'est « démocratique » mais la démarche est à vrai dire démagogique. Nous voulions nous adresser à tous et pensions à eux avant tout mais nous voulions souligner les meilleurs. N'est-ce pas la véritable démocratie ? Les meilleurs en finale sont classés. Il y a une proclamation et un palmarès.

Le sixième principe consistait à cerner la forme du questionnaire. Un correcteur allait-il passer trois mois à évaluer les copies de 760 participants ? La solution ? Un questionnaire à choix multiples. Il demeure très discuté parmi nous. Sa correction est ultra rapide. Le participant introduit ses réponses sur une seule feuille et celle-ci est corrigée à l'aide d'une grille. Ultra rapide. Proche de l'informatisation à laquelle nous avons toujours rêvé. C'est la pertinence des choix multiples qui est souvent contestée. On peut répondre au hasard et horreur, obtenir la bonne réponse ! Notre dissuasion ? Il y a toujours 5 réponses proposées. Ni trois, ni sept ! Un bon équilibre. Autre dissuasion ? ≪ Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse ≫. Ce système nous plaît depuis longtemps. Vous direz : il n'empêche que le concurrent peut procéder par éliminations successives et déterminer ainsi la bonne réponse sans maîtriser entièrement la question. Dissuasion : introduire dans la 5e réponse une possibilité d'ouverture du style ≪ aucune des 4 réponses précédentes ≫. Bref, je n'ai pas l'intention de vous convaincre sinon du fait que les choix multiples font l'objet dans les discussions pédagogiques de certains arguments inexacts. Force est de reconnaître cependant que les ≪ têtes ≫ de l'O.M.B. n'aiment pas uniformément les choix multiples. Nous avons ≪ inventé ≫ aussi les questions dont la réponse est nécessairement un nombre entier compris entre 0 et 999. C'est un choix multiple déguisé : on offre le choix parmi 1000 réponses ! Ce n'est pas tout ! Il convient que chaque question soit suffisamment brève, qu'elle puisse être résolue en quelques minutes, du moins en principe, qu'elle soit dépourvue de toute ambiguïté, inattaquable dans sa forme, dans sa réponse et qu'elle soit si possible originale... Très très difficile et très très long à élaborer. La substance même du concours. Une des tâches les plus délicates, conduite par le jury constitué d'une vingtaine de personnes. Un jury qui est lui-même chapeauté par un président et un secrétaire dont le travail est immensément difficile. La demi-finale fonctionne selon le même schéma. Chaque année exige ainsi la production de six questionnaires de 30 questions chacun. Pour certains, la tentation de réduire le nombre de questions est très grande. Le plus simple serait qu'il n'y ait pas de questions. Et en finale ? Nous donnons quatre problèmes à traiter en quatre heures. Il est demandé d'en rédiger une solution complète avec la démonstration obéissant aux impératifs de logique et de rigueur largement communs aux mathématiciens de notre temps. Très exigeant pour les concurrents soumis à des standards qu'ils ignorent le plus souvent. Parmi les plus forts, la densité de surdoués est élevée au fil des années. Une belle récompense pour tous ! Les surdoués ne sont pas le centre de nos préoccupations mais ils nous font grand plaisir. Ils montrent que notre travail a un sens. Il convient de se rappeler que la science mathématique millénaire s'est élaborée et s'élabore plus que jamais par des surdoués. Bien entendu, on voudrait savoir aussi ce qu'est le sens de l'O.M.B. pour la masse. La seule réponse que nous possédons est la fidélité des élèves, des professeurs et des écoles au fil des années et un engouement reconnu.

Le septième principe est constitué par les trois niveaux de l'épreuve qualifiés de miNi, miDi et maXi et destinés respectivement aux élèves de 1e–2e, de 3e–4e et de 5e–6e. En 1976, l'idée était de traiter tous les élèves pareillement. Une grande audace rompant avec le célèbre ≪ saucissonnage ≫ horizontal de notre éducation. Une audace qui nous paraissait nécessaire : certains problèmes mathématiques requièrent peu de connaissances. L'imagination est essentielle. Il n'empêche que c'était trop. Les connaissances acquises et l'expérience dans une science cumulative comme les mathématiques jouent un très grand rôle. Dès 1977, nous avons instauré la division en mini-maxi récoltant 893 et 1130 participants. La confrontation verticale nous a valu de nombreuses satisfactions. Il n'empêche que les discussions sur l'injustice du système ont survécu. En 1996, nous passions au détriplement. Pas facile à gérer. Désormais, il y a trois olympiades dans l'O.M.B.. La catégorie la plus peuplée est la miNi avec 10 500 participants en 2001, ce qui représente près de la moitié du total. À mon sens, un bon signe pour les mathématiques mais déconcertant pour bien des personnes qui se figurent que le goût des maths vient après 17 ans. Si j'étais professeur dans une école ou directeur, j'aimerais me positionner par rapport à d'autres grâce à l'O.M.B.. Il est permis de croire que je ne suis pas le seul à penser dans ces termes.

Et les coûts ? L'O.M.B. est autofinancée et bénéficiaire. Chaque participant paye un droit d'inscription de 1,25 euro. Le bénévolat représente évidemment une clé marquante de l'équation financière. L'O.M.B. mériterait néanmoins le financement d'un emploi administratif à temps plein. En résumé, l'Olympiade mathématique belge est un grand succès dû en partie à l'efficacité, la rigueur, la disponibilité et l'enthousiasme de ses nombreux dirigeants. Elle a servi de modèle à bon nombre d'autres disciplines. Elle offre un stock considérable de problèmes intéressants pour les professeurs et le grand public.

Francis Buekenhout
(Université Libre de Bruxelles)

1.2 Tableau des participations successives

Année	miNi		miDi		maXi	
1976	-		-		760	
1977	893		-		1130	
1978	1012		-		1271	
1979	1204		-		1447	
1980	1390		-		1778	
1981	1482		-		1849	
1982	3021	(570)	-		3164	(693)
1983	3010	(664)	-		3292	(689)
1984	4424	(871)	-		3933	(782)
1985	5563	(926)	-		4621	(836)
1986	6339	(981)	-		5146	(871)
1987	7779	(1249)	-		6285	(1088)
1988	8149	(1125)	-		6834	(1086)
1989	9140	(1250)	-		7632	(1140)
1990	10488	(1195)	-		8236	(1154)
1991	7517	(1074)	-		5568	(973)
1992	9967	(1266)	-		6715	(984)
1993	11020	(1215)	-		7941	(1006)
1994	10498	(1314)	-		7288	(1065)
1995	11082	(1373)	-		7423	(1082)
1996	8909	(959)	7129	(919)	4937	(730)
1997	8993	(954)	6838	(972)	5038	(765)
1998	9805	(979)	6786	(842)	5376	(730)
1999	9934	(925)	6365	(719)	4995	(654)
2000	10306	(980)	6603	(770)	4811	(662)
2001	10576	(1022)	6598	(825)	4592	(650)
2002	10758	(1030)	6675	(786)	4463	(637)

(Entre parenthèses, figurent les nombres de demi-finalistes.)

1.3 L'Olympiade mathématique internationale

Qu'elles soient nationales ou internationales, les Olympiades mathématiques s'inscrivent dans l'évolution actuelle de la pédagogie des mathématiques vers un enseignement faisant une plus grande part à l'activité personnelle des élèves. Privilégiant la réflexion à la mémorisation encyclopédique, elles proposent aux élèves des questions nécessitant une bonne compréhension des concepts, ainsi que des capacités d'analyse, de synthèse et d'imagination. L'O.M.I constitue l'aboutissement logique du processus qui, pour l'élève belge, commence avec la participation à l'O.M.B. L'Olympiade mathématique internationale a été organisée pour la première fois en 1959. Pendant plusieurs années, seuls les pays du bloc soviétique y participaient. Elle s'est élargie progressivement. L'O.M.I. est organisée par un Comité désigné par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Celle-ci est la section pédagogique de l'Union Mathématique Internationale, organisme lié à l'UNESCO. La Belgique est représentée au sein de cette Union via son Comité National de Mathématiques, lequel émane de l'Académie Royale des Arts, Sciences et Lettres. Lorsqu'un pays désire organiser l'O.M.I., son gouvernement fait (plusieurs années à l'avance) acte de candidature. Le moment venu, le pays organisateur adresse des invitations officielles aux pays susceptibles de participer. En Belgique, l'invitation est reçue par le Ministère des Affaires Étrangères, qui la transmet aux deux Ministères Communautaires de l'Enseignement. Chaque pays peut présenter un maximum de 6 élèves, n'ayant pas encore entamé l'enseignement supérieur. Chaque élève est invité à résoudre 6 problèmes. La moitié, au plus, des concurrents sont récompensés par des médailles d'or, d'argent ou de bronze. La Belgique a participé pour la première fois à l'O.M.I. en 1969, sans aucune préparation. Les résultats ne furent guère brillants. À la suite de la création de l'O.M.B., une seconde tentative eut lieu en 1977. Les résultats furent meilleurs mais néanmoins décevants. La SBPMef proposa alors à la Direction Générale de l'Organisation des Études d'assurer la préparation et la sélection des concurrents belges, ce qui fut fait à partir de 1979. Quelques années plus tard, la Communauté Néerlandophone exprima le désir de participer également à l'O.M.I. Depuis, la délégation belge est composée en parts égales d'élèves francophones et néerlandophones.

En vingt-deux participations, les concurrents belges ont obtenu une médaille d'or, sept médailles d'argent et trente-trois médailles de bronze. Ces résultats placent la Belgique au milieu d'un classement dominé par les grands pays : Chine, Russie, USA, Allemagne. En moyenne, la Belgique se classe honorablement parmi les petits pays. La SBPMef agit avec l'accord et pour le compte du Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation. Elle repère des élèves brillants parmi les participants à l'Olympiade mathématique belge. Elle les invite à prendre part à des week-ends de préparation, qui se déroulent au domaine de La Marlagne à Wépion. Les séances de travail sont assurées par des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et de l'enseignement universitaire.

1.4 La SBPMef

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française est née en 1975 à la suite d'une restructuration de la « Société Belge des Professeurs de Mathématique » créée elle-même en 1953. Son but principal est de contribuer à la promotion et à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique.

La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde.

La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un moyen d'expression et un art de raisonner. Les grandes étapes de son développement ont toujours correspondu à celles de l'évolution de la pensée humaine. Ainsi, elle a joué et continue de jouer un rôle de premier plan dans le développement culturel de l'humanité. D'où l'importance de l'objectif que s'est fixé la SBPMef.

La SBPMef est une association sans but lucratif qui se veut représentative de l'ensemble des professeurs de mathématique de la partie francophone du pays. Elle rassemble des enseignants de tous les réseaux (Communauté française, Enseignement catholique, Enseignement officiel neutre subventionné, Enseignement libre subventionné indépendant) et de tous les niveaux d'enseignement (instituteurs, régents, licenciés, professeurs d'écoles supérieures, universitaires ou non universitaires). Sa réflexion porte sur toutes les facettes de l'enseignement des mathématiques. Elle a ainsi été amenée à consacrer une grande partie de son activité à des sujets tels que l'impact sur l'enseignement des moyens modernes de traitement de l'information, les idées pédagogiques nouvelles, l'évaluation, les socles de compétence...

Le contenu des programmes de cours et les questions d'organisation de l'enseignement des mathématiques retiennent également son attention.

Pour nourrir sa réflexion et diffuser un maximum d'information, la SBPMef s'est dotée de moyens qui ont fait la preuve de leur efficacité. Chaque année, elle organise un congrès de trois jours où plus de deux cents professeurs échangent leurs expériences. La revue Mathématique et Pédagogie et le bulletin d'informations SBPM-Infor, ainsi que diverses brochures constituent des supports d'information à la disposition des membres. Des commissions permanentes, auxquelles peuvent participer tous les membres, réfléchissent plus particulièrement à l'évolution de l'enseignement de la mathématique au niveau secondaire et préparent les prises de position de la Société.

La SBPMef s'adresse aussi directement aux élèves, par le canal de la revue Math-Jeunes et de l'Olympiade mathématique belge. Elle les incite ainsi à s'intéresser à l'activité de base du mathématicien, à savoir la résolution de problèmes.

La préparation des jeunes qui représentent la Communauté française de Belgique à l'Olympiade mathématique internationale est également assurée par la SBPMef.

Enfin, la SBPMef tient sa place au sein de la communauté mathématique nationale et internationale et plus particulièrement au sein des groupes qui se préoccupent de l'enseignement des mathématiques. Une convention l'associe aux activités du CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques).

Au niveau institutionnel, de nombreux contacts lient la SBPMef à diverses sociétés étrangères, avec qui elle échange des informations et des publications. Au niveau individuel, nombreux sont les membres de la SBPMef qui participent aux congrès internationaux qui ont lieu chaque année.

Enfin, la SBPMef figure parmi les membres fondateurs de la Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques créée le 12 mai 1999.

RENSEIGNEMENTS PRATIQUES :

Siège administratif :	Rue de la Halle, 15 B-7000 MONS
Tél+Fax :	065.37.37.29
E-mail :	`sbpm@umh.ac.be`
Adresse Internet :	`http://www.sbpm.be`

En consultant les pages de ce site, vous pourrez trouver tous les renseignements utiles concernant les activités et les publications de la SBPMef.

1.5 Conventions utilisées

Les notations chiffrées qui figurent en regard de chacune des questions permettent de déterminer s'il s'agit d'une question d'éliminatoire ou d'une question de demi-finale, la catégorie concernée et le numéro de la question dans le questionnaire original.

- `E`a : Éliminatoire de l'année a,
  `D`a : Demi-finale de l'année a ;
- `N`q : Catégorie miNi, question q,
  `D`q : Catégorie miDi, question q,
  `X`q : Catégorie maXi, question q.

Exemple :

`D01`
`D18`

signifie qu'il s'agit de la 18e question de la demi-finale miDi de 2001.

Chapitre 2

Éliminatoires et demi-finales miNi

2.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

	E99	E00	E01	E02	D99	D00	D01	D02
N01	217	107	1	125	52	51	16	25
N02	191	72	82	56	203	89	13	64
N03	231	57	97	213	37	123	141	11
N04	180	186	223	179	225	21	41	15
N05	10	71	8	50	117	34	214	14
N06	23	164	29	26	69	161	173	83
N07	87	86	121	150	102	80	182	110
N08	176	2	7	134	218	175	53	24
N09	208	104	157	226	238	40	35	32
N10	91	212	200	156	181	33	90	27
N11	28	158	177	131	48	136	112	114
N12	230	174	138	195	163	77	19	185
N13	113	92	221	143	115	118	144	194
N14	85	78	192	190	119	74	39	60
N15	55	30	126	132	88	44	210	93
N16	98	165	122	58	116	4	6	96
N17	54	205	171	79	239	12	220	38
N18	219	73	140	46	199	101	147	211
N19	109	45	202	162	105	63	146	222
N20	232	49	36	62	43	124	75	183
N21	5	172	142	227	237	61	153	151
N22	66	168	20	65	204	145	81	207
N23	31	9	94	59	188	100	17	3
N24	234	215	22	209	76	128	189	149
N25	240	130	235	42	47	154	178	84
N26	67	229	170	99	139	193	197	224
N27	160	169	201	137	233	166	228	95
N28	68	103	236	106	108	206	18	155
N29	198	70	152	135	187	167	120	196
N30	148	159	133	184	129	127	216	111

2.2 Arithmétique & algèbre

1. E01 N01
Que vaut $1 + 2 \times 3 + 4$?

(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15 (E) 21

2. E00 N08
Que vaut $3 - (2 - (1 - (3 - (2 - (1 - 3)))))$?

(A) -3 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 3

3. D02 N23
Que vaut $1001 + 2002 + 3003 + \cdots + 9009$?

(A) 36 036 (B) 45 045 (C) 45 450 (D) 55 055 (E) 55 550

4. D00 N16
Sans réponse préformulée — À partir du deuxième, chaque nombre d'une liste s'obtient en ajoutant 1 au double du précédent. Si le premier nombre est 1, quel est le quatrième ?

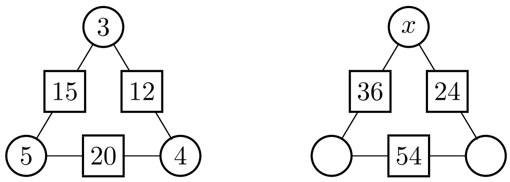
5. E99 N21
Jeanne note trois nombres. En les additionnant deux à deux, elle obtient les sommes 63, 65 et 68. Quel est le plus petit des trois nombres notés ?

(A) 31 (B) 30 (C) 28 (D) 25 (E) 23

6. D01 N16
Un milliard de secondes font environ

(A) 310 ans ; (B) 31 ans ; (C) 3 ans ; (D) 3 mois ; (E) 3 jours.

7. E01 N08
Sans réponse préformulée — Dans le schéma de gauche, les carrés situés aux milieux des côtés du triangle contiennent les produits des nombres positifs figurant dans les cercles qui occupent les sommets du triangle ; si le schéma de droite suit la même règle, que vaut x ?



8. E01 N05 Laquelle des affirmations suivantes est exacte ?

(A) $(3^3+3)\times 3+3\times 3+\dfrac{3}{3}$ est différent de 100.

(B) $4\times 4\times 4+4\times 4+\left(4+\dfrac{4}{4}\right)\times 4$ est différent de 100.

(C) $(5+5)\times(5+5)$ est différent de 100.

(D) $\left(9+\dfrac{9}{9}\right)\times\left(9+\dfrac{9}{9}\right)$ est différent de 100.

(E) Les quatre expressions précédentes sont toutes égales à 100.

9. E00 N23 La suite des nombres naturels est écrite sans aucun séparateur :

$$0123456789101112\ldots$$

Quel est le 46e chiffre de cette liste ?

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

10. E99 N05 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre naturel dont l'écriture décimale comporte trois chiffres distincts ? (Le premier chiffre ne peut être nul.)

11. D02 N03 Lequel des nombres suivants est le plus proche de $15{,}95\times 2{,}478$?

(A) 30 (B) 32 (C) 36 (D) 40 (E) 48

12. D00 N17 Combien y a-t-il de nombres naturels inférieurs à 14 et premiers avec 14 ?

(A) 6 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

13. D01 N02 Dans la multiplication incomplète ci-contre, que vaut le chiffre x ? (Les points d'interrogation représentent différents chiffres inconnus.)

$$\begin{array}{r} ?\,5\,6\,4 \\ \times \quad\quad ? \\ \hline 1\,3\,x\,?\,2 \end{array}$$

(A) 8 (B) 6 (C) 5 (D) 1 (E) 0

14. D02 N05 Si n est un entier, lequel des nombres suivants est nécessairement impair ?

(A) $n+3$ (B) $2n+3$ (C) $3n$ (D) n^2+1 (E) n^3

15. D02 N04 Si $a = 4$, $b = 2$ et $c = 3$, alors $a + b \cdot 10 + c \cdot 100 =$

(A) 324 (B) 360 (C) 423 (D) 6300 (E) 420300

16. D01 N01 $10 + 9 \times 10 \times 11 =$

(A) 111 (B) 1000 (C) 1080 (D) 2090 (E) 9900

17. D01 N23 L'un des nombres suivants est à la fois la somme de trois naturels consécutifs et la somme de cinq naturels consécutifs. Lequel ?

(A) 42 (B) 43 (C) 44 (D) 45 (E) 46

18. D01 N28 *Sans réponse préformulée* — Il existe un seul naturel p tel que p, $p+2$ et $p+4$ soient tous trois premiers ; que vaut p ?

19. D01 N12 Deux nombres premiers jumeaux sont deux nombres premiers dont la différence est 2, comme par exemple 3 et 5, 5 et 7 ou encore 11 et 13. L'un des nombres suivants *n'*est *pas* le plus petit des éléments d'une paire de nombres premiers jumeaux. Lequel ?

(A) 17 (B) 59 (C) 101 (D) 107 (E) 119

20. E01 N22 Dans la multiplication $2001 \times 4a73 = 9\,750\,a73$, a représente un chiffre inconnu ; lequel ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

21. D00 N04 Que vaut $6a$ si $3a - 1 = 2b$?

(A) $4b-1$ (B) $4b$ (C) $4b+1$ (D) $4b+2$ (E) $4b+3$

22. E01 N24 Soit a, b et c trois naturels non nuls et différents de 1, tels que $a(b+c) = 1001$. Si l'un d'entre eux vaut 100, quelle est la somme des deux autres ?

(A) 11 (B) 50 (C) 77 (D) 91 (E) C'est impossible.

23. E99 N06 En laquelle des cinq expressions ci-dessous se simplifie $x + 5 - 5(x - 1)$?

(A) $2x - 1$ (B) $-4x + 6$ (C) $2x + 10$ (D) $-4x + 10$ (E) $-4x$

24. D02 N08 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre naturel, supérieur à 2, qui est à la fois un carré parfait et un cube parfait ?

25. D02 N01 $1^3 =$

(A) -3 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 3

26. E02 N06 $2^2 \times 3 + 2 \times 3^2 =$

(A) 30 (B) 48 (C) 126 (D) 180
(E) Un autre nombre que ceux qui précèdent.

27. D02 N10 Le millième de $2^6 \times 5^3$ est

(A) 4 (B) 8 (C) 20 (D) 40
(E) Un autre nombre que les précédents.

28. E99 N11 Que vaut $72{,}3/10^3$?

(A) 2,41 (B) 0,0241 (C) 72,3 (D) 0,723 (E) 0,0723

29. E01 N06 Que vaut la différence des carrés des nombres 8 et 5 augmentée du double du produit de ces nombres ?

(A) 49 (B) 79 (C) 89 (D) 119 (E) 169

30. E00 N15 Que vaut le carré de la somme de 3 et de 1 ?

(A) 4 (B) 10 (C) 16 (D) 91 (E) 100

31. E99 N23 Parmi les nombres suivants, quel est celui dont le carré vaut 0,000 121 ?

(A) 0,011 (B) 0,0011 (C) 0,0101 (D) 0,0111 (E) 0,1011

32. $0{,}08^2 - 0{,}02^2 =$
D02
N09
(A) 0,0006 (B) 0,006 (C) 0,06 (D) 0,6 (E) 6

33. Du cube de -1, on soustrait le carré de -4. Que vaut la différence ?
D00
N10
(A) -17 (B) -15 (C) 9 (D) 15 (E) 17

34. Que vaut $(-1)^{-1}$?
D00
N05
(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0 (E) -1

35. En numération décimale (en base 10), 123 représente $1\times 10^2+2\times 10+3$; quelle est l'écriture décimale du nombre qui s'écrit 123 en base 6 ?
D01
N09
(A) 6 (B) 51 (C) 121 (D) 126 (E) 324

36. $-2^2 - 2^2 =$
E01
N20
(A) -2^3 (B) -2^0 (C) 2^0 (D) 2^4 (E) 4^2

37. Que vaut $(-1)^{1998} - (-1)^{1999}$?
D99
N03
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

38. $3^{13} - 2 \times 3^{10} =$
D02
N17
(A) $3^{10} \times 5^2$
(B) $3^{10} \times 2^5$
(C) 3^3
(D) $2^{10} \times 3^2$
(E) $2^{10} \times 5^2$

39. $(5-(4-(3-(2-(1-0)^0)^1)^2)^3)^4$
D01
N14
(A) Vaut -625 ;
(B) Vaut 0 ;
(C) Vaut 625 ;
(D) Est inférieur à -1000 ;
(E) Est supérieur à 1000.

40. D00 N09

Que vaut $(1{,}999 - 2{,}000)^2$?

(A) $-0{,}002$
(B) $-0{,}001$
(C) $0{,}001$
(D) $-0{,}000\,001$
(E) $0{,}000\,001$

41. D01 N04

Lequel des nombres suivants s'écrit n^n pour un certain naturel n ?

(A) 4 (B) 64 (C) 81 (D) 625 (E) 1024

42. E02 N25

Si $y = 2x + 1$, alors $4x + 3 =$

(A) $2\,y + 3$ (B) $2\,y + 1$ (C) $y + 2$ (D) $\frac{1}{2}\,y + 2$ (E) $\frac{1}{2}\,y + 1$

43. D99 N20

Si les cinq nombres $x+1$, $x-2$, $x+3$, $x+2$ et $x/4$ sont récrits dans l'ordre croissant, quel est celui qui se trouve au milieu de la liste obtenue ?

(A) $x + 1$ (B) $x + 2$ (C) $x + 3$ (D) $x/4$ (E) Cela dépend de x.

44. D00 N15

Laquelle des expressions suivantes est égale à $(x + 5)^2 - 5(x + 5)$?

(A) $-2x$
(B) $x^2 - 5x$
(C) $x^2 + 5x$
(D) $-4x - 20$
(E) $x^2 - 5x - 25$

45. E00 N19

Si a et b sont des nombres entiers tels que $3a + b = 4a + 2b$, alors

(A) a et b sont obligatoirement nuls ;
(B) a et b sont obligatoirement opposés ;
(C) a et b sont obligatoirement inverses l'un de l'autre ;
(D) a et b sont obligatoirement égaux ;
(E) a et b sont obligatoirement entiers.

46. E02 N18 La somme du nombre de trois chiffres $2a3$ et du nombre 326 est égale au nombre de trois chiffres $5b9$, qui est divisible par 9. Alors, $a + b =$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

47. D99 N25 Si x est négatif et que $xy = 6$, $yz = 24$ et $xz = 16$, que vaut xyz ?

(A) -2304 (B) -49 (C) -48 (D) 48 (E) 49

48. D99 N11 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de paires de nombres premiers dont la somme est 103 ?

49. E00 N20 La moitié du nombre a, diminuée de 2, dépasse d'une unité le tiers de ce nombre a. Que vaut a ?

(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 30 (E) 36

50. E02 N05 Parmi les nombres suivants, lequel est le plus petit ?

(A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{37}{30}$ (D) $-\frac{1}{5}$ (E) $-\frac{3}{2}$

51. D00 N01 Que vaut $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$?

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{5}$ (D) $-\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

52. D99 N01 *Sans réponse préformulée* — Que vaut $\dfrac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$?

53. D01 N08 $\dfrac{2000 \times 2001 + 2001 \times 2002}{2000 + 2002} =$

(A) 1999 (B) 2000 (C) 2001 (D) 2002 (E) 2003

54. E99 N17 Parmi les nombres suivants, quel est le plus petit qui dépasse $-\frac{11}{7}$?

(A) $-1{,}57$ (B) $-1{,}58$ (C) $-1{,}56$ (D) $-11{,}7$ (E) $-11{,}71$

55. E99 N15

Que vaut le quotient de $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{2}+2$?

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{9}{25}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) 1

56. E02 N02

Que vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$?

(A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{11}$ (D) $\frac{7}{30}$ (E) $\frac{2}{3}$

57. E00 N03

Que vaut le produit de $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}$?

(A) 1 (B) $\frac{16}{9}$ (C) 2 (D) $\frac{145}{72}$ (E) $\frac{289}{72}$

58. E02 N16

$\left(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}\right)=$

(A) $13-\frac{1}{7}$ (B) $13-\frac{1}{6}$ (C) $12+\frac{4}{5}$ (D) $12+\frac{3}{4}$ (E) $12+\frac{2}{3}$

59. E02 N23

Sans réponse préformulée — Quel naturel x satisfait l'égalité $\dfrac{x}{25}=\dfrac{16}{x}$?

60. D02 N14

Parmi les valeurs suivantes du nombre a, lequel donne à la fraction $\dfrac{1}{5+a}$ sa plus grande valeur ?

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

61. D00 N21

Que vaut x si $\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{x}$?

(A) $\frac{35}{2}$ (B) $\frac{2}{35}$ (C) $-\frac{2}{35}$ (D) $-\frac{1}{35}$ (E) $-\frac{35}{2}$

62. E02 N20

Pour quelle valeur de x l'égalité $\dfrac{2}{x-3}=0{,}5$ est-elle vraie ?

(A) $-3{,}5$ (B) 2,5 (C) 4,5 (D) 7

(E) Une autre valeur que les quatre précédentes.

63. D00 N19 L'équation $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = a$ admet pour solution un nombre entier lorsque a est remplacé par l'un des nombres suivants ; lequel ?

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{12}{25}$ (C) $\frac{25}{12}$ (D) 4 (E) 12

64. D02 N02 Combien y a-t-il d'heures dans $\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right)$ d'un jour ?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 13

65. E02 N22 Jean a bu un quart du litre de jus d'orange que sa maman vient de préparer et, pour que cela ne se voie pas, il a remplacé ce qu'il a bu par de l'eau. Peu après, son petit frère opère de la même manière. Quelle est la proportion d'eau dans le dernier mélange ?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{7}{16}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{9}{16}$ (E) $\frac{3}{4}$

66. E99 N22 Étant donné quatre nombres non nuls a, b, c et d, soit $x = \cfrac{a}{\cfrac{b}{\cfrac{c}{d}}}$. Laquelle des égalités suivantes est toujours vraie ?

(A) $x = \cfrac{a}{\cfrac{\frac{b}{c}}{d}}$ (B) $x = \cfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ (C) $x = \cfrac{\cfrac{\frac{a}{b}}{c}}{d}$ (D) $x = \cfrac{\frac{a}{b}}{\cfrac{\frac{c}{1}}{d}}$

(E) Aucune des précédentes

67. E99 N26 Je te donne un tiers de la tarte, mais tu trouves le morceau trop grand et tu me rends le quart de ce que je t'ai donné. Quelle partie de la tarte me reste-t-il alors ?

(A) Cinq douzièmes
(B) La moitié
(C) Trois quarts
(D) Sept douzièmes
(E) Plus rien du tout

68. E99 N28 Des arbres sont plantés tous les trois mètres sur le pourtour d'une place rectangulaire dont la longueur a et la largeur b, exprimées en mètres, sont entières. S'il y a un arbre dans chaque coin de la place, alors :

(A) Les entiers a et b sont impairs ;
(B) Le rapport a/b est entier et multiple de 3 ;
(C) Les rapports a/b et b/a sont tous deux entiers et multiples de 3 ;
(D) Le périmètre de la place, exprimé en mètres, est multiple de 12 ;
(E) L'aire de la place, exprimée en mètres carrés, est multiple de 9.

69. D99 N06 Combien 162 admet-il de diviseurs naturels ?

(A) 10 (B) 15 (C) 24 (D) 25 (E) 30

70. E00 N29 Un nombre naturel qui n'a pas d'autre diviseur impair que 1

(A) Est nécessairement un nombre premier ;
(B) Est nécessairement un nombre impair ;
(C) Est nécessairement une puissance de 2 ;
(D) Peut être n'importe quel nombre pair ;
(E) Peut être n'importe quel nombre naturel.

71. E00 N05 *Sans réponse préformulée* — Quel est le quotient de la division de 3 par 0,06 ?

72. E00 N02 Parmi les nombres suivants, lequel est à la fois pair, multiple de 5, supérieur à 12 et diviseur de 60 ?

(A) 25 (B) 20 (C) 18 (D) 15 (E) 10

73. E00 N18 Lequel des nombres suivants *n*'est *pas* la somme de deux naturels dont le produit est 2000 ?

(A) 120 (B) 141 (C) 262 (D) 405 (E) 1002

74. D00 N14 *Sans réponse préformulée* — Parmi les paires de nombres naturels premiers entre eux dont le plus petit commun multiple est 60, choisissons celle dont la somme est minimale. Que vaut cette somme ?

75. D01 N20 *Sans réponse préformulée* — Un nombre de trois chiffres a son premier et son dernier chiffres identiques ; en outre, il est multiple de 2, de 3 et de 7. Quel est ce nombre ?

76. D99 N24 *Sans réponse préformulée* — Quel est le reste de la division de 3^{1999} par 9 ?

77. D00 N12 *Sans réponse préformulée* — Entre 1492 et 1789, combien y a-t-il de nombres entiers multiples de 17 ?

78. E00 N14 Combien y a-t-il de nombres premiers dont la somme des chiffres est 12 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

79. E02 N17 La somme des diviseurs premiers de 2002 vaut

(A) 33 (B) 34 (C) 104 (D) 105 (E) 1003

80. D00 N07 Le cœur d'une personne de septante ans a battu en moyenne septante coups par minute. Parmi les nombres suivants, lequel est le plus proche du nombre total de battements de ce cœur ?

(A) Deux millions cinq cent mille
(B) Vingt-cinq millions
(C) Deux cent cinquante millions
(D) Deux milliards cinq cents millions
(E) Vingt-cinq milliards

81. D01 N22 Les colliers suivants sont tous construits selon le même schéma.

...

Si n est le nombre de perles noires de l'un d'entre eux et b le nombre de ses perles blanches, alors, dans tous les cas :

(A) $b = n + 3$;
(B) $b = n + 5$;
(C) $b = 2n + 5$;
(D) $b = 3(n + 1)$;
(E) $b = 3(n - 1)$.

82. E01 N02 Trois cents réfugiés seront accueillis dans des villages. Si chaque village en accueille jusqu'à 22, combien de villages faudra-t-il au minimum ?

(A) 13 (B) 14 (C) 22 (D) 278 (E) 6600

83. D02 N06 *Sans réponse préformulée* — Dans un bassin de natation de 25 m, combien faut-il accomplir de longueurs pour parcourir en tout 3,5 km ?

84. D02 N25 *Sans réponse préformulée* — Un escalier compte entre 30 et 100 marches. Si je le descendais par 2, par 3 ou par 4 marches à la fois, il resterait à chaque fois une marche. Par contre, j'arriverais exactement au pied de l'escalier en descendant les marches 5 par 5. Combien cet escalier a-t-il de marches ?

85. E99 N14 Lequel des cinq nombres suivants est un diviseur commun à 666 et 666 666 ?

(A) 2 (B) 6 (C) 7 (D) 9 (E) 37

86. E00 N07 *Sans réponse préformulée* — L'écriture décimale d'un nombre naturel est $x3676$. Si ce nombre est divisible par 36, quel est le chiffre x ?

87. E99 N07 Parmi les 250 premiers nombres entiers strictement positifs, combien y en a-t-il qui sont divisibles par 1, 2, 3, 4 et 5 à la fois ?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 50

88. D99 N15 Il existe des nombres naturels n pour lesquels $n^6 - n^2$ n'est *pas* divisible par l'un des cinq nombres suivants. Lequel ?

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 20

89. D00 N02 Un quart d'une tarte, quel pourcentage de la tarte cela fait-il ?

(A) 1 % (B) 4 % (C) 20 % (D) 25 % (E) 50 %

90. D01 N10 Le prix d'un objet, TVA de 20 % comprise, est de 1500 F. Quel est son prix hors TVA ?

(A) 300 F (B) 1200 F (C) 1250 F (D) 1750 F
(E) Une autre réponse

91. E99 N10 Un étang de jardin contient 100 poissons ; 100 % d'entre eux sont rouges. La moitié des poissons sont retirés. Quelle est alors la proportion de poissons rouges dans l'étang ?

(A) 0 % (B) 25 % (C) 50 % (D) 75 % (E) 100 %

92. E00 N13 Pour faire un bon café, il faut utiliser, parait-il, 1 mesure de chicorée pour 3 mesures de café. Quel est le pourcentage de chicorée dans la mouture ainsi préparée ?

(A) 25 % (B) 33 % (C) 33,33 . . . % (D) 40 % (E) 50 %

93. D02 N15 Philippe a acheté 24 bouteilles de jus d'orange. Grâce à un marchandage, Mathilde a obtenu une réduction de 0,1euro par bouteille ; elle a pu ainsi acheter pour le même prix 2bouteilles de plus que Philippe. Quel est le prix initial d'une bouteille ?

(A) 1,5 (B) 1,3 (C) 1,2 (D) 1 (E) 0,8

94. E01 N23 Une paire de chaussures, qui coutait initialement 100 euros, a subi une première augmentation de 60 %. Une seconde augmentation a ensuite amené le prix au double du prix initial. Quel est le taux de cette seconde augmentation ?

(A) 20 % (B) 25 % (C) 40 % (D) 50 % (E) 80 %

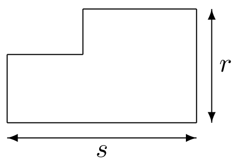
95. D02 N27 *Sans réponse préformulée* — Si b vaut 50 % de plus que a, si c vaut un tiers de plus que b et si d vaut x % de moins que c, que doit valoir x pour que a et d aient la même valeur ?

96. D02 N16 Si je dors 8 heures par nuit pendant la semaine et 11 heures et demie durant chacune des deux nuits du week-end, quel pourcentage de mon temps est consacré à dormir ?

(A) 30 % (B) 33,3 % (C) 35 % (D) 37,5 % (E) 40 %

2.3 Géométrie

97. E01 N03 Tous les angles du polygone ci-contre sont droits. Quel est son périmètre ?



(A) $r + s$ (B) $2r + s$ (C) $r + 2s$
(D) $2r + 2s$ (E) Les données sont insuffisantes.

98. E99 N16 Une fourmi se déplace le long des arêtes d'un cube, arêtes dont la longueur est 1. Si elle se rend d'un sommet au sommet opposé sans passer deux fois par le même point, quelle est la longueur maximale de son trajet ?

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

99. E02 N26 Le cercle et les arcs de cercle qui forment la rosace ci--contre ont le même rayon a. Quelle est leur longueur totale ?

(A) $9a$ (B) $3\pi a$ (C) $12a$ (D) $6\pi a$ (E) $12\pi a$

100. D00 N23 Quel est le rapport du périmètre d'un hexagone régulier à la circonférence du cercle circonscrit ?

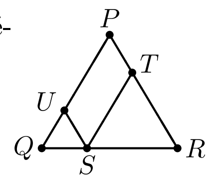
(A) 1 (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{6}{\pi}$ (E) $\frac{3}{\pi}$

101. D00 N18 *Sans réponse préformulée* — Dans la figure ci-contre, les deux hexagones sont réguliers. Le côté du plus petit vaut 1 et celui du plus grand, 2. Quelle est la somme des longueurs des traits représentés ?

102. D99 N07 A, B, C et D sont quatre points dans cet ordre sur une droite. Si $\dfrac{\|AB\|}{\|BC\|} = \dfrac{3}{4}$ et si $\dfrac{\|BC\|}{\|CD\|} = \dfrac{2}{3}$, que vaut $\dfrac{\|AC\|}{\|CD\|}$?

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{5}{6}$ (D) $\dfrac{7}{6}$ (E) $\dfrac{4}{3}$

103. E00 N28 La figure ci-contre est formée de trois triangles équilatéraux PQR, UQS et TSR. Si



$$\begin{aligned} a &= (\|QU\| + \|US\|) + (\|ST\| + \|TR\|)\,, \\ b &= \|PQ\| + \|PR\|\,, \\ c &= 2 \cdot \|QR\|\,, \end{aligned}$$

laquelle des propositions suivantes est exacte ?

(A) $a > b$ et $a > c$.
(B) $b > a$ et $b > c$.
(C) $c > a$ et $c > b$.
(D) $a = b = c$.
(E) La manière dont a, b et c se comparent dépend de la position de S sur $[QR]$.

104. E00 N09 Deux cercles d'un même plan n'ont aucun point commun. Le premier, de rayon 3, est centré en P et le second, de rayon 5, est centré en Q. Quelle peut être, parmi les suivantes, la distance des points P et Q ?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8
(E) Aucune des précédentes.

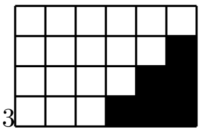
105. D99 N19 L'hypoténuse $[AB]$ d'un triangle rectangle ABC est divisée en 8 segments de même longueur ; par chacun des points de division est menée la parallèle à BC, ce qui détermine 7 segments intérieurs au triangle. Si la longueur de $[BC]$ est 10, quelle est la somme des longueurs de ces 7 segments ?

(A) 33 (B) 35 (C) 40 (D) 45
(E) Elle dépend de la longueur de $[AC]$.

106.

107. E00 N01 Dans la figure ci-contre, le rectangle est divisé en petits carrés de même taille. Quelle fraction du rectangle est ombrée ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

.3 

108. D99 N28 Le point B appartient au segment $]AC[$. Si la longueur du cercle de diamètre $[AC]$ est égale à la somme de celles des cercles de diamètres $[AB]$ et $[BC]$, que vaut le rapport $\|AB\| / \|BC\|$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
(E) N'importe quel nombre strictement positif

109. E99 N19 $PQRS$ est un carré de 10 cm de côté. Que vaut, en centimètres carrés, l'aire de la surface ombrée ?

(A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60
(E) Les informations sont insuffisantes pour le déterminer.

P T S

Q R

110. D02 N07 Je veux représenter ma chambre graphiquement par un rectangle ayant la plus grande aire possible. Le sol de ma chambre est rectangulaire et mesure 3 m sur 4 m tandis que, sur ma feuille de papier, la surface disponible est un rectangle de 36 cm sur 24 cm. À quelle échelle dois-je travailler ?

(A) 1/6 (B) 1/8 (C) 1/9 (D) 1/12,5 (E) 1/15

111. D02 N30 Dans la figure ci-contre, déterminer le rapport de l'aire de l'hexagone ombré $ABXDEY$ à celle de l'hexagone régulier $ABCDEF$, sachant que M et N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DE]$.

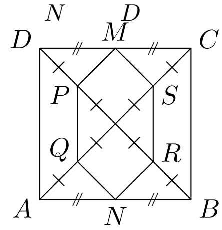
A M B

F Y X C

E N D

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

112. D01 N11 Dans la figure ci-contre, que vaut le rapport de l'aire de l'hexagone $MPQNRS$ à celle du carré $ABCD$?



(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$ (E) 1

113. E99 N13 Dans la figure ci-contre, les cercles ont pour rayon 1 et leurs centres sont les sommets du triangle. Quelle est l'aire de la surface ombrée ?

(A) $\frac{5}{2}\pi$ (B) $\frac{3}{2}\pi$ (C) 4π (D) 3π (E) π

114. D02 N11 Quatre rondelles identiques ont 24 mm de diamètre et sont placées comme le montre la figure ci-contre ; leurs centres sont les sommets d'un carré. Que vaut, en millimètres carrés, l'aire de la partie ombrée ?

(A) $144(4 - \pi)$

(B) $144(\pi - 4)$

(C) $144\pi - 144$

(D) 144π

(E) $144\pi^2$

115. D99 N13 Si le rayon d'un disque augmente de 100 %, de combien augmente son aire ?

(A) De 100 % (B) De 200 % (C) De 300 % (D) De 400 %
(E) De 314 % environ

116. D99 N16 Un carré non réduit à un seul point voit son périmètre (en mètres) et sa superficie (en mètres carrés) exprimés par un même nombre. Quel est ce nombre ?

(A) 0 (B) 4 (C) 8 (D) 12 (E) 16

117. D99 N05 Un cercle et un carré ont le même périmètre. Dans ce cas, une seule des propositions suivantes est exacte. Laquelle ?

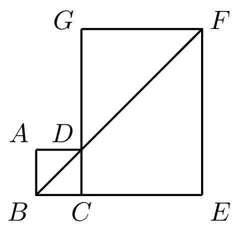
(A) Leurs aires sont égales.
(B) L'aire du cercle est plus grande que celle du carré.
(C) L'aire du carré vaut $\pi/2$ fois celle du cercle.
(D) La diagonale du carré et le diamètre du cercle ont même longueur.
(E) Le côté du carré vaut $3/2$ fois le rayon du cercle.

118. D00 N13 Dans un parallélogramme, les longueurs de deux côtés consécutifs sont 3 et 5. Lequel des nombres suivants *ne* peut *pas* être son aire ?

(A) 1 (B) 2 (C) 8 (D) 15 (E) 16

119. D99 N14 Dans la figure (approximative) ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 1 ; $CEFG$ est un rectangle, $\|CE\| = 2\,\|BC\|$ et B, D et F sont alignés. Quelle est l'aire du pentagone $ABEFD$?

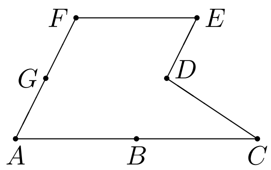
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



120. D01 N29 En chacun des trois sommets d'un triangle équilatéral de côté 3, un arc de cercle de rayon 1 a été tracé. Quel est le périmètre de la figure obtenue, représentée ci-contre par le trait gras ?

(A) $\pi + 3$
(B) $2\pi + 3$
(C) $2\pi - 3$
(D) $3 - \pi/2$
(E) $3 + \pi/2$

121. E01 N07 Dans la figure ci-contre, $ACDG$ est un trapèze et $GDEF$ un parallélogramme ; G est le milieu de $[AF]$ et B celui de $[AC]$; en outre, $\|GD\| = \|AB\|$. L'une des affirmations suivantes est *fausse* ; laquelle ?

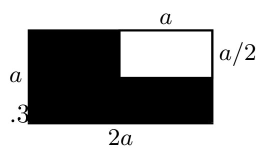


(A) Les triangles GDF et GDA ont même aire.
(B) Les triangles GFE et GDA ont même aire.
(C) Le triangle ACD et le parallélogramme $GDEF$ ont même aire.
(D) Les quadrilatères $ACDG$ et $ADEG$ ont même aire.
(E) Les quadrilatères $ACDG$ et $ADEF$ ont même aire.

122. E01 N16 La longueur totale des arêtes d'un cube est de 36 m ; pour peindre toutes ses faces, combien de pots de peinture faut-il acheter, si les pots contiennent 500 g de peinture et s'il faut 100 g de peinture par mètre carré ?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

123. D00 N03 D'un rectangle de base $2a$ et de hauteur a, un petit rectangle de base a et de hauteur $a/2$ est découpé dans un coin. Que vaut l'aire de la partie restante, ombrée sur la figure ci-contre ?



(A) $\frac{3}{2}a^2$ (B) $5a$ (C) a^2 (D) $\frac{3}{4}a^2$ (E) $2a^2 - \frac{1}{4}$

124. D00 N20 Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle et EF // AB. En outre, $\|AB\| = 6$, $\|AD\| = 12$ et $\|EF\| = 2$. Quelle est l'aire du triangle OEF ?

B 12 C F 6 2 O E A D

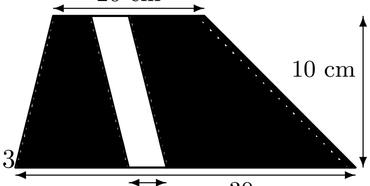
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

125. $, combiendois - jeverserdeseauxde7$ *litres* ?

(A) 30 (B) 147 (C) 300 (D) 1470 (E) 3 000

Pour remplir un réservoir de 2,1 m^3

E02 N01 **126.** E01 N15 Dans la figure (imprécise) ci-contre, la bande blanche est délimitée par deux droites parallèles ; quelle est, en centimètres carrés, l'aire de la partie ombrée du trapèze ?



(A) 200 (B) 210 (C) 220 (D) 230 (E) 240

127. D00 N30 Dans la figure ci-contre, $ADGJ$ est un parallélogramme dont chaque côté est partagé en trois segments de même longueur par les points intermédiaires B, C, E, ..., L. Si l'aire du parallélogramme vaut 54, quelle est celle de la zone ombrée ?

D E F G C H B I A L K J

(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51 (E) 52

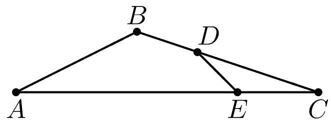
128. D00 N24 Dans la figure ci-contre, les points E, F et G partagent en quatre segments de même longueur la diagonale $[AC]$ du rectangle $ABCD$. Si $\|AB\| = 16$ et $\|AD\| = 32$, que vaut l'aire du triangle BEF ?

B 32 C G 16 F E A D

(A) 48 (B) 54 (C) 60 (D) 64 (E) 100

129. D99 N30

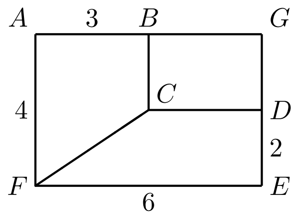
Les côtés $[AC]$ et $[BC]$ du triangle ABC mesurent respectivement 10 et 6. En outre, $\|EC\| = 3$ et $\|DC\| = 4$. Si l'aire du triangle DEC est 3, quelle est celle du quadrilatère $ABDE$?



(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

130. E00 N25

Dans la figure ci-contre, $AGEF$ et $BGCD$ sont des rectangles. Laquelle des propositions suivantes est *fausse* ?



(A) Les trapèzes $ABCF$ et $CDEF$ n'ont pas le même périmètre.

(B) Les trapèzes $ABCF$ et $CDEF$ ont la même aire.

(C) Le périmètre du rectangle $AGEF$ est égal à la somme des périmètres des trapèzes $ABCF$ et $CDEF$.

(D) L'aire du rectangle $AGEF$ n'est pas égale à la somme des aires des trapèzes $ABCF$ et $CDEF$.

(E) La somme des aires des trapèzes $ABCF$ et $CDEF$ vaut les trois quarts de l'aire du rectangle $AGEF$.

131. E02 N11

La somme des longueurs des arêtes d'un cube vaut 60 cm. Quel est le volume de ce cube ?

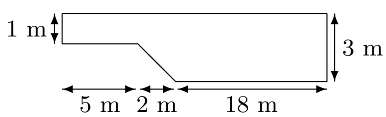
(B) 125 cm^3
(C) 216 cm^3
(A) 27 cm^3
(E) 3600 cm^3
(D) 1000 cm^3

132. E02 N15 *Sans réponse préformulée* — Une boite de forme cubique de 5 cm de côté est remplie, autant que possible, avec des cubes de 2 cm de côté ; ceux-ci sont disposés de telle manière que leurs faces sont parallèles aux parois de la boite. Quel est, en centimètres cubes, le volume restant libre dans la boite ?

133. (B) 620 m^3 (C) 610 m^3 (D) 600 m^3

(E) Une autre réponse

E01 N30 La figure ci-contre représente, sans respecter les proportions, le profil longitudinal d'une piscine de plan rectangulaire, dont la largeur est de 10 m. Quelle est sa capacité ?



(A) 630 m^3

134. E02 N08 Une piscine a la forme d'un parallélipipède rectangle ; sa longueur est de 10 m et sa largeur de 5 m. Lorsqu'elle contient 10 000 litres, quelle est, en centimètres, la hauteur atteinte par l'eau ?

(A) 0,2 (B) 2 (C) 20 (D) 200

(E) Il n'est pas possible de répondre à la question sans connaitre la hauteur de la piscine.

135. E02 N29 Pour faire polir toutes les faces d'une pierre de forme cubique, j'ai dû payer 147 euros ; le polissage coute 50 euros par mètre carré. Quel est le volume de cette pierre ?

(A) 0,343 m^3 (D) 1,143 m^3

(B) 0,490 m^3 (E) 2,940 m^3

(C) 0,857 m^3

136. D00 N11 Un cube métallique plein de 20 cm d'arête pèse 64 kg. Combien pèse un cube plein d'1 cm d'arête, du même matériau ?

(A) 0,8 g (B) 8 g (C) 16 g (D) 0,16 kg (E) 3,2 kg

137. E02 N27 Tous les coins d'un cube en bois sont coupés à mi-arêtes, les sections étant planes. Le polyèdre restant possède

(A) 12 faces et 14 sommets (B) 12 faces et 24 sommets
(C) 14 faces et 12 sommets (D) 14 faces et 24 sommets
(E) 14 faces et 48 sommets

138. E01 N12 Dans la figure (imprécise) ci-contre, que vaut l'angle x ?

(A) 53° (B) 79° (C) 101° (D) 127° (E) 156°

103° x 24° A

139. D99 N26 Dans la figure (imprécise) ci-contre, le triangle ABC est isocèle (avec $\|AB\| = \|AC\|$) et le triangle DEF, qui lui est inscrit, est équilatéral. Si $A\widehat{D}E = 52°$ et $C\widehat{E}F = 64°$, que vaut $B\widehat{F}D$?

D 52° E 64° ? B F C

(A) 40° (B) 58° (C) 60° (D) 64° (E) 76°

140. E01 N18 Dans la figure (imprécise) ci-contre, les droites a et b sont parallèles. Quelle est une mesure de l'angle x ?

150° b 50° x a

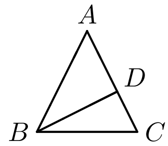
(A) 15° (B) 20° (C) 25° (D) 30° (E) 75°

141. D01 N03 Dans la figure (imprécise) ci-contre, si $\alpha = 30°$ et $\beta = 45°$, alors $\gamma =$

β α γ

(A) 5° (B) 10° (C) 15° (D) 20° (E) 25°

142. E01 N21 Dans la figure (imprécise) ci-contre, $\|AD\| = \|BD\| = \|BC\|$. Si $B\widehat{A}C = 36°$, que vaut $D\widehat{B}C$?



(A) 30° (B) 36° (C) 39° (D) 42° (E) 45°

143. E02 N13

Il existe certainement un triangle isocèle possédant un angle de 16° et un second angle de

(A) 8° (B) 32° (C) 42° (D) 48° (E) 82°

144. D01 N13

Dans le schéma (imprécis) ci-contre, $\|AB\| = \|BC\| = \|CD\|$. Quelle est l'amplitude de l'angle $C\widehat{D}E$?

B
D
28°
93°
35°
E
A
C

(A) 179° (B) 135° (C) 125° (D) 114° (E) 79°

145. D00 N22

Que vaut l'angle intérieur d'un polygone régulier à douze côtés ?

(A) 168° (B) 150° (C) 135° (D) $133°20'$ (E) 120°

146. D01 N19

Sans réponse préformulée — La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un polygone convexe est 3240°. Quel est le nombre de côtés de ce polygone ?

147. D01 N18

Un piéton parcourt le périmètre d'un triangle équilatéral ABC : partant de A, il parcourt $[AB]$, tourne d'un certain angle, parcourt $[BC]$, tourne d'un certain angle, et parcourt enfin $[CA]$. Quelle est la somme des amplitudes des deux rotations ?

(A) 360° (B) 300° (C) 240° (D) 180° (E) 120°

148. E99 N30

Déterminé à la boussole et compté dans le sens horlogique, à partir du nord, le cap pour se rendre du point P au point Q est de 75° et pour se rendre de Q à R, de 180°. Quel cap doit-on suivre pour se rendre directement de P à R si l'on sait que le triangle PQR est rectangle en P ?

(A) 225° (B) 180° (C) 165° (D) 105° (E) 90°

149. D02 N24 Sur les côtés d'un carré $ABCD$, on construit, extérieurement à celui--ci, les triangles équilatéraux ABP, BCQ, CDR et DAS ; puis les losanges $PKQB$, $QLRC$, $RMSD$ et $SNPA$. À propos de l'octogone $PKQLRMSN$, laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

- (A) Tous ses angles intérieurs valent 120°.
- (B) Tous ses angles intérieurs valent 150°.
- (C) Cet octogone est régulier.
- (D) La somme des mesures de ses angles intérieurs vaut deux fois celle des mesures des angles du carré $ABCD$.
- (E) La somme des mesures de ses angles intérieurs vaut trois fois celle des mesures des angles du carré $ABCD$.

150. E02 N07 La roue A tourne de 12 dents dans le sens horlogique (le sens de rotation des aiguilles d'une horloge, indiqué par une flèche dans la figure ci-dessous).

Sens horlogique

A	B	C
36 dents	24 dents	48 dents

Alors, la roue C tourne de

- (A) 60° dans le sens horlogique ;
- (B) 90° dans le sens anti-horlogique ;
- (C) 90° dans le sens horlogique ;
- (D) 60° dans le sens anti-horlogique ;
- (E) 120° dans le sens horlogique.

151. D02 N21 L'angle au sommet d'un triangle isocèle de base $[BC]$ mesure 36°. Le point d'intersection de la bissectrice issue de B et du côté $[AC]$ est noté D. Alors $\|AD\| =$

(A) $\|BC\|$; (B) $\|DC\|$; (C) $\frac{2}{3}\|AB\|$; (D) $\frac{3}{2}\|BC\|$;
(E) $\frac{1}{2}(\|AB\| - \|BC\|)$.

152. E01 N29 Dans le plan muni de coordonnées, si je multiplie les abscisses par 2 et les ordonnées par 3, j'effectue :

(A) Une symétrie centrale ;
(B) Une translation ;
(C) Une symétrie orthogonale ;
(D) Une homothétie de rapport 2/3 ;
(E) Aucune des transformations précédentes.

153. D01 N21 Parmi les transformations qui appliquent un triangle équilatéral sur lui--même, il n'y a pas de

(A) Rotation de 120° ;
(B) Rotation de 240° ;
(C) Rotation de 360° ;
(D) Symétrie axiale ;
(E) Symétrie centrale.

154. D00 N25 Dans chacune des cinq figures ci-dessous, la ligne intérieure est tracée à distance constante de la ligne extérieure. Dans quel cas la ligne intérieure *n*'est-elle *pas* une reproduction à l'échelle de la ligne extérieure ?

(A) (B) (C) (D) (E)

155. D02 N28 Dans le pavage infini dont un fragment est représenté ci-contre, combien y a-t-il d'axes de symétrie orthogonale passant par le point O, situés dans le plan du pavage ?

O

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

(E) Une infinité.

156. E02 N10 Parmi les figures proposées, quelle est celle qui admet un centre de symétrie, mais pas d'axe de symétrie ?

(A)

(B)

(C)

(D)

(E) Aucune des quatre figures proposées ne répond à la question.

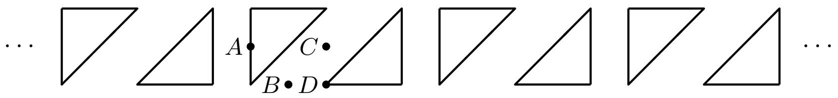
157. E01 N09 Dans le plan, une figure est constituée de deux droites perpendiculaires ; quel est le nombre d'axes de symétrie de cette figure ?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) Une infinité

158. E00 N11 Parmi les figures suivantes, laquelle n'admet pas toujours d'axe de symétrie ?

(A) Un triangle isocèle
(B) Un arc de cercle
(C) Un pentagone régulier
(D) Un parallélogramme
(E) Une droite

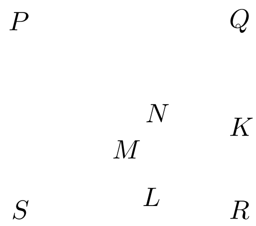
159. E00 N30 Considérons la frise (illimitée dans les deux sens) ci-dessous.



(Les points et le lettrage ne font pas partie de la frise.) Laquelle des affirmations suivantes est exacte ?

(A) A est un centre de symétrie de la frise.
(B) C est un centre de symétrie de la frise.
(C) BC est un axe de symétrie de la frise.
(D) AC est un axe de symétrie de la frise.
(E) CD est un axe de symétrie de la frise.

160. E99 N27 Dans le carré $PQRS$, pour une certaine position de K, l'angle $P\widehat{K}Q$ vaut $60°$; L est symétrique de K par rapport à PR. Une des propositions suivantes est *fausse* ; laquelle ?



(A) Le pentagone $NKRLM$ est régulier et admet PR comme axe de symétrie.
(B) Le pentagone $NKRLM$ a deux angles de $105°$.
(C) Le pentagone $NKRLM$ a deux angles de $120°$.
(D) PK et PL partagent $Q\widehat{P}S$ en trois angles de même amplitude.
(E) Chaque angle du triangle PQK a même amplitude qu'un angle du triangle PSL.

161. *Sans réponse préformulée* — Combien la figure ci-
D00 -contre possède-t-elle d'axes de symétrie ?
N06

162. Le quadrilatère $ABCD$ admet au moins un axe de symétrie. Parmi les
E02 affirmations suivantes, laquelle est alors correcte ?
N19

(A) $ABCD$ admet nécessairement un centre de symétrie.

(B) $ABCD$ possède toujours une paire de côtés parallèles.

(C) $ABCD$ admet nécessairement un deuxième axe de symétrie.

(D) Les diagonales de $ABCD$ sont toujours de même longueur.

(E) Les quatre affirmations précédentes sont fausses.

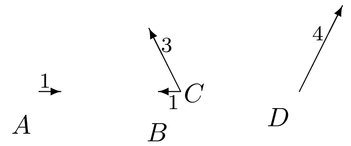
163. Deux droites parallèles sont distantes de 4 cm ; A et B sont deux points
D99 de l'une d'elles, distants de 20 cm. Combien y a-t-il, sur l'autre droite,
N12 de points C tels que le triangle ABC soit isocèle ?

(A) 5 **(B)** 4 **(C)** 3 **(D)** 2 **(E)** 1

164. Le bâtiment représenté en perspective ci-contre
E00 est regardé du dessus (de très haut). Parmi les
N06 figures ci-dessous, laquelle correspond à cette
vision ?

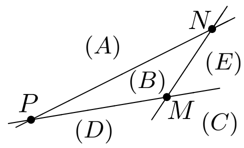
(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

165. E00 N16 *Sans réponse préformulée* — La figure ci-dessous représente un système de roues. Les roues A et B sont reliées par une courroie qui ne patine pas ; les roues B et C sont solidaires d'un même axe ; la roue D est entrainée par la roue C, contre laquelle elle frotte sans patiner. Combien de tours faut-il faire faire à la roue A pour que la roue D effectue un tour ?



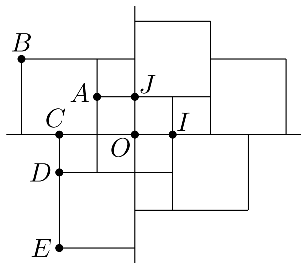
166. D00 N27 *Sans réponse préformulée* — Quatre cercles d'un plan se coupent deux à deux en 2 points distincts ; trois de ces cercles n'ont jamais de point commun. En combien de régions partagent-ils le plan ?

167. D00 N29 Dans la figure ci-contre, le triangle MNP a un angle obtus en M. Dans laquelle des régions indiquées se trouve son orthocentre, c'est-à-dire le point d'intersection de ses hauteurs ?



(A) (A) (B) (B) (C) (C) (D) (D) (E) (E)

168. E00 N22 Sur la figure ci-contre, formée de carrés juxtaposés, le point O est repéré par le couple de nombres $(0, 0)$, I par $(1, 0)$ et J par $(0, 1)$. Quel point est repéré par le couple $(-2, -1)$?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

169. E00 N27 Un disque est partagé en 2000 secteurs de même amplitude par des rayons issus de son centre. Quel est le nombre maximal de ces secteurs qu'une droite peut couper, si elle ne passe pas par le centre du disque ?

(A) 998 (B) 999 (C) 1000 (D) 1001 (E) 1002

170. E01 N26 Un icosaèdre régulier possède 20 faces triangulaires. Combien possède-t-il d'arêtes ?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 30 (E) 60

171. E01 N17 L'un des types suivants de pavés *ne* permet *pas* de paver le plan, par des copies identiques, sans lacune ni recouvrement. Lequel ?

(A) Triangle équilatéral

(B) Carré

(C) Pentagone régulier

(D) Hexagone régulier

(E) Parallélogramme avec un angle de 30°

172. E00 N21 Parmi les cinq développements proposés ci-dessous, lequel est celui de la surface du solide représenté ci-contre (toutes ses arêtes sont de longueur 1) ?

(A)

(D)

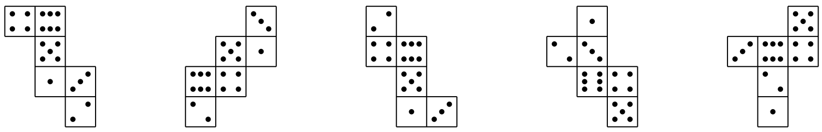
(B)

(E)

(C)

173. Sur un dé, la somme des points de deux faces opposées vaut toujours 7 ; lequel des développements suivants *n*'est *pas* celui d'un dé ?
D01
N06

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ



2.4 Logique

174. Parmi les élèves de l'école du village, il y a des garçons et des filles ; par contre, le club de football du village ne compte que des garçons. Laquelle des affirmations suivantes se déduit de ces informations ?
E00
N12

Ⓐ Tous les membres du club de football sont des élèves de l'école.
Ⓑ Aucun élève n'est membre du club de football.
Ⓒ Certains élèves sont membres du club de football.
Ⓓ Certains membres du club ne sont pas des élèves.
Ⓔ Certains élèves ne sont pas membres du club de football.

175. Dans l'École *Billy Néaire*, tous les élèves aux cheveux longs sont des poètes, et tous les poètes dinent à la cantine. Cinq élèves font les déclarations suivantes ; lequel ne dit certainement pas la vérité ?
D00
N08

Ⓐ ALICE : « *J'ai les cheveux longs et je dine à la cantine.* »
Ⓑ BAPTISTE : « *Je ne dine pas à la cantine et j'ai les cheveux longs.* »
Ⓒ CHLOÉ : « *Je n'ai pas les cheveux longs et je dine à la cantine.* »
Ⓓ DIMITRI : « *Je dine à la cantine et je ne suis pas poète.* »
Ⓔ ÉLODIE : « *Je ne suis pas poète et je n'ai pas les cheveux longs.* »

176. E99 N08 « *Si je n'ai bu aucun jus de fruit, mon petit déjeuner est raté.* »
Ce slogan est logiquement équivalent à :

(A) « *Si mon petit déjeuner est réussi, je n'ai bu aucun jus de fruit.* »
(B) « *Si mon petit déjeuner est réussi, j'ai bu au moins un jus de fruit.* »
(C) « *Si mon petit déjeuner est réussi, j'ai bu plusieurs jus de fruit.* »
(D) « *Si j'ai bu au moins un jus de fruit, mon petit déjeuner est réussi.* »
(E) « *Si je n'ai bu aucun jus de fruit, mon petit déjeuner est réussi.* »

177. E01 N11 Dans une classe de 30 élèves, il y a 14 filles ; par ailleurs, 22 des élèves sont droitiers. Quel est, au minimum, le nombre de filles droitières ?

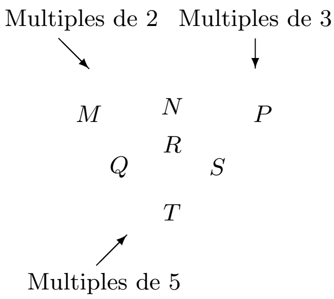
(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

178. D01 N25 Le tableau ci-contre doit devenir un carré magique, c'est-à-dire que, un nombre ayant été écrit dans chaque case, les sommes de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale seront égales. Quelle doit être la valeur de a ?

$a+3$		
	$3a$	a
3		

(A) 12 **(B)** 10 **(C)** 6 **(D)** 4 **(E)** 2

179. E02 N04 Dans la représentation graphique ci--contre, dans quelle région se trouve un nombre qui est, d'une part, multiple de 5 et, d'autre part, multiple de 2 ou de 3 ?



(A) M, P ou T
(B) Q, R ou S
(C) N, R ou T
(D) R
(E) M, N, P, Q, R ou S

180. E99 N04 Lorsque Pierre, scénariste, rencontre Anne, dessinatrice de bandes dessinées, chacun d'eux a déjà publié seul plusieurs albums. Après plusieurs années de collaboration, pendant lesquelles ils n'ont travaillé avec personne d'autre, ils ont publié en tout 8 albums. Pierre a participé à 6 d'entre eux et Anne à 5 d'entre eux. Combien ont-ils réalisé d'albums ensemble ?

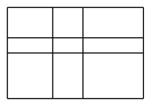
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
(E) Les données sont insuffisantes pour le dire.

181. D99 N10 Le point P appartient à la droite d ; l'image de P par la symétrie orthogonale d'axe a appartient encore à d

(A) Si et seulement si a passe par P ;
(B) Si et seulement si a et d sont perpendiculaires ;
(C) Si et seulement si a et d sont confondues ;
(D) Si et seulement si a passe par P ou est perpendiculaire à d ;
(E) Si et seulement si a et d sont perpendiculaires ou confondues.

2.5 Analyse combinatoire & probabilités

182. D01 N07 *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de rectangles dans la figure ci-contre ?



183. D02 N20 Combien de montants, exprimés par un nombre entier strictement positif d'euros, est-il impossible de payer en utilisant uniquement des pièces de 2 et de 5 euros ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) Une infinité.

184. E02 N30 Combien existe-t-il de nombres de 4 chiffres tels que le chiffre des milliers est égal au chiffre des unités et le chiffre des centaines égal au chiffre des dizaines ?

(A) 100 (B) 99 (C) 90 (D) 81 (E) 72

185. D02 N12 *Sans réponse préformulée* — Trois couples mariés se retrouvent pour fêter un anniversaire. Chaque personne serre la main de chaque autre, sauf de son conjoint. Combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?

186. E00 N04 Quatre chevaux numérotés de 1 à 4 participent à une course. Le numéro 2 est arrivé avant le 3 et le 4 ; le 1 est arrivé avant le 3 mais après le 2, et le 4 est arrivé avant le 1. Quel est l'ordre d'arrivée des trois premiers ?

(A) 1, 2, 3 (B) 1, 3, 2 (C) 2, 3, 1 (D) 2, 4, 1
(E) Plusieurs réponses sont possibles.

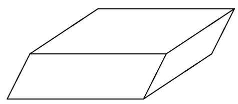
187. D99 N29 60 joueurs de basket doivent être répartis dans des équipes de 5 à 10 joueurs, de telle sorte qu'aucune équipe n'ait deux ou plus de deux joueurs de plus qu'une autre. Quels sont les nombres d'équipes que ces règles permettent de former ?

(A) 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12
(B) 6, 8, 9, 10 et 12
(C) 6, 10 et 12
(D) 6, 8, 10 et 12
(E) 6, 7, 8 et 12

188. D99 N23 Une commission de cinq membres A, B, C, D et E se réunit autour d'une table ronde, où le siège du président A est déterminé. De combien de manières les membres peuvent-ils se disposer si A et B refusent d'être voisins, de même que D et E ? (Être assis à la gauche du président n'est bien sûr pas la même chose qu'être assis à sa droite.)

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 12

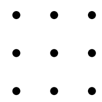
189. D01 N24 *Sans réponse préformulée* — Voici un parallélépipède vu en perspective. Combien possède-t-il de paires d'arêtes parallèles ?



190. E02 N14 Stéphanie possède 5 jupes courtes, 3 jupes longues et 6 chemisiers. Avec ces vêtements, de combien de manières peut-elle se vêtir ?

(A) 90 (B) 48 (C) 45 (D) 33 (E) 14

191. E99 N02 Les neuf points ci-contre se trouvent en des sommets d'un quadrillage régulier. Combien de carrés ont leurs quatre sommets parmi ces neuf points ?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

192. E01 N14 Combien de cartes d'un jeu de 52 cartes faut-il prendre pour être certain d'avoir au moins une carte de chacune des quatre couleurs ?

(A) 5 (B) 14 (C) 27 (D) 36 (E) 40

193. D00 N26 *Sans réponse préformulée* — Dans une pièce se trouvent dix animaux : lapins, canaris et mouches, dont sept peuvent voler. Ils totalisent trente--quatre pattes. Combien y a-t-il de canaris ? (Une mouche possède six pattes et deux ailes.)

194. D02 N13 Pour organiser mon emploi du temps, je dois répondre à Alexandre avant de répondre à Béatrice, à Claire avant Denis et à Claire avant Béatrice. Dans combien d'ordres différents puis-je alors donner mes quatre réponses ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

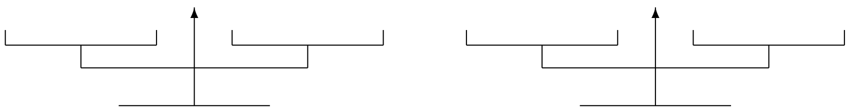
195. E02 N12 *Sans réponse préformulée* — Un sachet contient huit bonbons à la menthe, quatre au citron et deux à la fraise. Ces bonbons ne diffèrent que par le gout et la couleur. Dans l'obscurité, combien faut-il, au minimum, prendre de bonbons pour être certain d'en avoir au moins trois ayant le même gout ?

196. D02 N29 *Sans réponse préformulée* — Sur une plaque de bois est dessiné un pentagone convexe ; en chacun de ses sommets, un clou est planté. Un élastique tendu entre trois de ces clous permet de concrétiser un triangle en le délimitant. Combien faut-il utiliser d'élastiques pour concrétiser tous les triangles possibles de cette planche à clous ?

197. D01 N26 *Sans réponse préformulée* — Pour écrire les naturels de 1 à 999, combien de fois le chiffre 1 est-il utilisé ?

2.6 Problèmes — Divers

198. E99 N29 Ci-dessous sont représentées deux balances équilibrées. Si chaque pomme pèse 210 g, que pèse la grappe de raisin ?



(A) 630 g (B) 420 g (C) 315 g (D) 105 g

(E) On ne peut le déterminer sans connaitre le poids de la banane.

199. D99 N18 Dans le tableau

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & & 3 & & 11 & & 5 \\ & 11 & & 14 & & 16 & \\ & & 25 & & 30 & & \\ & & & 55 & & & \end{array}$$

la somme de chaque paire de nombres adjacents est indiquée en dessous de l'accolade qui les relie. En procédant de même à partir de la ligne

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e$$

quel sera le nombre inscrit à la cinquième ligne ?

(A) $a+b+c+d+e$

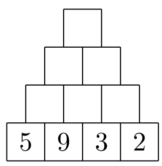
(B) $a+2b+2c+2d+e$

(C) $a+4b+6c+4d+e$

(D) $a+3b+4c+3d+e$

(E) $a+2b+3c+2d+e$

200. E01 N10 Sur la figure ci-contre, chaque brique du mur contient la différence des nombres contenus dans les deux briques sur lesquelles elle repose (le plus grand moins le plus petit). Quel nombre doit se trouver dans la brique du sommet ?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

201. E01 N27 *Sans réponse préformulée* — Les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 sont utilisés chacun une fois pour former deux nombres entiers positifs de trois chiffres dont la somme est aussi petite que possible. Que vaut-elle ?

202. E01 N19 *Sans réponse préformulée* — Un fermier possède 6000 poules pondant chacune, en moyenne, 240 œufs par an. Chaque poule mange annuellement 40 kg de nourriture coutant 6000 F par tonne. À combien de francs revient la nourriture nécessaire pour produire un œuf ?

203. D99 N02 *Sans réponse préformulée* — Si cinq enfants reçoivent chacun 6 bonbons d'un paquet, il reste 12 bonbons non distribués. Combien de bonbons resterait-il si chacun des cinq enfants recevait plutôt 7 bonbons ?

204. D99 N22 Lorsqu'elle met au monde son quatrième enfant, une mère a trois fois la somme des âges de ses trois premiers enfants. Elle se dit alors que, dans huit ans, son âge sera la somme de ceux de ses quatre enfants. Quel est son âge actuel ?

(A) 36 ans (B) 35 ans (C) 33 ans (D) 30 ans (E) 27 ans

205. E00 N17 *Sans réponse préformulée* — Au cours d'un marathon disputé par cinq coureurs, Marc est 225 m derrière Stéphane. Celui-ci est 575 m devant Patrick, qui est 150 m derrière Charles. Enfin, celui-ci suit Jean à 575 m. En mètres, quelle distance sépare le premier du dernier ?

206. D00 N28 *Sans réponse préformulée* — Stéphane fait son jogging. Pour l'instant, il lui reste à parcourir la moitié de ce qu'elle a déjà couru ; un kilomètre plus tôt, il lui restait à courir le double de ce qu'elle avait déjà couru. Quelle est, en kilomètres, la longueur de son entrainement ?

207. D02 N22
Ancienne unité de mesure de longueur, la toise valait 1,949 m. Elle était subdivisée en 6 pieds et un pied valait 12 pouces. Mon ancêtre Firmin mesurait 5 pieds et 10 pouces ; il lui manquait x centimètres pour que sa taille soit exactement d'une toise. Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

(A) $0,5 < x < 2,5$
(B) $2,5 < x < 4$
(C) $4 < x < 6$
(D) $6 < x < 8$
(E) $8 < x < 10$

208. E99 N09
Sans réponse préformulée — La flèche $\mapsto$ applique un nombre sur la somme des carrés de ses chiffres, et ce processus est répété jusqu'à ce qu'il se stabilise, c'est-à-dire qu'un nombre soit appliqué sur lui-même. Par exemple, à partir de 19, il vient successivement $19 \mapsto 82 \mapsto 68 \mapsto \ldots$ Sur quel nombre cette suite se stabilise-t-elle ?

209. E02 N24
Sur 45 poissons prélevés dans un lac, 21 sont des carpes. Si le nombre de poissons du lac est évalué à 27 000, quelle est la meilleure estimation du nombre de carpes dans le lac parmi les suivantes ?

(A) 11 200 (B) 12 600 (C) 13 500 (D) 21 000 (E) 35 000

210. D01 N15
Sans réponse préformulée — Si à mon âge vous ajoutez son tiers puis son sixième, puis encore un an, vous obtenez un siècle. En années, quel est mon âge ?

211. D02 N18
Sans réponse préformulée — Si je revends une marchandise avec un bénéfice de 15 %, je gagne 12 euros de plus que si je la revends avec un bénéfice de 9 %. À quel prix, en euros, ai-je acheté cette marchandise ?

212. E00 N10
Des élèves vendent des jardinières garnies de 4 géraniums. Ils ont acheté ceux-ci 350 F les 20, tandis que les jardinières et le terreau leur reviennent à 750 F pour 10. Si les jardinières garnies sont vendues à 300 F pièce, quel bénéfice est réalisé sur chacune ?

(A) 155 F (B) 145 F (C) 135 F (D) 125 F (E) 115 F

213. E02 N03 *Sans réponse préformulée* — Un train est formé de 6 voitures de 150 places. Combien faut-il, au minimum, de voitures de 110 places pour former un autre train offrant au moins autant de places ?

214. D01 N05 Au lieu des cinq wagons habituels, le train n'en a plus que trois. Si tous les wagons offrent 280 sièges, la diminution du nombre de places est d'environ

(A) 40 % ; (B) 33 % ; (C) 27 % ; (D) 12 % ; (E) 10 %.

215. E00 N24 Pascal s'organise pour les Olympiades. En 90 min, il aura à résoudre 10 questions faciles, 10 questions moyennes et 10 questions difficiles. Il choisit d'abord de garder 10 min pour vérifier ses réponses. Il décide ensuite de consacrer aux questions moyennes le triple du temps qu'il accorde aux questions faciles, et aux questions difficiles autant de temps qu'aux deux autres catégories ensemble. Quel temps doit-il alors consacrer aux questions faciles ?

(A) 480 s (B) 500 s (C) 10 min (D) 15 min (E) 20 min

216. D01 N30 Aux demi-finales des OMB, une bonne réponse vaut 5 points, une abstention rapporte 2 points et une mauvaise réponse ne donne aucun point. Le questionnaire compte 30 questions. L'un des nombres suivants *ne* peut *pas* représenter le score d'un candidat. Lequel ?

(A) 138 (B) 142 (C) 143 (D) 144 (E) 147

217. E99 N01 *Sans réponse préformulée* — L'épreuve *Éli* de l'OMB commence à 13 h 30 et se termine à 15 h 00. De combien de degrés tourne l'aiguille des minutes d'une horloge durant ce temps ?

218. D99 N08 Lors de soldes, un commerçant décide d'abord de faire une remise du tiers du prix des articles à solder. Après réflexion, il décide de diminuer encore ce prix de la moitié de la remise précédente. Combien vais-je payer un article soldé dont le prix initial était de 1000 F ?

(A) 750 F (B) 667 F (C) 500 F (D) 333 F
(E) Une autre réponse

219. E99 N18 Quel est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier les faces d'un cube si chaque face est peinte uniformément et si deux faces partageant une arête sont coloriées différemment ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

220. D01 N17 *Sans réponse préformulée* — Lors d'une élection dans un village, les quatre candidats étaient Albert, Bertrand, Camille et Danièle ; 2001 suffrages valables ont été enregistrés. Camille a été élue avec 8 voix de plus que Bertrand qui a obtenu deux fois autant de voix qu'Albert ; ce dernier a récolté 5 voix en plus du triple du nombre de voix favorables à Danièle. Combien de voix a reçues cette dernière ?

221. E01 N13 *Sans réponse préformulée* — Une échoppe de photocopies affiche un prix de 0,89 F par copie, mais arrondit systématiquement le total au franc supérieur. Quel est le nombre minimal de copies à faire pour qu'elles reviennent à strictement moins d'1 F par copie ?

222. D02 N19 *Sans réponse préformulée* — J'ai acheté 10 crayons et 6 fardes pour 13,6 euros. Mon frère a acheté 3 crayons et 5 fardes pour 9,2 euros. Combien coute l'achat de 8 crayons et de 8 fardes ?

223. E01 N04 Il est 8 h 50. À quelle heure papa finira-t-il de repasser le linge ? Il met 5 min par pièce, sauf pour les chemises, qui lui prennent 10 min chacune ; dans le panier il y a 27 pièces dont 5 chemises.

(A) 11 h 15 (B) 11 h 20 (C) 11 h 30 (D) 11 h 40 (E) 11 h 50

224. D02 N26 Un train part de Bruxelles à 8 heures. Il parcourt 25 km jusqu'à Ottignies à 96 km/h de moyenne ; là, il s'arrête 3 minutes et puis fait encore 31 km jusqu'à Namur à 96 km/h de moyenne. À quelle heure ce train arrive-t-il à Namur ?

(A) 8 h 32 (B) 8 h 34 (C) 8 h 35 (D) 8 h 37 (E) 8 h 38

225. D99 N04 Pour me rendre de mon domicile à l'école, je marche 6 min, puis je prends le métro à la station Olympe ; le trajet dure 15 min. Ensuite, après 7 min d'attente, je prends le bus pour un trajet de 12 min. Il me reste alors 4 min à marcher. Les cours commencent à 8 h 25, mais je dois être dans le rang à 8 h 20. À quelle heure, au plus tard, dois-je partir de chez moi s'il y a des métros toutes les dix minutes à partir de 5 h 30 ?

(A) 7 h 24 (B) 7 h 30 (C) 7 h 32 (D) 7 h 34 (E) 7 h 44

226. E02 N09 Dominique prépare des spaghettis. La sauce se prépare en 15 minutes, puis doit mijoter pendant 1 heure. L'eau arrive à ébullition après 10 minutes ; les pâtes y sont alors déposées et doivent encore cuire pendant 8 minutes. Pour que les pâtes et la sauce soient prêtes en même temps, combien de temps après avoir fini de préparer la sauce Dominique doit-il mettre l'eau à bouillir ?

(A) 27 min (B) 33 min (C) 42 min (D) 57 min (E) 72 min

227. E02 N21 Un triangle équilatéral de 2002 m de côté est entièrement morcelé en petits triangles en traçant des parallèles aux côtés. Combien y a-t-il de petits triangles sachant que leurs côtés mesurent tous 1 m ?

(A) 6006
(B) 1 002 001
(C) 2 004 002
(D) 3 006 003
(E) 4 008 004

228. D01 N27 Un tapis rectangulaire porte un motif de damier, avec des carrés alternativement noirs et blancs de 10 cm de côté. Il y a en tout 173 carrés noirs. Les coins sont occupés par des carrés noirs et les petits côtés comptent 7 carrés blancs. Quelles sont les dimensions de ce tapis ?

(A) 70 cm × 460 cm
(B) 110 cm × 300 cm
(C) 150 cm × 190 cm
(D) 150 cm × 210 cm
(E) 150 cm × 230 cm

229. E00 N26 Une compétition voit 990 concurrents s'affronter ; 40 % d'entre eux reçoivent une médaille ; le nombre de médailles de bronze est le triple de celui de médailles d'or et le nombre de médailles d'argent est le double de celui de médailles d'or. Quel est le nombre de ces dernières ?

(A) 396 (B) 165 (C) 99 (D) 66 (E) 45

230. E99 N12 *Sans réponse préformulée* — Guy Tariste donne des leçons de musique le mercredi et le samedi de 14 h à 17 h et le dimanche de 10 h à 12 h et de 14 h à 16 h. Combien d'heures travaillera-t-il en janvier si le 1$^{\text{er}}$ est un vendredi ?

231. E99 N03 L'heure du méridien de Greenwich est l'heure de référence, appelée *Temps universel* (TU). L'heure à San Francisco est TU $-$ 8 et à Tokyo, TU $+$ 7. S'il est mardi, 7 h du matin à San Francisco, quelle heure est-il à Tokyo ?

(A) Lundi, 16 h
(B) Lundi, 22 h
(C) Mardi, 14 h
(D) Mardi, 15 h
(E) Mardi, 22 h

232. E99 N20 *Éric dispose d'une certaine somme pour acheter des CD-rom de même prix. Il lui manque* 430 F *pour en acheter* 5, *mais s'il n'en achète que* 3, *il lui restera* 1142 F. *Quel est le prix d'un CD-rom ?*
Laquelle des cinq équations suivantes traduit ce problème ?

(A) $5x + 430 = 3x - 1142$
(B) $1142 - 430 = 3x - 5x$
(C) $430 - 1142 = 3x + 5x$
(D) $5x - 430 = 3x + 1142$
(E) $430 - 5x = 3x + 1142$

233. D99 N27 Mathieu prélève la moitié du contenu d'une bouteille initialement pleine. Il prélève ensuite le tiers de ce qui reste, puis le quart du dernier reste. Le contenu restant alors dans la bouteille lui permet de se remplir exactement un verre de 33 cL. Quelle est la capacité de la bouteille ?

(A) 66 cL (B) 100 cL (C) 120 cL (D) 132 cL (E) 144 cL

234. E99 N24 Deux voitures roulant sur une route rectiligne, l'une à 80 km/h et l'autre à 40 km/h, viennent de se croiser. Quelle distance les séparait une minute plus tôt ?

(A) 500 m (B) 1 km (C) 1,5 km (D) 2 km (E) 2,5 km

235. E01 N25 Un avion a effectué un vol de 400 km en parcourant les 100 premiers kilomètres à la vitesse de 100 km/h, les 100 suivants à 200 km/h, les 100 suivants à 300 km/h et les 100 derniers à 400 km/h. Quelle a été sa vitesse moyenne sur l'ensemble du vol ?

(A) 160 km/h (B) 192 km/h (C) 200 km/h (D) 250 km/h
(E) Une autre réponse

236. E01 N28 Un réservoir est alimenté par 3 robinets dont le premier le remplirait, seul, en 2 jours, le deuxième en 3 jours et le dernier en 4 jours ; en outre, un quatrième robinet vide ce réservoir en 1 jour. Le réservoir est initialement rempli à moitié. Les quatre robinets sont alors ouverts simultanément. Après 6 jours, le réservoir

(A) Est vide depuis un certain temps déjà ;
(B) Est vide juste à ce moment ;
(C) Est à moitié rempli ;
(D) Est rempli juste à ce moment ;
(E) Déborde depuis un certain temps déjà.

237. D99 N21 Ma voiture consomme entre 8 et 10 L d'essence aux 100 km et l'essence coute entre 35 et 37 F/L. Combien me coute, en carburant, un trajet de 200 km ?

(A) Entre 43 et 47 F
(B) Entre 280 et 296 F
(C) Entre 296 et 350 F
(D) Entre 350 et 370 F
(E) Entre 560 et 740 F

238. D99 N09 Un marchand achète p melons ($p \geq 25$) à 30 F pièce. Cinq d'entre eux doivent être jetés et les autres sont vendus à 40 F pièce. Quel est le bénéfice réalisé ?

(A) $40p - 30p$
(B) $(p - 5)40$
(C) $(p - 5)(40 - 30)$
(D) $(p - 5)40 - 30p$
(E) $p(40 - 30)$

239. D99 N17 Je traine une moyenne de 9/20 en mathématique depuis le début de ce trimestre. Heureusement, avec le 17/20 que je viens d'obtenir, ma moyenne remonte à 10/20. Si chaque interrogation est notée sur 20 points, combien y en a-t-il eu durant ce trimestre, celle-ci comprise ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

240. E99 N25 Dix ouvriers ont effectué en quinze jours la moitié d'un travail. Combien faut-il leur adjoindre d'ouvriers (de même productivité) pour que le reste du travail soit achevé en cinq jours ?

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25

2.7 Table des réponses

	E99	E00	E01	E02	D99	D00	D01	D02
N01	540	C	B	C	12	E	B	D
N02	D	B	B	E	7	D	B	E
N03	E	E	D	9	E	A	C	D
N04	C	D	C	B	D	D	A	A
N05	102	50	E	E	B	E	A	B
N06	D	B	D	A	A	4	D	140
N07	B	5	D	C	D	D	36	D
N08	B	E	4	C	C	B	C	64
N09	1	A	B	C	D	E	B	B
N10	E	A	D	D	D	A	C	B
N11	E	D	D	B	1	B	B	A
N12	47	E	C	7	A	18	E	12
N13	A	A	10	E	C	E	D	D
N14	E	A	E	B	C	17	C	A
N15	B	C	C	61	A	C	66	B
N16	C	12	A	A	E	15	B	D
N17	A	725	C	A	C	A	123	A
N18	B	C	B	D	C	30	C	200
N19	C	B	1	E	B	C	20	16
N20	D	B	A	D	E	B	252	C
N21	B	B	B	E	E	A	E	A
N22	D	D	E	B	A	B	D	C
N23	A	E	B	20	C	E	D	B
N24	D	C	B	B	0	D	18	E
N25	D	C	B	B	C	A	E	85
N26	C	D	D	D	B	5	300	E
N27	A	D	381	C	D	14	E	50
N28	E	D	D	C	E	3	3	D
N29	A	C	E	A	A	C	A	10
N30	C	B	A	C	B	A	C	C

Chapitre 3

Éliminatoires et demi-finales miDi

3.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

	E99	E00	E01	E02	D99	D00	D01	D02
D01	438	247	292	279	465	260	267	303
D02	384	337	264	447	394	293	280	300
D03	381	445	249	285	380	251	301	306
D04	243	393	439	320	272	273	276	256
D05	241	312	463	290	379	275	386	323
D06	377	270	450	437	341	319	396	475
D07	340	468	434	245	253	367	278	244
D08	446	389	425	436	361	417	315	448
D09	326	353	456	461	262	356	477	325
D10	397	354	298	250	299	339	419	297
D11	309	295	349	474	357	473	255	400
D12	307	388	316	378	274	261	359	338
D13	418	313	277	328	426	322	265	291
D14	318	329	455	366	311	429	257	459
D15	430	305	296	443	480	431	248	365
D16	410	269	405	372	424	452	387	281
D17	268	287	412	271	382	469	242	402
D18	302	332	310	289	266	470	435	457
D19	258	288	283	441	347	314	406	407
D20	427	404	409	449	342	286	360	451
D21	401	413	444	375	453	391	442	421
D22	308	479	466	343	374	440	344	472
D23	433	471	368	284	395	403	254	364
D24	432	371	324	458	422	333	252	321
D25	317	334	428	350	460	346	335	462
D26	399	246	345	423	330	467	464	369
D27	304	454	408	362	390	416	358	327
D28	355	414	478	476	385	383	259	336
D29	373	294	263	415	331	348	351	363
D30	411	420	282	392	352	370	376	398

3.2 Arithmétique & algèbre

241. E99 D05 *Sans réponse préformulée* — Quel est le dernier chiffre de 1999^{1999} ?

242. D01 D17 *Sans réponse préformulée* — Pour écrire les naturels de 1 à 999, combien de fois le chiffre 1 est-il utilisé ?

243. E99 D04 En informatique,
• Un octet est formé de 8 bits,
• Un kilo-octet vaut 2^{10} octets,
• Un méga-octet vaut 2^{10} kilo-octets.
De combien de bits est formé un méga-octet ?

(A) 2^{23} (B) 2^{28} (C) 2^{300} (D) 2^{800} (E) $2^{10^{10^3}}$

244. D02 D07 Que vaut $1001 + 2002 + 3003 + \cdots + 9009$?

(A) 36 036 (B) 45 045 (C) 45 450 (D) 55 055 (E) 55 550

245. E02 D07 $2002 - (1-2) - (3-4) - (5-6) - \cdots - (2001-2002) =$

(A) 1 001 (B) 2 002 (C) 3 003 (D) 4 004
(E) Un autre nombre que les quatre précédents.

246. E00 D26 Que vaut $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + \cdots + 199 + 200 - 201$?

(A) 6666 (B) 6633 (C) 6566 (D) 6369 (E) 6363

247. E00 D01 Que vaut $3 - (2 - (1 - (3 - (2 - (1 - 3)))))$?

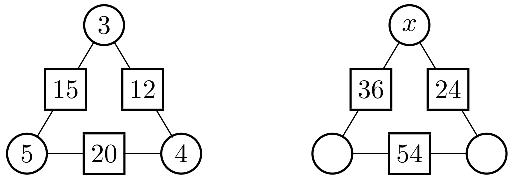
(A) -3 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 3

248. D01 D15 Le tableau ci-contre doit devenir un carré magique, c'est-à-dire que, un nombre ayant été écrit dans chaque case, les sommes de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale seront égales. Quelle doit être la valeur de a ?

$a+3$		
	$3a$	a
3		

(A) 12 (B) 10 (C) 6 (D) 4 (E) 2

249. E01 D03 *Sans réponse préformulée* — Dans le schéma de gauche, les carrés situés aux milieux des côtés du triangle contiennent les produits des nombres positifs figurant dans les cercles qui occupent les sommets du triangle ; si le schéma de droite suit la même règle, que vaut x ?



250. E02 D10 La moyenne arithmétique d'un ensemble de 50 nombres est 32 ; celle d'un second ensemble de 70 nombres est 56. Quelle est la moyenne arithmétique de l'ensemble des 120 nombres ?

(A) 42 (B) 44 (C) 44,5 (D) 46 (E) 46,5

251. D00 D03 Quelle est la moyenne arithmétique des nombres 1, 2, 3, . . ., 1999, 2000 ?

(A) 999 (B) 999,5 (C) 1000 (D) 1000,5 (E) 1001

252. D01 D24 Dans une liste de cinq nombres, la moyenne des trois premiers est 15 et la moyenne des trois derniers, 45. Quelle est la moyenne des cinq nombres ?

(A) 24 (B) 25 (C) 30 (D) 36
(E) Les données ne permettent pas de la déterminer.

253. D99 D07 Je traine une moyenne de 9/20 en mathématique depuis le début de ce trimestre. Heureusement, avec le 17/20 que je viens d'obtenir, ma moyenne remonte à 10/20. Si chaque interrogation est notée sur 20 points, combien y en a-t-il eu durant ce trimestre, celle-ci comprise ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

254. D01 D23 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre de paires d'entiers naturels qui sont carrés parfaits et dont la différence est 36 ?

255. D01 D11 *Sans réponse préformulée* — Combien d'entiers naturels à quatre chiffres distincts ont 30 pour produit de leurs chiffres ?

256. D02 D04 Si la somme de deux nombres premiers est elle-même un nombre premier, alors l'un de ces deux nombres est certainement

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 17 (E) 41

257. D01 D14 L'un des nombres suivants est à la fois la somme de trois naturels consécutifs et la somme de cinq naturels consécutifs. Lequel ?

(A) 42 (B) 43 (C) 44 (D) 45 (E) 46

258. E99 D19 Les cinq nombres suivants sont construits avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 ; quel est le plus petit d'entre eux ?

(A) 2^{431} (B) 3^{421} (C) 4^{321} (D) 21^{43} (E) 32^{41}

259. D01 D28 Quelle est la valeur minimale du quotient d'un nombre de 3 chiffres distincts non nuls par la somme de ses chiffres ?

(A) 41,125 (B) 10,75 (C) 10,6 (D) 10,5 (E) 7,25

260. D00 D01 Que vaut $6a - 1$ si $3a - 1 = 2b$?

(A) $4b - 1$ (B) $4b$ (C) $4b + 1$ (D) $4b + 2$ (E) $4b + 3$

261. D00 D12 *Sans réponse préformulée* — Soit $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$ et $n + 2$ cinq naturels consécutifs. Si la somme des carrés des trois plus petits est égale à la somme des carrés des deux plus grands, que vaut n ?

262. D99 D09 Si les cinq nombres $x+1$, $x-2$, $x+3$, $x+2$ et $x/4$ sont récrits dans l'ordre croissant, quel est celui qui se trouve au milieu de la liste obtenue ?

(A) $x + 1$ (B) $x + 2$ (C) $x + 3$ (D) $x/4$ (E) Cela dépend de x.

263. Une opération $*$ est définie en posant, pour tous réels a et b,
E01
D29

$$a * b = (a + b)(a - b).$$

Quelles sont les solutions de l'équation $5 * x = 5$, d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) -1 et 1 (C) -5 et 5 (D) -20 et 20 (E) $-2\sqrt{5}$ et $2\sqrt{5}$

264. Si a, b et c sont des réels tels que $a + b = 7$, que vaut toujours $a + b + c$?
E01
D02

(A) 10,5 (B) 12 (C) $c - 7$ (D) $7 - c$ (E) $c + 7$

265. Les colliers suivants sont tous construits selon le même schéma.
D01
D13

...

Si n est le nombre de perles noires de l'un d'entre eux et b le nombre de ses perles blanches, alors, dans tous les cas :

(A) $b = n + 3$;
(B) $b = n + 5$;
(C) $b = 2n + 5$;
(D) $b = 3(n + 1)$;
(E) $b = 3(n - 1)$.

266. Si x est négatif et que $xy = 6$, $yz = 24$ et $xz = 16$, que vaut xyz ?
D99
D18

(A) -2304 (B) -49 (C) -48 (D) 48 (E) 49

267. Quels que soient les réels a et b, l'expression $\frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$ est égale à
D01
D01

(A) ab ; (B) $4ab$; (C) $\frac{a^2 + b^2}{2}$; (D) $\frac{a^2}{2}$; (E) $\frac{b^2}{2}$.

268. E99 D17 Anne est en vacances chez son cousin Pierre pour un mois. Tous les soirs, ils jouent aux dames. Après 350 parties, Anne se rend compte qu'elle a gagné 74 % de ces parties. Avant la fin des vacances, ils ont encore le temps de jouer 130 parties. Combien de parties Anne doit-elle encore gagner pour atteindre une proportion finale de 80 % de parties gagnées ?

(A) 91 (B) 115 (C) 120 (D) 125 (E) 130

269. E00 D16 Un nombre naturel qui n'a pas d'autre diviseur impair que 1

(A) Est nécessairement un nombre premier ;
(B) Est nécessairement un nombre impair ;
(C) Est nécessairement une puissance de 2 ;
(D) Peut être n'importe quel nombre pair ;
(E) Peut être n'importe quel nombre naturel.

270. E00 D06 Combien y a-t-il de nombres premiers dont la somme des chiffres est 12 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

271. E02 D17 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit naturel non nul qui multiplié par 231 donne comme produit un multiple de 2002 ?

272. D99 D04 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de paires de nombres premiers dont la somme est 103 ?

273. D00 D04 *Sans réponse préformulée* — Entre 1492 et 1789, combien y a-t-il de nombres entiers multiples de 17 ?

274. D99 D12 Combien 16 200 admet-il de diviseurs naturels ?

(A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 70

275. D00 D05 *Sans réponse préformulée* — Parmi les paires de nombres naturels premiers entre eux dont le plus petit commun multiple est 60, choisissons celle dont la somme est minimale. Que vaut cette somme ?

276. D01 D04 Deux nombres premiers jumeaux sont deux nombres premiers dont la différence est 2, comme par exemple 3 et 5, 5 et 7 ou encore 11 et 13. L'un des nombres suivants *n'*est *pas* le plus petit des éléments d'une paire de nombres premiers jumeaux. Lequel ?

(A) 17 (B) 59 (C) 101 (D) 107 (E) 119

277. E01 D13 Si aucun des entiers a et b n'est divisible par 3, quels sont les restes possibles de la division de $a^2 + b^2$ par 3 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 0 ou 1 (E) 0 ou 2

278. D01 D07 *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de nombres premiers p tels que $p + 35$ soit aussi premier ?

279. E02 D01 $\frac{2}{3}$ divisé par son inverse donne

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{9}{4}$

280. D01 D02 Le nombre $\dfrac{10^6 - 1}{1001}$

(A) Vaut 999 ; (B) Vaut 1001 ; (C) Vaut 10^5 ; (D) Vaut 10^4 ;
(E) N'est pas entier.

281. D02 D16 Que vaut 0,123 123 123 . . . ?

(A) $\dfrac{123}{1001}$ (B) $\dfrac{123}{1000}$ (C) $\dfrac{123}{999}$ (D) $\dfrac{1230}{9999}$ (E) $\dfrac{1231}{9999}$

282. E01 D30 Pour combien d'entiers x l'expression $\dfrac{10x + 1}{2x - 1}$ est-elle entière ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

283. E01 D19 *Sans réponse préformulée* — Soit les nombres a, b, c et d, tels que $b/a =$ $= 0{,}125$; $c/a = 8$; $d/c = 3{,}5$. Que vaut d/a ?

284. E02 D23 La fraction
$$\frac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$$
est plus grande que $\frac{7}{10}$ dès que le naturel n est supérieur à

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10

285. E02 D03 La fraction $\dfrac{\frac{6}{16}+\frac{21}{24}}{\frac{15}{12}}$ est égale à

(A) 0 (B) $\frac{27}{50}$ (C) $\frac{16}{25}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) 1

286. D00 D20 Si x, y et z sont trois nombres non nuls tels que $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, alors $x=$

(A) $\dfrac{yz}{z-y}$ (B) $\dfrac{yz}{y-z}$ (C) $\dfrac{y-z}{yz}$ (D) $\dfrac{z-y}{yz}$ (E) $z-y$

287. E00 D17 Lorsque l'expresssion $\dfrac{a-\dfrac{1}{b}}{b-\dfrac{1}{a}}$ est définie, à laquelle des suivantes est-elle nécessairement égale ?

(A) a/b (B) b/a (C) $-b/a$ (D) 1 (E) -1

288. E00 D19 Si a et b sont deux réels non nuls, inverses l'un de l'autre, alors $\dfrac{1}{a(a+b)}+\dfrac{1}{b(a+b)}=$

(A) 1 ; (B) $\dfrac{2}{(a+b)^2}$; (C) $\dfrac{2}{ab}$; (D) $\dfrac{ab}{a+b}$; (E) $\dfrac{a+b}{ab}$.

289. E02 D18 Un automobiliste parcourt a kilomètres en b secondes à vitesse constante. Combien parcourt-il alors de kilomètres en 3 minutes ?

(A) $\dfrac{180\,a}{b}$ (B) $\dfrac{a}{180\,b}$ (C) $180\,a\,b$ (D) $\dfrac{180\,b}{a}$ (E) $\dfrac{b}{180\,a}$

290. E02 D05 Si $\dfrac{x}{2} = y^2$ et $\dfrac{x}{4y} = 4$, alors $x =$

(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 64 (E) 128

291. D02 D13 Le rapport de l'aire d'un hexagone régulier inscrit à un cercle à celle d'un hexagone régulier circonscrit au même cercle vaut

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

292. E01 D01 Si x est un réel quelconque, $(x^2)^3 =$

(A) x^4 (B) x^5 (C) x^6 (D) x^8 (E) x^9

293. D00 D02 Que vaut $(-1)^{-1}$?

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0 (E) -1

294. E00 D29 Si $x + y = 7$ et $xy = 4$, que vaut $x^2 + y^2$?

(A) 16 (B) 41 (C) 45 (D) 49 (E) 53

295. E00 D11 Que vaut $2^{12} - 2^{10}$?

(A) 2^2 (B) 2^3 (C) 3^2 (D) $2 \cdot 3^{10}$ (E) $3 \cdot 2^{10}$

296. E01 D15 $-2^2 - 2^2 =$

(A) -2^3 (B) -2^0 (C) 2^0 (D) 2^4 (E) 4^2

297. D02 D10 $3^{13} - 2 \times 3^{10} =$

(A) $3^{10} \times 5^2$ (D) $2^{10} \times 3^2$
(B) $3^{10} \times 2^5$ (E) $2^{10} \times 5^2$
(C) 3^3

298. E01 D10 Quel est, dans le système décimal, le nombre de chiffres de $2^{12} \cdot 5^8$?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

299. D99 D10 *Sans réponse préformulée* — Quel est le reste de la division de 3^{1999} par 9 ?

300. D02 D02 Le millième de $2^6 \times 5^3$ est

(A) 4 (B) 8 (C) 20 (D) 40
(E) Un autre nombre que les précédents.

301. D01 D03 $\sqrt{(-3)^{-2}} =$

(A) -3 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 3 (E) $\sqrt{3}$

302. E99 D18 Si $x^2 + 1/x^2 = 14$ et si x est positif, que vaut $x + 1/x$?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt{14}$ (C) 4 (D) $2\sqrt{7}$ (E) $\sqrt{7} + 1/\sqrt{7}$

303. D02 D01 $2\,003^2 - 2\,001^2 =$

(A) 4 (B) 2002 (C) 4008 (D) 8008 (E) 2002^2

304. E99 D27 Combien de couples (x, y) d'entiers satisfont la relation $x^2y^2 = 100$?

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 20

305. E00 D15 Si x, y et z sont trois nombres réels tels que $x^3 = -216$, $y^3 = -64$ et $xyz = 48$, que vaut xz^2 ?

(A) -144 (B) -24 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 24 (E) 144

306. D02 D03 $\sqrt{2^2 + 2^2} =$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8
(E) Un autre nombre que les précédents.

307. E99 D12 Si $x = 2^{1999} + 2^{-1999}$ et $y = 2^{1999} - 2^{-1999}$, que vaut $x^2 - y^2$?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 1999 (E) 2^{3998}

308. *Sans réponse préformulée* — Que vaut x si $3^x = 9^{10} + 9^{10} + 9^{10}$?
E99
D22

309. Quelle est la racine carrée de 0,000 121 ?
E99
D11

(A) 0,011 (B) 0,0011 (C) 0,0101 (D) 0,0111 (E) 0,1011

310. $\sqrt{49^{36a^4}} =$
E01
D18

(A) 7^{18a^2} (B) 7^{18a^4} (C) 49^{18a^2} (D) 49^{18a^4} (E) 49^{36a^2}

311. La fraction $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ est égale à :
D99
D14

(A) $\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{4}$

(B) $\dfrac{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}{6}$

(C) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{10}-2}{6}$

(D) $\dfrac{3+\sqrt{6}-\sqrt{15}}{12}$

(E) $\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{12}$

312. Que vaut la racine carrée de $0{,}0009 \cdot 10^{-2}$?
E00
D05

(A) 0,3 (B) 0,03 (C) 0,003 (D) 0,0003 (E) 0,000 004 5

313. Si $xy = 5$, que vaut $\dfrac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}$?
E00
D13

(A) 2^2 (B) 2^5 (C) 2^{10} (D) 2^{20} (E) 2^{100}

314. Le nombre $2^{48} - 1$ possède exactement deux diviseurs compris entre 60 et 70. Quels sont-ils ?
D00
D19

(A) 61 et 63

(B) 61 et 65

(C) 63 et 65

(D) 61 et 67

(E) 63 et 69

315. Lequel des nombres suivants est le plus petit ?
D01
D08

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $2-\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{7}-3$

316. E01 D12 Quel est l'inverse de $\sqrt{2}+1$?

(A) $-\sqrt{2}-1$ (B) $1-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $1+\sqrt{2}$
(E) Une autre réponse

317. E99 D25 Le nombre strictement positif a est tel que $3^x = a$ et $a^y = 81$. Que vaut xy ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
(E) C'est impossible à déterminer sans connaitre a.

318. E99 D14 Jeanne note trois nombres. En les additionnant deux à deux, elle obtient les sommes 63, 65 et 68. Quel est le plus petit des trois nombres notés ?

(A) 31 (B) 30 (C) 28 (D) 25 (E) 23

319. D00 D06 Laquelle des expressions suivantes est égale à $(x+5)^2 - 5(x+5)$?

(A) $-2x$
(B) x^2-5x
(C) x^2+5x
(D) $-4x-20$
(E) $x^2-5x-25$

320. E02 D04 Soit a le plus petit de n nombres entiers impairs consécutifs. Le plus grand de ces n nombres est alors

(A) $a+n$
(B) $a+2n-2$
(C) $a+2n-1$
(D) $a+2n$
(E) $a+2n+1$

321. D02 D24 Ancienne unité de mesure de longueur, la toise valait 1,949 m. Elle était subdivisée en 6 pieds et un pied valait 12 pouces. Mon ancêtre Firmin mesurait 5 pieds et 10 pouces ; il lui manquait x centimètres pour que sa taille soit exactement d'une toise. Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

(A) $0,5 < x < 2,5$
(B) $2,5 < x < 4$
(C) $4 < x < 6$
(D) $6 < x < 8$
(E) $8 < x < 10$

322. D00 D13 La grandeur x est directement proportionnelle à y et inversement proportionnelle à z. Lorsque x vaut 5 et z, 4, y est égal à 10. Que vaut y lorsque $x = 15$ et $z = 6$?

(A) 45 (B) 20 (C) 10 (D) 5 (E) $\frac{20}{9}$

323. D02 D05 Si n est un entier, lequel des nombres suivants est nécessairement impair ?

(A) $n + 3$ (B) $3\,n$ (C) $n^2 + 1$ (D) $n^2 + n + 1$ (E) n^3

324. E01 D24 Parmi les valeurs de $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, combien sont telles que le polynome x^2+4x+c se factorise en deux polynomes du premier degré à coefficients réels ?

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

325. D02 D09 Lequel des trinomes suivants n'admet ni $(x + 1)$, ni $(x - 1)$ comme facteur ?

(A) $x^2 + 4x + 3$
(B) $x^2 - 2x - 3$
(C) $x^2 - 6x + 5$
(D) $2x^2 - 5x + 3$
(E) $x^2 + 5x + 6$

326. E99 D09 Soit quatre naturels consécutifs n, $n+1$, $n+2$ et $n+3$; soit ensuite X la somme du carré du plus petit et de celui du plus grand, et Y la somme des carrés des deux autres. Lorsque $n > 1000$, que vaut $X - Y$?

(A) 0 (B) 4 (C) $12n$ (D) $4n^2 + 4$ (E) $4n^2 + 18n + 4$

327. D02 D27 Si x personnes travaillant x heures par jour pendant x jours produisent x articles identiques, quel est le nombre d'articles de même type que produiraient y personnes travaillant y heures par jour pendant y jours ? Il est admis que toutes les personnes ont la même productivité.

(A) y (B) $\frac{y^3}{x^2}$ (C) $\frac{y^3}{x^3}$ (D) $\frac{x^3}{y^3}$ (E) $\frac{x^2}{y^3}$

328. E02 D13 L'équation $a^2 - 1 = 5\,(a-1)$

(A) Admet 1 comme seule solution ;
(B) Admet 1 et 4 comme solutions ;
(C) Admet 4 comme seule solution ;
(D) Admet 6 comme seule solution ;
(E) Admet au moins une solution non entière.

329. E00 D14 Quelle est la solution de l'équation $\dfrac{1}{x-5} = 0{,}01$, d'inconnue réelle x ?

(A) $x = -4{,}99$ (B) $x = 5{,}01$ (C) $x = 95$ (D) $x = 105$
(E) L'équation est impossible.

330. D99 D26 Quel est le nombre des solutions de l'équation $(x-3)^{x+2} = 1$, d'inconnue entière x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

331. D99 D29 Si x est un réel strictement positif tel que $x^2+1/x^2 = 2$, que vaut $x+1/x$?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{4}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{6}$

332. E00 D18 Lorsque, dans le polynome $P(x)$, $t+3$ est substitué à x, le résultat est t^2+3. Alors, $P(x) =$

(A) $x^2 - 6x + 12$;
(B) $x^2 + 6x + 12$;
(C) $x^2 + 6x + 9$;
(D) $x^2 + 6$;
(E) x^2.

333. D00 D24 Si, pour tout x, $f(x) = 4^x$, alors $f(x+1) - f(x) =$

(A) $f(x)$; (B) $2f(x)$; (C) $3f(x)$; (D) 4 ; (E) 1.

334. E00 D25 Quels que soient les réels a, b, c et d, la valeur de l'inconnue z dans la solution du système

$$\begin{cases} -x + y + z + t = a \\ x - y + z + t = b \\ x + y - z + t = c \\ x + y + z - t = d \end{cases}$$

(d'inconnues réelles x, y, z et t) est $z = k(a+b-c+d)$, pour un certain coefficient k. Que vaut ce dernier ?

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{4}$ (E) $-\frac{1}{2}$

335. D01 D25 L'une des inégalités ci-dessous est vraie quel que soit le réel non nul a. Laquelle ?

(A) $-a < a$ (B) $a < a^2$ (C) $-a < a^3$ (D) $-a^2 < a+1$ (E) $\dfrac{1}{a} < a$

336. D02 D28 Le nombre réel x satisfait l'inégalité $\dfrac{1}{x} + 1 < 2$. La valeur maximale de x

(A) Est $\frac{1}{2}$;
(B) Est 1 ;
(C) Est 2 ;
(D) Est un nombre supérieur à 10 ;
(E) N'existe pas.

337. E00 D02 Quel que soit le nombre rationnel x, la condition $2x - 8 > 0$ équivaut à :

(A) $x > -2$; (B) $x > 0$; (C) $x > 2$; (D) $x > 4$; (E) $x > 6$.

338. D02 D12 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand entier n tel que $n^{200} < 5^{400}$?

339. D00 D10 Combien l'inéquation $1 - x < \dfrac{1}{1+x}$, d'inconnue entière x, admet-elle de solutions ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Une infinité

340. E99 D07 *Éric dispose d'une certaine somme pour acheter des CD-rom de même prix. Il lui manque* 430 F *pour en acheter* 5*, mais s'il n'en achète que* 3*, il lui restera* 1142 F*. Quel est le prix d'un CD-rom ?*
Laquelle des cinq équations suivantes traduit ce problème ?

(A) $5x + 430 = 3x - 1142$
(B) $1142 - 430 = 3x - 5x$
(C) $430 - 1142 = 3x + 5x$
(D) $5x - 430 = 3x + 1142$
(E) $430 - 5x = 3x + 1142$

341. D99 D06 Ma voiture consomme entre 8 et 10 L d'essence aux 100 km et l'essence coute entre 35 et 37 F/L. À une unité près, la distance que je peux parcourir pour 100 F d'essence est nécessairement comprise

(A) Entre 29 et 33 km ;
(B) Entre 27 et 36 km ;
(C) Entre 26 et 34 km ;
(D) Entre 30 et 35 km ;
(E) Entre 35 et 37 km.

342. D99 D20 Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x, $f(2x+1) = 4x^2 - 4x + 1$, alors $f(t) = 0$ lorsque t vaut :

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

343. E02 D22

Suite à une légère contamination, il est strictement interdit de s'approcher à moins de cent mètres d'une centrale nucléaire dont le plan au sol est un rectangle de 50 m sur 20 m. Quelle est, à moins de 100 m^2 près, la superficie de la région ainsi interdite autour de la centrale ?

(B) 31 400 m^2
(C) 36 000 m^2
(A) 10 000 m^2
(E) 54 400 m^2
(D) 45 400 m^2

344. D01 D22

Aux demi-finales des OMB, une bonne réponse vaut 5 points, une abstention rapporte 2 points et une mauvaise réponse ne donne aucun point. Le questionnaire compte 30 questions. L'un des nombres suivants *ne* peut *pas* représenter le score d'un candidat. Lequel ?

(A) 138 **(B)** 142 **(C)** 143 **(D)** 144 **(E)** 147

345. E01 D26

Sans réponse préformulée — Aujourd'hui, je suis 2 fois plus âgé que mon frère et 3 fois moins âgé que ma mère. Celle-ci avait 35 ans quand elle a donné naissance à mon frère. Quel est (en années) mon âge actuel ?

346. D00 D25

Les pêches coutent 15 F pièce, les ananas 40 F et les melons 35 F. Mathilde a acheté 20 fruits pour 500 F, au moins un de chaque sorte. Combien de pêches a-t-elle acheté ?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

347. L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x + y| \geq 1$ est représentée par
D99 la zone ombrée et le trait gras continu (mais non par le trait interrompu)
D19 sur l'une des figures suivantes. Laquelle ?

(A) y 1 1 x (B) y 1 1 x (C) y 1 1 x (D) y 1 1 x (E) y 1 1 x

3.3 Géométrie

348. *Sans réponse préformulée* — Dans un plan, deux polygones convexes
D00 ont l'un 21 côtés et l'autre 45. Combien ont-ils, au maximum, de points
D29 d'intersection ?

349. L'un des types suivants de pavés *ne* permet *pas* de paver le plan, par des
E01 copies identiques, sans lacune ni recouvrement. Lequel ?
D11

(A) Triangle équilatéral
(B) Carré
(C) Pentagone régulier
(D) Hexagone régulier
(E) Parallélogramme avec un angle de 30°

350. Tous les coins d'un cube en bois sont coupés à mi-arêtes, les sections
E02 étant planes. Le polyèdre restant possède
D25

(A) 12 faces et 14 sommets
(B) 12 faces et 24 sommets
(C) 14 faces et 12 sommets
(D) 14 faces et 24 sommets
(E) 14 faces et 48 sommets

351. *Sans réponse préformulée* — Dans un polyèdre convexe, chaque sommet
D01 est entouré d'une face pentagonale et de deux faces hexagonales. Il y a
D29 12 faces pentagonales. Quel est le nombre de faces hexagonales ?

352. D99 D30 Des tétraèdres dont les quatre faces sont des triangles non isocèles isométriques l'un à l'autre :

(A) Cela n'existe pas ;
(B) Cela existe et ils sont tous isométriques ;
(C) Cela existe et ils sont tous semblables ;
(D) Cela existe et ils ont tous un centre de symétrie ;
(E) Cela existe et ils ne possèdent jamais de plan de symétrie.

353. E00 D09 Parmi les cinq développements proposés ci-dessous, lequel est celui de la surface du solide représenté ci-contre (toutes ses arêtes sont de longueur 1) ?

(A) (D)

(B) (E)

(C)

354. E00 D10 Un disque est partagé en 2000 secteurs de même amplitude par des rayons issus de son centre. Quel est le nombre maximal de ces secteurs qu'une droite peut couper, si elle ne passe pas par le centre du disque ?

(A) 998 (B) 999 (C) 1000 (D) 1001 (E) 1002

355. E99 D28 Un segment $[AB]$ est divisé en n parties de même longueur. Sur chacun des n petits segments obtenus est construit un triangle équilatéral. Lorsque n augmente indéfiniment, la somme des périmètres de ces n triangles équilatéraux

(A) Se rapproche de la longueur de $[AB]$;

(B) Se rapproche de $\sqrt{3}$ fois la longueur de $[AB]$;

(C) Se rapproche du double de la longueur de $[AB]$;

(D) Augmente indéfiniment ;

(E) Reste constante.

356. D00 D09 Quel est le rapport du périmètre d'un hexagone régulier à la circonférence du cercle circonscrit ?

(A) 1 (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{6}{\pi}$ (E) $\frac{3}{\pi}$

357. D99 D11 Si $ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté 1, quel est le périmètre du triangle ACE ?

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{2}$ (E) $6\sqrt{3}$

358. D01 D27 Les longueurs des côtés d'un triangle sont 10, 12 et 18. Quelle est la longueur de la plus grande hauteur de ce triangle ?

(A) 11 (B) $\dfrac{34}{3}$ (C) $8\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{33}$

359. D01 D12 *Sans réponse préformulée* — Dans le triangle ABC, rectangle en A, $\|AC\| = 12$ et le périmètre vaut 36. Que vaut $\|AB\|$?

360. D01 D20 En chacun des trois sommets d'un triangle équilatéral de côté 3, un arc de cercle de rayon 1 a été tracé. Quel est le périmètre de la figure obtenue, représentée ci-contre par le trait gras ?

(A) $\pi + 3$
(B) $2\pi + 3$
(C) $2\pi - 3$
(D) $3 - \pi/2$
(E) $3 + \pi/2$

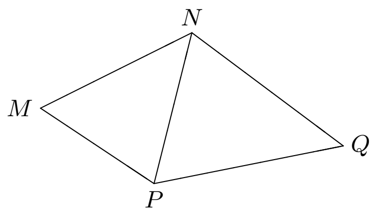
361. D99 D08 L'hypoténuse $[AB]$ d'un triangle rectangle ABC est divisée en 8 segments de même longueur ; par chacun des points de division est menée la parallèle à BC, ce qui détermine 7 segments intérieurs au triangle. Si la longueur de $[BC]$ est 10, quelle est la somme des longueurs de ces 7 segments ?

(A) 33 (B) 35 (C) 40 (D) 45
(E) Elle dépend de la longueur de $[AC]$.

362. E02 D27 Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés vaut 338. La longueur de l'hypoténuse est alors

(A) 9 ; (B) 13 ; (C) 15 (D) 18
(E) Impossible à déterminer avec ces seules données.

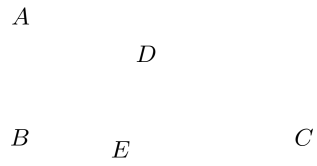
363. D02 D29 *Sans réponse préformulée* — Dans la figure imprécise ci-contre, les angles $N\widehat{M}P$ et $N\widehat{P}Q$ ont la même amplitude. Si $\|MP\| = 80$, $\|MN\| = 120$, $\|PN\| = 100$ et $\|PQ\| = 150$, quelle est la longueur de $[NQ]$?



364. D02 D23 L'angle au sommet d'un triangle isocèle de base $[BC]$ mesure $36°$. Le point d'intersection de la bissectrice issue de B et du côté $[AC]$ est noté D. Alors $\|AD\| =$

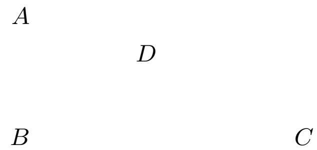
(A) $\|BC\|$ (B) $\|DC\|$ (C) $\frac{2}{3}\|AB\|$ (D) $\frac{3}{2}\|BC\|$
(E) $\frac{1}{2}(\|AB\| - \|BC\|)$

365. D02 D15 Dans le triangle rectangle ABC, les côtés de l'angle droit $[AB]$ et $[BC]$ mesurent respectivement 1 et 2 ; D est le point de $[AC]$ tel que $\|AD\| = \|AB\|$ et E est le point de $[BC]$ tel que $\|CE\| = \|CD\|$. Que vaut $\|BE\|$?



(A) $3 - \sqrt{5}$ (B) $2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $2(\sqrt{5} - 2)$ (D) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (E) $\sqrt{5} - \frac{3}{2}$

366. E02 D14 Dans la figure imprécise ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B et D est un point de $[AC]$. Si $\|AD\| = \|AB\| = \frac{1}{2}$ et $\|BC\| = 1$, que vaut alors $\|CD\|$?



(A) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (B) $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

367. D00 D07 Un quadrilatère convexe $ABCD$ est tel que $\|AB\| = \|BC\| \neq \|CD\| = \|DA\|$. Ce quadrilatère

(A) Est un rectangle ;
(B) Est un losange ;
(C) Est un parallélogramme ;
(D) Admet exactement un axe de symétrie ;
(E) Admet exactement deux axes de symétrie.

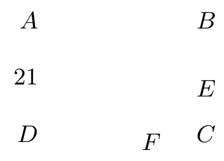
368. E01 D23 Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, $\|AB\| = \|BC\| = 25$, $\|CD\| = \|DA\| = 52$ et $\|AC\| = 40$. Que vaut $\|BD\|$?

(A) 60 (B) 61 (C) 62 (D) 63 (E) 64

369. D02 D26 Le côté $[CD]$ du rectangle $ABCD$ est divisé en trois parties de même longueur par les points E et F ; les diagonales de ce rectangle se coupent en O. Si le triangle OEF est équilatéral, que vaut le rapport $\frac{\|AB\|}{\|AD\|}$?

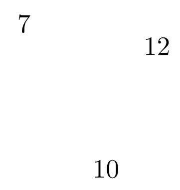
(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 (E) 3

370. D00 D30 Ci-contre est représentée une feuille de papier rectangulaire de largeur 21, qui a été pliée selon AE pour amener le coin B en F sur le côté $[CD]$. Si $\|CE\| = \|CF\|$, quelle est la longueur $\|AB\|$ de la feuille ?



(A) 29,7 (B) 30 (C) $21\sqrt{2}$ (D) $21\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{2000}$

371. E00 D24 Trois côtés consécutifs d'un quadrilatère circonscrit mesurent 7, 12 et 10 ; quelle est la longueur du quatrième côté ?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
(E) Les données ne permettent pas de conclure.

372. E02 D16 Dans un cercle, les cordes $[AB]$ et $[BC]$ mesurent respectivement 5 et 12 cm ; de plus, les points A et C sont diamétralement opposés. Que vaut le rayon de ce cercle ?

(A) 6,5 cm (B) 9 cm (C) 13 cm (D) 18 cm
(E) x cm avec x irrationnel

373. E99 D29 Trois cercles de rayons 2, 3 et 10 sont centrés respectivement en P, Q et R. S'ils sont tangents extérieurement deux à deux, le triangle PQR est

(A) Équilatéral ;
(B) Isocèle mais non équilatéral ;
(C) Rectangle en P ;
(D) Rectangle en Q ;
(E) Rectangle en R.

374. D99 D22 Dans la figure ci-contre, les deux cercles sont tangents à la droite et sont tangents extérieurement l'un à l'autre. Si leurs rayons sont a et b, que vaut la distance des point de contact A et B ?

a b

A B

(A) $a+b$ (B) $\sqrt{ab}$ (C) $2\sqrt{ab}$ (D) ab (E) $\sqrt{ab(a+b)}$

375. E02 D21 Trois bidons cylindriques dont les bases ont 3 dm de rayon sont maintenus tangents l'un à l'autre par une sangle bien tendue. Quelle est, en décimètres, la longueur de cette sangle ?

(A) 12π (B) $6\,\pi+18$ (C) $3\pi+27$ (D) $6\,\pi+12$ (E) $3\,\pi+18$

376. D01 D30 Trois cubes en bois d'arête 1 sont assemblés comme le montre la figure ci-contre. Une fourmi se déplace sur la surface de cet assemblage. Quelle est la longueur du plus court chemin qui lui permet de se rendre du sommet A au sommet B ?

B

A

(A) $\sqrt{17}$ (B) $\sqrt{15}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) $1+2\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

377. E99 D06 Une fourmi se déplace le long des arêtes d'un cube, arêtes dont la longueur est 1. Si elle se rend d'un sommet au sommet opposé sans passer deux fois par le même point, quelle est la longueur maximale de son trajet ?

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

378. E02 D12 Une fourmi se promène le long des arêtes d'un cube de côté 1 sans jamais repasser par le même point. Quelle est la longueur de la plus longue promenade qu'elle pourrait ainsi accomplir en partant d'un sommet du cube et en y revenant ?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

379. D99 D05 Les trois côtés du triangle PCD sont tangents au cercle Γ. Les segments $[PA]$ et $[PB]$, limités aux points de contact A et B, mesurent 1. Quel est le périmètre du triangle ?

P C A Γ D B

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3

(E) Les données sont insuffisantes pour le déterminer.

380. D99 D03 Un cercle et un carré ont le même périmètre. Dans ce cas, une seule des propositions suivantes est exacte. Laquelle ?

(A) Leurs aires sont égales.

(B) L'aire du cercle est plus grande que celle du carré.

(C) L'aire du carré vaut $\pi/2$ fois celle du cercle.

(D) La diagonale du carré et le diamètre du cercle ont même longueur.

(E) Le côté du carré vaut 3/2 fois le rayon du cercle.

381. E99 D03 Dans la figure ci-contre, les cercles ont pour rayon 1 et leurs centres sont les sommets du triangle. Quelle est l'aire de la surface ombrée ?

(A) $\frac{5}{2}\pi$ (B) $\frac{3}{2}\pi$ (C) 4π (D) 3π (E) π

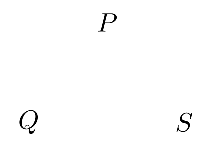
382. D99 D17 *Sans réponse préformulée* — Trois cercles centrés en A, B et C sont tangents extérieurement deux à deux. Ceux de centres B et C ont chacun une longueur de 6π et celui de centre A a une longueur de 4π. Que vaut l'aire du triangle ABC ?

383. D00 D28 Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle et $\|AB\| = 1$. Chacun des côtés de ce triangle est le diamètre d'un demi-cercle. Que vaut l'aire ombrée ?

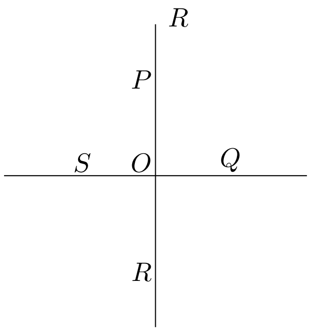
A B C

(A) $\frac{1}{4}\pi$ (B) $\frac{1}{4}(\pi - 1)$ (C) $\frac{1}{4}(\pi + 1)$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 1

384. *Sans réponse préformulée* — Dans la figure ci--contre, les cercles de centre P et R ont pour rayon 2 et les cercles de centres Q et S, tangents chacun aux quatre autres cercles, ont pour rayon 3. Quelle est l'aire du quadrilatère $PQRS$?
E99
D02



385. Dans la figure ci-contre, les rayons des cercles de centres P, Q, R, S et O sont respectivement p, q, p, q et r. Les cercles de centres P et R sont chacun tangents à trois des autres cercles, et ceux de centres Q, S et O sont chacun tangents aux quatre autres cercles. Soit les propositions :
D99
D28



(A) $\|OP\| = r - p$;
(B) $q^2 + (r-p)^2 = (p+q)^2$;
(C) $p = r/3$;
(D) L'aire du losange $PQRS$ vaut $2q(r-p)$.
Laquelle des cinq affirmations ci-dessous est exacte ?

- **A** (A) est fausse.
- **B** (B) est fausse.
- **C** (C) est fausse.
- **D** (D) est fausse.
- **E** Les quatre affirmations (A), (B), (C) et (D) sont vraies.

386. Deux tangentes à un cercle de rayon 2 sont perpendiculaires. Quelle est l'aire de la portion de plan limitée par le cercle et ces deux tangentes ?
D01
D05

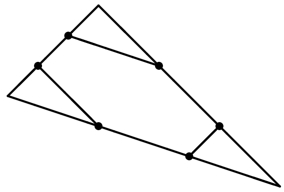
A $1/2$ **B** $3/4$ **C** $\pi/4$ **D** $4-\pi$ **E** $2-\pi/2$

387. Une allée entoure un bassin circulaire de 8 m de diamètre. Quelle doit être, en mètres, la largeur de l'allée pour que son aire soit la même que celle du bassin ?
D01
D16

A 2 **B** 4 **C** 8 **D** $4\sqrt{2}$ **E** $4\left(\sqrt{2}-1\right)$

388. E00 D12

Dans la figure ci-contre, chaque côté du grand triangle est partagé en trois segments de même longueur. Les points intermédiaires ainsi introduits sont les sommets d'un hexagone. Par combien faut-il multiplier l'aire du grand triangle pour obtenir celle de l'hexagone ?



(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{2}{3}$

389. E00 D08

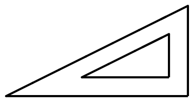
Si G est le centre de gravité d'un triangle ABC, que vaut le rapport de l'aire du triangle GBC à celle de ABC ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{4}{9}$

(E) Ce rapport dépend du triangle ABC.

390. D99 D27

La figure ci-contre représente une équerre dont les côtés de l'angle droit mesurent 12 et 24 ; à l'intérieur, un petit triangle est évidé ; chacun de ses côtés est à distance 3 du côté parallèle du grand triangle. Quel est le rapport de l'aire du grand triangle à celle du petit ?

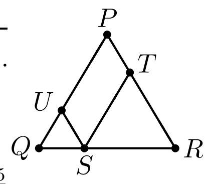


(A) 10 (B) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ (C) $\frac{8}{3}\left(2+\sqrt{3}\right)$ (D) $\frac{8}{5}\left(3+\sqrt{5}\right)$

(E) Les données ne suffisent pas pour le déterminer.

391. D00 D21

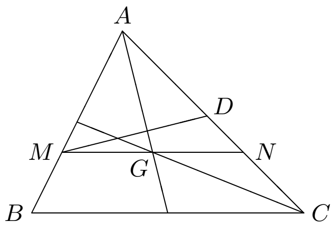
La figure ci-contre est formée de trois triangles équilatéraux PQR, UQS et TSR. Le point S est au tiers de $[QR]$. Que vaut le rapport $\dfrac{\text{Aire}(PTSU)}{\text{Aire}(QSU)+\text{Aire}(RST)}$?



(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) 1 (E) $\frac{5}{4}$

392. E02 D30

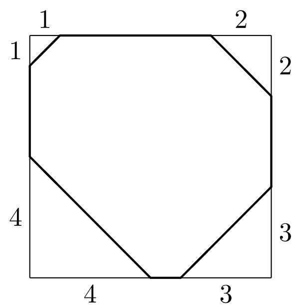
Dans la figure imprécise ci-contre, G est le centre de gravité du triangle ABC ; la droite MN comprend G et est parallèle au côté $[BC]$; enfin, D est le point qui partage $[AN]$ de telle manière que $\|AD\| / \|AN\| = 2/3$. Que vaut le rapport de l'aire du triangle ADM à celle du triangle ABC ?



(A) $\frac{4}{27}$ (B) $\frac{8}{27}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{7}{18}$ (E) $\frac{4}{9}$

393. E00 D04

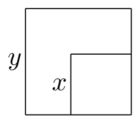
Dans chacun des coins d'un carré de côté a ($a > 7$) est découpé un petit triangle isocèle, comme indiqué par la figure ci-contre. Que vaut l'aire de l'octogone restant ?



(A) $a^2 - 30$
(B) $a^2 - 25$
(C) $a^2 - 20$
(D) $a^2 - 15$
(E) $(a-3)(a-5) - (a-7)(a-5)$

394. D99 D02

Dans la figure ci-contre, l'aire du grand carré vaut 3 fois celle du petit. Que vaut le rapport x/y de leurs côtés ?



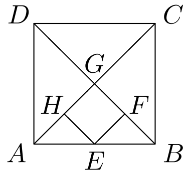
(A) 3 (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\dfrac{1}{3}$

395. D99 D23

Un carré a ses quatre sommets parmi ceux d'un octogone régulier. Quel est le rapport de l'aire de l'octogone à celle du carré ?

(A) $3/2$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (E) $2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

396. D01 D06 Le carré $ABCD$ a 8 cm de côté ; E est le milieu de $[AB]$; enfin, EH et EF sont parallèles aux diagonales. Quelle est l'aire du carré $EFGH$?



(B) $4\sqrt{2}$ cm^2

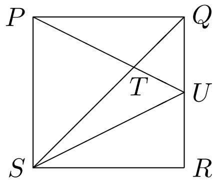
(C) $5\sqrt{2}$ cm^2

(A) $3\sqrt{2}$ cm^2

(E) 8 cm^2

(D) 6 cm^2

397. E99 D10 Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré et U est le milieu de $[QR]$. Laquelle des cinq propositions suivantes est *fausse* ?



(A) Les triangles QTU et PTS sont homothétiques.

(B) L'aire de QTU vaut le quart de celle de PTS.

(C) Le point T se trouve au tiers de la diagonale $[QS]$.

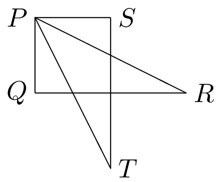
(D) L'aire de PQS vaut le double de celle de PQU.

(E) Les triangles PQT et STU sont semblables.

398. D02 D30 Sur les côtés d'un carré $ABCD$, on construit, extérieurement à celui-ci, les triangles équilatéraux ABP, BCQ, CDR et DAS ; puis les losanges $PKQB$, $QLRC$, $RMSD$ et $SNPA$. Le rapport de l'aire de l'octogone $PKQLRMSN$ à celle du carré $ABCD$ vaut

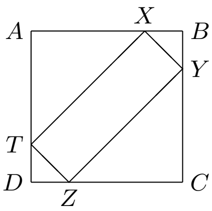
(A) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $2\left(1+\sqrt{3}\right)$ (D) $3+\sqrt{3}$ (E) 6

399. E99 D26 Dans la figure (imprécise) ci-contre, PQR et PST sont deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 2 et 5 ; les droites QR et ST sont perpendiculaires. Que vaut l'aire de la partie du plan qui est commune à PQR et PST ?



(A) 9/8 (B) 2 (C) 12/5 (D) 5/2 (E) 3

400. D02 D11 Le rectangle $XYZT$ est inscrit dans un carré $ABCD$, comme le montre la figure ci-contre. Si le côté du carré mesure 40 cm et si la largeur du rectangle est de 3 cm, quelle est, en centimètres carrés, l'aire du rectangle $XYZT$?



(A) $120\sqrt{2} - 9$
(B) $90\sqrt{2} + 20$
(C) $40\left(2 + \sqrt{3}\right)$
(D) $90\sqrt{3}$
(E) 120

n et 6 cm. Entre quel **401.** et 60 cm², et l'une de ses dimensions est comprise entre 3 cm et 6 cm. et 60 cm²
Entre quelles valeurs doit se trouver son autre dimension pour respecter ces contraintes ?

(A) Entre 2 cm et 10 cm
(B) Entre 2 cm et 20 cm
(C) Entre 4 cm et 10 cm
(D) Entre 4 cm et 20 cm
(E) Entre 10 cm et 20 cm

L'aire d'un rectangle est comprise entre 12 cm²

E99 D21 **402.** D02 D17 *Sans réponse préformulée* — Dans un parallélogramme $ABCD$, E est le milieu de $[AD]$, F est le milieu de $[DC]$ et I est le point d'intersection de AF et de EC. Si l'aire de ce parallélogramme vaut 4800 cm², quelle est la mesure en centimètres carrés de l'aire du quadrilatère $EIFD$?

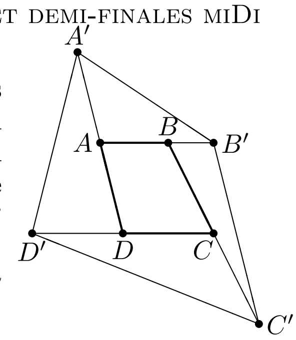
403. D00 D23 Dans la figure ci-contre, $ADGJ$ est un parallélogramme dont chaque côté est partagé en trois segments de même longueur par les points intermédiaires B, C, E, …, L. Si l'aire du parallélogramme vaut 54, quelle est celle de la zone ombrée ?

D E F G
C H
B I
A L K J

(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51 (E) 52

404. E00 D20

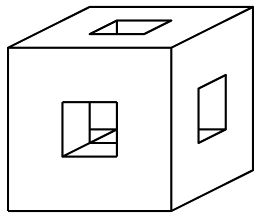
Soit $ABCD$ un trapèze (avec AB // CD) ; les points A', B', C' et D' sont tels que A est le milieu de $[DA']$, B est le milieu de $[AB']$, C est le milieu de $[BC']$, D est le milieu de $[CD']$. Si a est l'aire de $ABCD$, quelle est celle du quadrilatère $A'B'C'D'$?



(A) $3a$ (B) $4a$ (C) $5a$ (D) $6a$ (E) $7a$

405. E01 D16

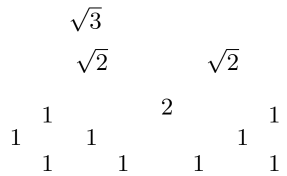
Un cube de 3 cm d'arête est percé de part en part par trois trous dont la section est un carré d'1 cm de côté, orienté comme l'une des faces du cube et centré au même point que celle-ci. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire totale du solide restant ?



(A) 48 (B) 54 (C) 64 (D) 72 (E) 78

406. D01 D19

La figure ci-contre représente le développement d'un solide, avec indication de la longueur des arêtes. Quel est le volume de ce solide ?



(A) $\sqrt{6}$
(B) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
(C) $6\sqrt{6}$
(D) $4/3$
(E) $3/2$

407. D02 D19

La somme des longueurs de toutes les arêtes d'un parallélipipède rectangle vaut 148. En augmentant sa longueur de 7, sa largeur de 11 et sa hauteur de 5, nous obtenons un cube. Quel est le volume du parallélipipède initial ?

(A) 385 (B) 1001 (C) 1331 (D) 1681 (E) 1755

408. E01 D27 Le rayon de la base d'une boite cylindrique est de 8 cm et sa hauteur de 3 cm. Que ce rayon soit augmenté de x cm ($x \neq 0$) ou que ce soit la hauteur, le volume augmente de la même quantité. Cela a lieu

(A) Pour aucune valeur réelle de x ;
(B) Pour une valeur entière de x ;
(C) Pour une valeur rationnelle non entière de x ;
(D) Pour une valeur irrationnelle de x ;
(E) Pour une infinité de valeurs réelles de x.

409. $lorsquesonrayonaug-mented'$1 cm.$Quelest, encentimètrescubes, sonvolumeinitial$?

(A) 3π (B) 9π (C) 27π (D) 36π (E) 64π

Le volume d'une sphère augmente de $\frac{148\pi}{3}$ cm^3
E01 D20

410. E99 D16 Si le rayon d'une sphère est doublé, le rapport de son aire à son volume est :

(A) Multiplié par quatre ;
(B) Doublé ;
(C) Divisé par deux ;
(D) Divisé par quatre ;
(E) Inchangé.

411. E99 D30 Une sphère de rayon 5 est découpée en cinq tranches de même épaisseur par des plans perpendiculaires à l'un de ses diamètres. Si V est le volume de la deuxième tranche, alors :

(A) $V < 16\pi$
(B) $16\pi < V < 24\pi$
(C) $24\pi < V < 32\pi$
(D) $32\pi < V < 48\pi$
(E) $V > 48\pi$

412. E01 D17
Un rectangle est long de 30 cm et large de 20 cm. Quelle est la figure délimitée par les bissectrices de ses quatre angles ?

(A) Un carré
(B) Un rectangle non carré
(C) Un losange non carré
(D) Un parallélogramme non rectangle ni losange
(E) Un trapèze isocèle non parallélogramme

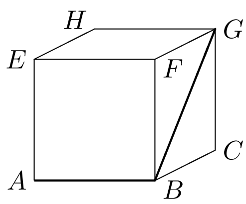
α

80°

30°

413. E00 D21
Sans réponse préformulée — Dans la figure (imprécise) ci-contre, quelle est, en degrés, la mesure principale de l'angle α ?

414. E00 D28
Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABG}$?



(A) 45°
(B) 60°
(C) 90°
(D) 120°
(E) 125°

415. E02 D29
Dans un triangle isocèle, la différence entre deux des angles vaut 96°. Alors un des angles de ce triangle vaut

(A) 24° (B) 32° (C) 48° (D) 124°
(E) Il n'existe aucun triangle ayant la propriété énoncée.

416. D00 D27
Si les angles extérieurs α', β' et γ' d'un triangle sont proportionnels à 4, 5 et 6, alors les angles intérieurs correspondants α, β et γ sont proportionnels à

(A) 3, 2 et 1 ;
(B) 4, 2 et 1 ;
(C) 4, 3 et 1 ;
(D) 7, 5 et 3 ;
(E) 20, 15 et 8.

417. Que vaut l'angle intérieur d'un polygone régulier à douze côtés ?
D00
D08

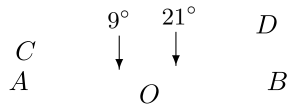
(A) 168° (B) 150° (C) 135° (D) 133°20′ (E) 120°

418. On appelle *angle extérieur* d'un polygone convexe l'angle entre un côté et le prolongement du côté précédent, le polygone étant parcouru dans le sens direct. Si le nombre de côtés d'un polygone convexe passe de 3 à 100, que devient la somme de tous ses angles extérieurs ?
E99
D13

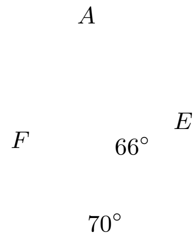
(A) Elle reste constante.
(B) Elle diminue.
(C) Elle augmente.
(D) Elle devient $(100-2)\times 180°$.
(E) Cela dépend du polygone.

419. *Sans réponse préformulée* — La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un polygone convexe est 3240°. Quel est le nombre de côtés de ce polygone ?
D01
D10

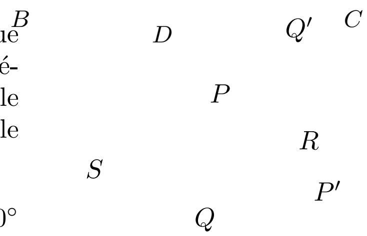
420. *Sans réponse préformulée* — Sur un demi-cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O, soit C tel que $A\widehat{O}C = 9°$ et D tel que $B\widehat{O}D = 21°$. Quel est, en degrés, la mesure principale de l'angle des droites AC et BD ?
E00
D30



421. *Sans réponse préformulée* — Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent aux côtés de celui-ci en D, E et F. Si les angles $\widehat{D}$ et $\widehat{E}$, marqués sur la figure ci-contre, mesurent respectivement 70° et 66°, quelle est la mesure en degrés de l'angle $A\widehat{C}B$?
D02
D21



422. Dans la figure ci-contre, P' est le symétrique de P par rapport à QR et Q' est le symétrique de Q par rapport à PR. Si l'angle $P\widehat{R}Q$ vaut 50°, quelle est la mesure de l'angle $P\widehat{S}Q$?
D99
D24

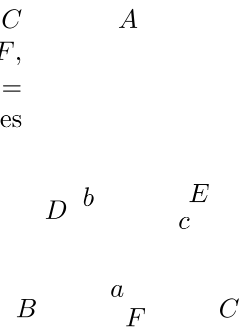


(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°
(E) Les données ne suffisent pas pour le déterminer.

423. E02 D26 Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC ont la même longueur et ils comprennent respectivement les points P et Q tels que $\|AP\| = \|PQ\| = \|QB\| = \|BC\|$. L'amplitude de l'angle de sommet A du triangle ABC, exprimée en degrés, est alors

(A) $\frac{141}{7}$ (B) $\frac{65}{3}$ (C) $\frac{45}{2}$ (D) $\frac{180}{7}$ (E) 30

424. D99 D16 Dans la figure (imprécise) ci-contre, le triangle ABC est isocèle (avec $\|AB\| = \|AC\|$) et le triangle DEF, qui lui est inscrit, est équilatéral. Si $a = B\widehat{F}D$, $b = A\widehat{D}E$ et $c = C\widehat{E}F$, laquelle des relations suivantes est toujours vraie ?



(A) $a = \dfrac{b+c}{2}$

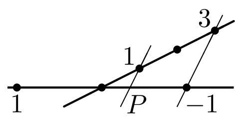
(B) $a = \dfrac{b-c}{2}$

(C) $b = \dfrac{a+c}{2}$

(D) $b = \dfrac{a-c}{2}$

(E) $a + b + c = 120°$

425. E01 D08 Dans la figure ci-dessous, les deux droites en trait fin sont parallèles.



Quelle est l'abscisse de P sur la droite horizontale ?

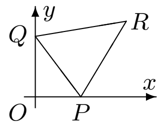
(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

426. D99 D13 Dans un repère orthonormé, les sommets d'un rectangle ont pour coordonnées $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ et $(0,1)$. Une droite passant par l'origine partage ce rectangle en deux parties dont les aires sont dans le rapport de 1 à 2. Quelle est sa pente ?

(A) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$

427. E99 D20

Dans la figure ci-contre, les points P, Q et R ont respectivement pour coordonnées $(p, 0)$, $(0, q)$ et (r, s), avec $r \geq p \geq 0$ et $s \geq q \geq 0$. Que vaut l'aire du triangle PQR ?



(A) $\frac{1}{2}(pq + qr + rs + sp)$

(B) $\frac{1}{2}(qr + ps - pq)$

(C) $\frac{1}{2}(qr + rs + sp - pq)$

(D) $\frac{1}{2}(pq + qr + ps)$

(E) $\frac{1}{2}(pr + qs - pq)$

428. E01 D25

Le point A du plan a pour coordonnées $(3, 8)$; quelles sont les coordonnées de son image par une rotation d'un demi-tour autour du point $C = (2, 5)$?

(A) $(-3, -8)$ (B) $(1, 3)$ (C) $(-1, -3)$ (D) $(2, 1)$ (E) $(1, 2)$

429. D00 D14

Une figure est formée d'un cercle et deux diamètres perpendiculaires. On note a le nombre de ses axes de symétrie et c le nombre de ses centres de symétrie. Alors :

(A) $a = 0$ et $c = 1$;

(B) $a = 1$ et $c = 0$;

(C) $a = 2$ et $c = 0$;

(D) $a = 2$ et $c = 1$;

(E) $a = 4$ et $c = 1$.

430. E99 D15

Soit 0 le point d'intersection des diagonales $[PR]$ et $[QS]$ du parallélogramme $PQRS$. Il existe une rotation de centre 0 qui applique le triangle POQ sur le triangle QOR si et seulement si

(A) $PQRS$ est un rectangle ;

(B) PQR est un triangle isocèle (avec $\|PQ\| = \|PR\|$) ;

(C) $PQRS$ est un losange ;

(D) PR est perpendiculaire à QS

(E) $PQRS$ est un carré.

431. Dans chacune des cinq figures ci-dessous, la ligne intérieure est tracée à distance constante de la ligne extérieure. Dans quel cas la ligne intérieure *n'*est-elle *pas* semblable à la ligne extérieure ?

D00
D15

(A) (B) (C) (D) (E)

432. E99 D24 Le côté de l'hexagone régulier ci-contre vaut a et son aire, H. Le point P en parcourt le bord à partir du sommet S. Lequel des cinq graphes ci-dessous représente l'aire A de la région ombrée en fonction de la distance x parcourue par P ?

S

P

(A) A H x $6a$

(D) A H x $6a$

(B) A H x $6a$

(E) A H x $6a$

(C) A H x $6a$

3.4 Logique

433. E99 D23

Sans réponse préformulée — Camille a invité vingt-cinq amis et amies à son gouter d'anniversaire.
• 40 % d'entre eux ont répondu affirmativement et 20 % de ces derniers ne sont pas venus ;
• 20 % des invités ont répondu négativement et 20 % de ces derniers sont malgré tout venus ;
• 40 % des invités n'ont pas répondu et 40 % de ces derniers sont venus.
Combien d'amis et amies de Camille étaient présents à son gouter d'anniversaire ?

434. E01 D07

Quelle est la négation de « *La nuit, tous les chats sont gris.* » ?

(A) « *Le jour, aucun chat n'est gris.* »
(B) « *Le jour, tous les chats sont gris.* »
(C) « *La nuit, aucun chat n'est gris.* »
(D) « *Au moins un chat est gris la nuit.* »
(E) « *Au moins un chat n'est pas gris la nuit.* »

435. D01 D18

Parmi les phrases suivantes, quelle est la négation de : « *Dès que je lave ma voiture, il se met à pleuvoir.* » ?

(A) « *Je ne lave pas ma voiture et il ne se met pas à pleuvoir.* »
(B) « *Je ne lave pas ma voiture et il se met à pleuvoir.* »
(C) « *Je lave ma voiture et il ne se met pas à pleuvoir.* »
(D) « *Je lave ma voiture et il se met à pleuvoir.* »
(E) Aucune des quatre phrases précédentes

436. Laquelle des affirmations suivantes est fausse ?
E02
D08

(A) La somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire.

(B) Si une somme de nombres impairs est impaire, alors le nombre de termes est impair.

(C) Si une somme de nombres impairs est paire, alors le nombre de termes est pair.

(D) La somme d'un nombre impair de nombres pairs est paire.

(E) Si une somme de nombres pairs est paire, alors le nombre de termes est pair.

437. La proposition « *S'il y a du soleil, j'irai à la plage.* » a la même signification que
E02
D06

(A) « *Pour que j'aille à la plage, il faut qu'il y ait du soleil.* »

(B) « *J'irai à la plage si et seulement s'il y a du soleil.* »

(C) « *S'il n'y a pas de soleil, alors je n'irai pas à la plage.* »

(D) « *Pour que j'aille à la plage, il suffit qu'il y ait du soleil.* »

(E) « *Je n'irai pas à la plage si et seulement s'il n'y a pas de soleil.* »

438. « *Si je n'ai bu aucun jus de fruit, mon petit déjeuner est raté.* »
E99
D01
Ce slogan est logiquement équivalent à :

(A) « *Si mon petit déjeuner est réussi, je n'ai bu aucun jus de fruit.* »

(B) « *Si mon petit déjeuner est réussi, j'ai bu au moins un jus de fruit.* »

(C) « *Si mon petit déjeuner est réussi, j'ai bu plusieurs jus de fruit.* »

(D) « *Si j'ai bu au moins un jus de fruit, mon petit déjeuner est réussi.* »

(E) « *Si je n'ai bu aucun jus de fruit, mon petit déjeuner est réussi.* »

439. Dans une classe de 30 élèves, il y a 14 filles ; par ailleurs, 22 des élèves sont droitiers. Quel est, au minimum, le nombre de filles droitières ?
E01
D04

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

440. D00 D22 L'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue réelle x, est $\{-1, 4\}$. Soit alors les affirmations suivantes :
P : « *L'ensemble des solutions de l'équation* $xg(x) = 0$ *est* $\{-1, 0, 4\}$. » ;
Q : « *L'ensemble des solutions de l'équation* $xg(x) = g(x)$ *est* $\{-1, 1, 4\}$. » ;
R : « *L'ensemble des solutions de l'équation* $(g(x))^2 = 0$ *est* $\{1, 16\}$. ».
Dans ces conditions,

- **A** P, Q et R sont toutes trois vraies ;
- **B** P et Q sont vraies et R est fausse ;
- **C** P est fausse et Q et R sont vraies ;
- **D** Q est vraie et P et R sont fausses ;
- **E** P, Q et R sont toutes trois fausses.

441. E02 D19 En appelant « cerf-volant » un quadrilatère convexe qui admet l'une de ses diagonales pour axe de symétrie, la réponse correcte à la question « *Un cerf-volant est-il inscriptible dans un cercle ?*t » est alors

- **A** Oui, toujours.
- **B** Oui, si et seulement s'il est carré.
- **C** Oui, si et seulement s'il est losange.
- **D** Oui, si et seulement s'il possède au moins deux angles droits.
- **E** Non, jamais.

442. D01 D21 Jean et Jacques sont parfois menteurs : l'un ment des deux les lundis, mardis et mercredis et dit la vérité les autres jours ; l'autre ment les jeudis, vendredis et samedis et dit la vérité les autres jours. Aujourd'hui, ils ont cette conversation :

JEAN. — Je mens tous les samedis.
JACQUES. — Je mentirai demain.
JEAN. — Je mens tous les dimanches.

Quel jour sommes-nous ?

A Dimanche **B** Lundi **C** Mercredi **D** Jeudi **E** Samedi

443. E02 D15 Lors d'un sondage, 500 personnes ont dû répondre par « oui » ou « non » à deux questions ; 375 d'entre elles ont choisi « oui » pour la première question ; 275 ont répondu « oui » pour la seconde question et 40 ont choisi « non » aux deux questions. Combien de ces personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

(A) 95 (B) 125 (C) 185 (D) 190 (E) 215

444. E01 D21 Auguste, Benoît et Clément avaient initialement la même somme d'argent. Auguste a donné la moitié de son avoir à Benoît. Ensuite, Benoît a cédé la moitié de son bien à Clément. Enfin, Clément a offert la moitié de son avoir à Auguste. Laquelle des affirmations suivantes est exacte ?

(A) Auguste, Benoît et Clément ont à nouveau la même somme d'argent.
(B) L'avoir d'Auguste est maintenant le double de celui de Clément.
(C) Benoît possède maintenant le tiers des avoirs réunis d'Auguste et de Clément.
(D) C'est Clément qui possède maintenant le moins d'argent.
(E) Benoît possède plus maintenant qu'initialement.

445. E00 D03 Parmi les élèves de l'école du village, il y a des garçons et des filles ; par contre, le club de football du village ne compte que des garçons. Laquelle des affirmations suivantes se déduit de ces informations ?

(A) Tous les membres du club de football sont des élèves de l'école.
(B) Aucun élève n'est membre du club de football.
(C) Certains élèves sont membres du club de football.
(D) Certains membres du club ne sont pas des élèves.
(E) Certains élèves ne sont pas membres du club de football.

3.5 Analyse combinatoire & probabilités

446. E99 D08 À la fin d'une réunion, chaque participant serre la main de chacun des autres participants. Au total, 28 poignées de main sont ainsi échangées. Combien y avait-il de participants à cette réunion ?

(A) 7 (B) 8 (C) 14 (D) 21 (E) 28

447. E02 D02 *Sans réponse préformulée* — Un sachet contient huit bonbons à la menthe, quatre au citron et deux à la fraise. Ces bonbons ne diffèrent que par le gout et la couleur. Dans l'obscurité, combien faut-il, au minimum, prendre de bonbons pour être certain d'en avoir au moins trois ayant le même gout ?

448. D02 D08 Pour organiser mon emploi du temps, je dois répondre à Alexandre avant de répondre à Béatrice, à Claire avant Denis et à Claire avant Béatrice. Dans combien d'ordres différents puis-je alors donner mes quatre réponses ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

449. E02 D20 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de nombres de 4 chiffres tels que le chiffre des milliers est égal au chiffre des unités, mais différent de celui des dizaines, et le chiffre des centaines égal au chiffre des dizaines ?

450. E01 D06 Combien de cartes d'un jeu de 52 cartes faut-il prendre pour être certain d'avoir au moins une carte de chacune des quatre couleurs ?

(A) 5 (B) 14 (C) 27 (D) 36 (E) 40

451. D02 D20 *Sans réponse préformulée* — Cinq couples mariés se retrouvent pour fêter un anniversaire. Chaque personne serre la main de chaque autre, sauf de son conjoint. Combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?

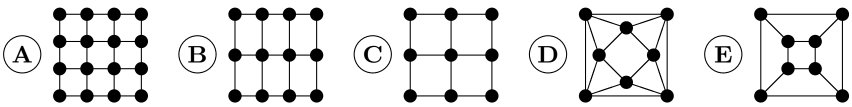
452. D00 D16 *Sans réponse préformulée* — Dans une pièce se trouvent dix animaux : lapins, canaris et mouches, dont sept peuvent voler. Ils totalisent trente-quatre pattes. Combien y a-t-il de canaris ? (Une mouche possède six pattes et deux ailes.)

453. D99 D21 60 joueurs de basket doivent être répartis dans des équipes de 5 à 10 joueurs, de telle sorte qu'aucune équipe n'ait deux ou plus de deux joueurs de plus qu'une autre. Quels sont les nombres d'équipes que ces règles permettent de former ?

(A) 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12
(D) 6, 8, 10 et 12
(B) 6, 8, 9, 10 et 12
(E) 6, 7, 8 et 12
(C) 6, 10 et 12

454. E00 D27 *Sans réponse préformulée* — Un mât est muni de 9 lampes régulièrement étagées à partir de sa pointe. Un signal est codé par l'allumage de 2 de ces lampes. Combien de signaux différents est-il possible de coder dans ce système ?

455. E01 D14 Voici cinq plans de villes. Dans l'une d'entre elles, il n'existe pas de circuit revenant à son point de départ en passant exactement une fois par chaque rond-point •. Laquelle ?



3.6 Problèmes — Divers

456. E01 D09 Une plaque de chocolat compte 24 carrés répartis en 4 lignes et 6 colonnes. Mathieu casse cette plaque selon les lignes ou les colonnes jusqu'au moment où les 24 carrés sont séparés les uns des autres. Combien de cassures a-t-il effectuées ?

(A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 (E) 26

457. D02 D18 Combien de montants, exprimés par un nombre entier strictement positif d'euros, est-il impossible de payer en utilisant uniquement des pièces de 2 et de 5 euros ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) Une infinité.

458. E02 D24 Avec des pièces de 1 écu, 5 écus et 20 écus, je souhaite pouvoir composer n'importe quelle somme de 1 écu à 100 écus. Combien dois-je prendre de pièces au minimum ?

(A) 5 (B) 9 (C) 12 (D) 19 (E) 20

459. D02 D14 *Sans réponse préformulée* — Si je revends une marchandise avec un bénéfice de 15 %, je gagne 12 euros de plus que si je la revends avec un bénéfice de 9 %. À quel prix, en euros, ai-je acheté cette marchandise ?

460. D99 D25 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il, outre la liste triviale (98), de suites croissantes d'entiers naturels consécutifs dont la somme est 98 ?

461. E02 D09 *Sans réponse préformulée* — Pour confectionner des pendentifs, un joaillier dispose d'un lot de petits brillants de taille identique ; la boîte qui les contient a une capacité de 150 brillants. S'il utilise 6 brillants par pendentif, il lui en reste 4. S'il en utilise 9, il lui en reste aussi 4. Enfin, s'il en utilise 5, il lui en reste encore 4. Combien de brillants possède-t-il exactement ?

462. D02 D25 *Sans réponse préformulée* — Si b vaut 50 % de plus que a, si c vaut un tiers de plus que b et si d vaut x % de moins que c, que doit valoir x pour que a et d aient la même valeur ?

463. E01 D05 *Sans réponse préformulée* — Une échoppe de photocopies affiche un prix de 0,89 F par copie, mais arrondit systématiquement le total au franc supérieur. Quel est le nombre minimal de copies à faire pour qu'elles reviennent à strictement moins d'1 F par copie ?

464. D01 D26 *Sans réponse préformulée* — En Europe, aujourd'hui, 17 % des travailleurs prestent à temps partiel : 5,3 % des travailleurs masculins et 31,3 % des travailleurs féminins. Quelle est, en pour cent, la proportion des travailleuses dans la population active ?

465. D99 D01 Le décalage horaire entre la Belgique et la Californie est en hiver de dix heures : lorsqu'il est midi à Bruxelles, il est deux heures du matin à Hollywood. Lorsque l'Europe passe à l'heure d'été, nos montres sont avancées d'une heure. Si la Californie garde la même heure, quel est alors le décalage horaire ?

(A) 8 heures (B) 9 heures (C) 10 heures (D) 11 heures
(E) Il ne peut être déterminé à partir de l'énoncé.

466. E01 D22 Un réservoir est alimenté par 3 robinets dont le premier le remplirait, seul, en 2 jours, le deuxième en 3 jours et le dernier en 4 jours ; en outre, un quatrième robinet vide ce réservoir en 1 jour. Le réservoir est initialement rempli à moitié. Les quatre robinets sont alors ouverts simultanément. Après 6 jours, le réservoir

(A) Est vide depuis un certain temps déjà ;
(B) Est vide juste à ce moment ;
(C) Est à moitié rempli ;
(D) Est rempli juste à ce moment ;
(E) Déborde depuis un certain temps déjà.

467. D00 D26 *Sans réponse préformulée* — Un automobiliste se rend de Bruxelles à Paris. À la moitié du chemin, il réalise que sa vitesse moyenne est exactement de 120 km/h. Si sa vitesse moyenne, sur l'ensemble du trajet, a été de 96 km/h, quelle a été, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne sur la seconde moitié du trajet ?

468. E00 D07 *Sans réponse préformulée* — Au cours d'un marathon disputé par cinq coureurs, Marc est 225 m derrière Stéphane. Celui-ci est 575 m devant Patrick, qui est 150 m derrière Charles. Enfin, celui-ci suit Jean à 575 m. En mètres, quelle distance sépare le premier du dernier ?

469. D00 D17 *Sans réponse préformulée* — Stéphane fait son jogging. Pour l'instant, il lui reste à parcourir la moitié de ce qu'elle a déjà couru ; un kilomètre plus tôt, il lui restait à courir le double de ce qu'elle avait déjà couru. Quelle est, en kilomètres, la longueur de son entrainement ?

470. D00 D18 Le lièvre et la tortue courent tous deux à vitesse constante, la vitesse du lièvre étant le double de celle de la tortue. Si celle-ci a, au moment du départ, une avance a, quelle distance aura parcourue le lièvre lorsqu'il rattrapera la tortue ?

(A) a (B) $2a$ (C) $a+2$ (D) $\dfrac{a}{a+2}$ (E) $\dfrac{2a}{a+2}$

471. E00 D23 Un bassin contient 198 poissons rouges et 2 poissons noirs ; la proportion de poissons rouges est alors de x %. Combien de poissons rouges faut-il enlever pour que la proportion de poissons rouges dans le bassin passe à $(x-1)$ % ?

(A) 149 (B) 100 (C) 98 (D) 58 (E) 1

472. D02 D22 Les dates sont codées à l'aide de 6 chiffres (JJ.MM.AA) ; par exemple, 06.02.02 pour le 6 février 2002. Mais un assemblage de 6 chiffres ne correspond pas toujours à une date ; par exemple, 12.34.56. Parmi tous les assemblages possibles de 6 chiffres, quelle est la proportion, à 0,1 % près, de ceux qui correspondent à une date ?

(A) 3,6 % (B) 10 % (C) 11 % (D) 12 % (E) 36 %

473. D00 D11 *Sans réponse préformulée* — Une statue en bronze massif a une masse de 16 T. Quelle est, en kilogrammes, la masse de sa maquette à l'échelle 1/20^{e}, également réalisée en bronze massif ?

474. E02 D11 Un réservoir a une capacité d'au moins 2000 litres. Au départ, il contient 1000 litres. Six fois de suite les deux opérations suivantes sont réalisées : le contenu est augmenté de 50 %, puis diminué de 50 %. Combien contient-il après tout ce processus ?

(A) Moins de 100 litres
(B) Entre 100 et 300 litres
(C) Entre 300 et 700 litres
(D) Entre 700 et 1000 litres
(E) Plus de 1000 litres

475. D02 D06 *Sans réponse préformulée* — Un escalier compte entre 100 et 200 marches. Si je le descendais par 2, par 3 ou par 4 marches à la fois, il resterait à chaque fois une marche. Par contre, j'arriverais exactement au pied de l'escalier en descendant les marches 5 par 5. Combien cet escalier a-t-il de marches ?

476. E02 D28 Un fermier a acheté un lot de jeunes arbres afin de constituer une pépinière. Il souhaite les disposer selon un « plan carré » comme le montre la figure ci-contre pour 25 arbres. Cependant, il n'y parvient pas ; soit il lui manque 20 arbres, soit il a 39 arbres de trop. Combien ce fermier a-t-il acheté d'arbres ?

(A) 841 (B) 880 (C) 900 (D) 961 (E) 1121

477. D01 D09 Un piéton parcourt le périmètre d'un triangle équilatéral ABC : partant de A, il parcourt $[AB]$, tourne d'un certain angle, parcourt $[BC]$, tourne d'un certain angle, et parcourt enfin $[CA]$. Quelle est la somme des amplitudes des deux rotations ?

(A) 360° (B) 300° (C) 240° (D) 180° (E) 120°

478. E01 D28 Un élastique est tendu horizontalement entre deux points distants de 60 cm. Une masse accrochée en son milieu allonge cet élastique de 8 cm. De quelle distance le milieu de l'élastique s'est-il écarté de sa position initiale ?

(A) 8 cm (B) 16 cm (C) 20 cm (D) 24 cm (E) 32 cm

479. E00 D22 À la dernière interrogation de la période, Mathieu a dû se contenter de 1/10, ce qui lui donne une moyenne de 6/10. Il se prend à rêver : « Si seulement j'avais eu 10/10 cette fois-ci, ma moyenne serait de 7,5/10 ! » Les interrogations de la période étaient toutes notées sur 10 ; combien y en avait-il, en tout ?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

480. [illegible] cylindre initial [illegible] augmente [illegible] de x cm^3. La hauteur du cylindre initial est de 2 cm ; quel est son rayon ?

(A) 2 cm (B) 3 cm (C) 4 cm (D) 6 cm (E) 8 cm

Si le rayon d'un cylindre est augmenté de 6 cm, son volume augmente
D99 de x cm^3
D15

3.7 Table des réponses

	E99	E00	E01	E02	D99	D00	D01	D02
D01	B	E	C	D	D	C	A	D
D02	24	D	E	7	D	E	A	B
D03	A	E	4	E	B	D	C	E
D04	A	D	D	B	1	18	E	B
D05	9	C	10	E	C	17	D	D
D06	C	A	E	D	B	C	E	145
D07	D	725	E	C	C	D	1	B
D08	B	B	B	E	B	B	E	D
D09	B	B	B	94	E	E	C	E
D10	E	D	B	D	0	E	20	A
D11	A	E	C	B	C	2	24	A
D12	C	E	C	C	D	12	9	24
D13	A	D	C	B	A	A	D	C
D14	B	D	C	A	B	E	D	200
D15	E	B	A	D	D	A	E	A
D16	C	C	D	A	A	5	E	C
D17	D	A	A	26	12	3	300	800
D18	C	A	D	A	C	B	C	C
D19	D	A	28	D	E	C	D	E
D20	B	C	D	81	E	B	A	40
D21	B	50	C	B	A	C	C	92
D22	21	C	D	D	C	B	C	A
D23	13	B	D	C	C	A	2	A
D24	E	A	B	C	D	C	E	C
D25	D	C	E	C	2	D	D	50
D26	C	B	14	D	D	80	45	C
D27	D	36	C	B	D	D	C	B
D28	E	C	B	B	E	D	D	E
D29	C	B	E	D	C	42	20	125
D30	D	15	E	B	E	C	C	D

Chapitre 4

Éliminatoires et demi-finales maXi

4.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

	E99	E00	E01	E02	D99	D00	D01	D02
X01	481	686	693	495	710	515	502	488
X02	507	659	685	550	489	493	539	486
X03	561	492	519	642	579	562	516	692
X04	620	521	610	570	649	626	613	578
X05	530	517	563	554	609	655	487	627
X06	537	699	501	588	498	660	496	701
X07	605	526	707	717	698	581	688	576
X08	694	646	535	700	514	625	657	586
X09	510	520	672	523	601	679	621	716
X10	482	585	483	690	681	695	504	593
X11	682	614	640	713	644	712	589	666
X12	569	571	663	568	558	522	687	582
X13	599	617	503	575	529	565	485	531
X14	664	677	509	505	673	634	592	600
X15	542	631	564	667	632	622	547	638
X16	645	709	545	524	572	551	490	513
X17	615	553	648	567	555	491	594	696
X18	595	559	706	708	636	612	583	718
X19	649	596	656	633	527	552	536	643
X20	604	697	598	670	653	662	499	541
X21	639	635	511	574	543	544	661	689
X22	525	624	684	606	607	658	484	629
X23	637	603	715	616	705	587	665	512
X24	532	678	590	714	651	497	591	538
X25	580	602	669	702	508	533	584	506
X26	494	518	628	573	528	618	546	680
X27	556	668	500	674	654	703	560	652
X28	650	711	534	557	577	720	671	641
X29	548	611	608	675	719	566	597	683
X30	704	623	630	540	676	619	691	549

4.2 Arithmétique & algèbre

481. E99 X01 En informatique,
- Un octet est formé de 8 bits,
- Un kilo-octet vaut 2^{10} octets,
- Un méga-octet vaut 2^{10} kilo-octets.

De combien de bits est formé un méga-octet ?

(A) 2^{23} (B) 2^{28} (C) 2^{300} (D) 2^{800} (E) $2^{10^{10^3}}$

482. E99 X10 *Sans réponse préformulée* — Combien de chiffres compte l'écriture décimale du nombre 5^{10} ?

483. E01 X10 *Sans réponse préformulée* — Si $a = 1\underbrace{00\ldots00}_{111 \text{ zéros}}1$, combien de zéros compte l'écriture décimale de a^2 ?

484. D01 X22 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit naturel qui peut, de deux manières différentes, se factoriser en un produit de deux facteurs distincts, différents de 1, et de même parité ? (Deux factorisations sont considérées comme identiques si elles ne diffèrent que par l'ordre des facteurs.)

485. D01 X13 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre de paires d'entiers naturels qui sont carrés parfaits et dont la différence est 36 ?

486. D02 X02 Si n est un entier, lequel des nombres suivants est nécessairement impair ?

(A) $n+3$ (B) $3\,n$ (C) n^2+1 (D) n^2+n+1 (E) n^3

487. D01 X05 *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de nombres premiers p tels que $p+35$ soit aussi premier ?

488. D02 X01 Si la somme de deux nombres premiers est elle-même un nombre premier, alors l'un de ces deux nombres est certainement

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 17 (E) 41

489. D99 X02 Si les cinq nombres $x+1$, $x-2$, $x+3$, $x+2$ et $x/4$ sont récrits dans l'ordre croissant, quel est celui qui se trouve au milieu de la liste obtenue ?

(A) $x+1$ (B) $x+2$ (C) $x+3$ (D) $x/4$ (E) Cela dépend de x.

490. D01 X16 Dans une liste de cinq nombres, la moyenne des trois premiers est 15 et la moyenne des trois derniers, 45. Quelle est la moyenne des cinq nombres ?

(A) 24 (B) 25 (C) 30 (D) 36
(E) Les données ne permettent pas de la déterminer.

491. D00 X17 À la dernière interrogation, la moyenne de la classe est 13 ; en outre, la moyenne des filles est 15 et celle des garçons, 12. Que vaut le rapport du nombre de filles de cette classe à celui des garçons ?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) 2

492. E00 X03 Dans une liste de cinq nombres, la moyenne arithmétique des trois premiers est 90 et celle des deux derniers, 60. Quelle est la moyenne arithmétique des cinq nombres ?

(A) 30 (B) 50 (C) 75 (D) 78 (E) 150

493. D00 X02 Quelle est la moyenne arithmétique des nombres 1, 2, 3, …, 1999, 2000 ?

(A) 999 (B) 999,5 (C) 1000 (D) 1000,5 (E) 1001

494. E99 X26 *Sans réponse préformulée* — Pour combien de naturels non nuls n la somme $1+2+3+\cdots+n$ est-elle le carré d'un entier inférieur à 100 ?

495. E02 X01 $2002-(1-2)-(3-4)-(5-6)-\ldots-(2001-2002)=$

(A) 1001 (B) 2002 (C) 3003 (D) 4004
(E) Un autre nombre que les quatre précédents.

496. D01 X06 *Sans réponse préformulée* — Combien d'entiers naturels à quatre chiffres distincts ont 30 pour produit de leurs chiffres ?

497. D00 X24 *Sans réponse préformulée* — Parmi les paires de nombres dont le plus petit commun multiple est 720 et le plus grand commun diviseur 12, choisissons celle dont la somme est minimale. Que vaut alors cette somme ?

498. D99 X06 Si x est négatif et que $xy = 6$, $yz = 24$ et $xz = 16$, que vaut xyz ?

(A) -2304 (B) -49 (C) -48 (D) 48 (E) 49

499. D01 X20 Quelle est la valeur minimale du quotient d'un nombre de 3 chiffres distincts non nuls par la somme de ses chiffres ?

(A) 41,125 (B) 10,75 (C) 10,6 (D) 10,5 (E) 7,25

500. E01 X27 Pour combien de valeurs de a parmi 1, 2, …, 11 existe-t-il au moins un entier b tel que $ab - 1$ soit divisible par 12 ?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 11

501. E01 X06 Le nombre $1! + 2! + 3! + \cdots + 2001!$ est certainement

(A) Impair ;
(B) Multiple de 4 ;
(C) Multiple de 6 ;
(D) Multiple de 8 ;
(E) Multiple de 10.

502. D01 X01 Le nombre $\dfrac{10^6 - 1}{1001}$

(A) Vaut 999 ; (B) Vaut 1001 ; (C) Vaut 10^5 ; (D) Vaut 10^4 ;
(E) N'est pas entier.

503. E01 X13 Pour combien d'entiers x l'expression $\dfrac{10x + 1}{2x - 1}$ est-elle entière ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

504. D01 X10
Lorsque n tend vers l'infini, la somme $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}$ tend vers

(A) 0 ; (B) $\frac{1}{2}$; (C) 1 ; (D) 2 ; (E) $+\infty$.

505. E02 X14
Si x est un réel non nul, alors $\frac{|x|+x^2}{|x|}=$

(A) $1+x$; (B) $1+|x|$; (C) $1-|x|$; (D) $1-x$; (E) $2\,|x|$.

506. D02 X25
Sans réponse préformulée — Exactement 4 angles intérieurs d'un polygone convexe sont obtus. Quel est le nombre maximum de côtés du polygone ?

507. E99 X02
Sans réponse préformulée — Quelle est la somme des deux entiers consécutifs qui encadrent $\sqrt{200}$?

508. D99 X25
Que vaut l'expression $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$, comportant une infinité de radicaux superposés ?

(A) 2 (B) $1+\sqrt{2}$ (C) 3 (D) 4 (E) $\sqrt{5}$

509. E01 X14
Lequel des cinq nombres suivants est le plus grand ?

(A) $\sqrt[24]{20}$ (B) $\sqrt[16]{15}$ (C) $\sqrt[12]{10}$ (D) $\sqrt[3]{5}$ (E) $\sqrt[6]{2}$

510. E99 X09
Quels que soient les réels a et b, non nuls et de même signe, $\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$ peut aussi s'écrire

(A) $\frac{a-b}{\sqrt{ab}}$ (B) $\frac{|a|-b}{\sqrt{ab}}$ (C) $\frac{a-|b|}{\sqrt{ab}}$ (D) $\frac{|a|-|b|}{\sqrt{ab}}$ (E) $\frac{\big||a|-|b|\big|}{\sqrt{ab}}$

511. E01 X21 Pour aller de chez moi à mon travail, si je roule à la vitesse v, j'arrive t en retard, tandis que si, en partant au même moment, je roule à la vitesse w, j'arrive t trop tôt. Quelle est la distance que j'ai à parcourir ?

(A) $\dfrac{vwt}{v+w}$ (B) $\dfrac{vwt}{v-w}$ (C) $\dfrac{vwt}{w-v}$ (D) $\dfrac{2vwt}{w-v}$ (E) $\sqrt{vw}\,t$

512. D02 X23 Si n est un naturel non nul, le polynome $x^{n+1}+x^n-x-1$

(A) A toujours une racine double ;

(B) A une racine double si et seulement si n est impair ;

(C) A une racine double si et seulement si n est pair ;

(D) A une racine double si et seulement si n est multiple de 4 ;

(E) N'a jamais de racine double.

513. D02 X16 *Sans réponse préformulée* — Combien de couples de naturels (x, y) sont solution de l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\,?$$

514. D99 X08 Dans lequel des intervalles suivants se trouve $3^{0{,}1}$?

(A) $]\,0{,}1; 0{,}3\,[$ (B) $]\,0{,}3; 1\,[$ (C) $]\,1; 2\,[$ (D) $]\,2; 3\,[$ (E) $]\,3; 30\,[$

515. D00 X01 Que vaut $(-1)^{-1}$?

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0 (E) -1

516. D01 X03 $(5-(4-(3-(2-(1-0)^0)^1)^2)^3)^4$

(A) Vaut -625 ;

(B) Vaut 0 ;

(C) Vaut 625 ;

(D) Est inférieur à -1000 ;

(E) Est supérieur à 1000.

517. Que vaut $2^{12} - 2^{10}$?
E00
X05

(A) 2^2 (B) 2^3 (C) 3^2 (D) $2 \cdot 3^{10}$ (E) $3 \cdot 2^{10}$

518. Que vaut la somme
E00
X26

$$1 + (1+2) + \left(1+2+2^2\right) + \left(1+2+2^2+2^3\right) + \cdots + \left(1+2+\cdots+2^{n-1}\right),$$

quel que soit le naturel $n \geq 2$?

(A) $2^{n+1} - n - 2$ (B) $2^n + n$ (C) $2^n - n$ (D) 2^{n+1} (E) $n(2^n + 1)$

519. Quelle est la moyenne arithmétique des nombres 10^{-16} et 10^{16} ?
E01
X03

(A) 0 (B) 10^{-8} (C) 1 (D) 10^8 (E) Un autre nombre

520. Si x, y et z sont trois nombres réels tels que $x^3 = -216$, $y^3 = -64$ et $xyz = 48$, que vaut xz^2 ?
E00
X09

(A) -144 (B) -24 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 24 (E) 144

521. Que vaut $\dfrac{3^{-5} + 3^{-4} + 3^{-3} + 3^{-2}}{3^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2}$?
E00
X04

(A) $1/3^4$ (B) $1/3^2$ (C) 3^2 (D) 3^4 (E) 3^6

522. Le nombre $2^{48} - 1$ possède exactement deux diviseurs compris entre 60 et 70. Quels sont-ils ?
D00
X12

(A) 61 et 63
(B) 61 et 65
(C) 63 et 65
(D) 61 et 67
(E) 63 et 69

523. Le reste de la division de 2003^{2002} par 7 est
E02
X09

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 5

524. E02 X16 Le reste de la division du polynome $x^3 + a$ par le binome $x + 2$ est égal à -15. Que vaut alors le réel a ?

(A) -7 (B) -3 (C) -1 (D) 1 (E) 3

525. E99 X22 Combien de couples (x, y) d'entiers satisfont la relation $x^2y^2 = 100$?

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 20

526. E00 X07 Si $xy = 5$, que vaut $\dfrac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}$?

(A) 2^2 (B) 2^5 (C) 2^{10} (D) 2^{20} (E) 2^{100}

527. D99 X19 Quel est le reste de la division de $x^{13} + 1$ par $x^2 - 1$?

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) $x + 1$ (E) $x - 1$

528. D99 X26 *Sans réponse préformulée* — Quel est le reste de la division de 3^{1999} par 11 ?

529. D99 X13 Si x est un nombre réel tel que $(x + 1/x)^2 = 5$, que vaut $x^3 + 1/x^3$?

(A) 1 (B) 2 (C) ± 2 (D) $\pm\sqrt{5}$ (E) $\pm 2\sqrt{5}$

530. E99 X05 Si $x^2 + 1/x^2 = 14$ et si x est positif, que vaut $x + 1/x$?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt{14}$ (C) 4 (D) $2\sqrt{7}$ (E) $\sqrt{7} + 1/\sqrt{7}$

531. D02 X13 Pour combien de valeurs réelles distinctes de x l'expression

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \left(x - \frac{2}{x}\right) \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 \left(x - \frac{4}{x}\right)^3 \left(x + \frac{4}{x}\right)$$

est-elle nulle ?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

532. E99 X24 Quel que soit l'entier n, s'il existe des entiers non nuls a et b tels que $n = a^2 + 2b^2$, alors il existe des entiers non nuls p et q tels que $n^2 =$

(A) $p^2 + q^2$;
(B) $p^2 + 2q^2$;
(C) $p^2 + 3q^2$;
(D) $p^2 + 4q^2$;
(E) $p^2 + 6q^2$.

533. D00 X25 Parmi les nombres suivants, lequel est le plus proche du nombre de chiffres de l'écriture décimale de 2000^{2000} ?

(A) 2000 (B) 4600 (C) 6000 (D) 6600 (E) 20 600

534. E01 X28 Que vaut $\left(1+2^{-1/32}\right)\left(1+2^{-1/16}\right)\left(1+2^{-1/8}\right)\left(1+2^{-1/4}\right)\left(1+2^{-1/2}\right)$?

(A) $\left(1-2^{-1/16}\right)^{-1}$
(B) $\left(1-2^{-1/32}\right)^{-1}$
(C) $\frac{1}{2}\left(1-2^{-1/32}\right)^{-1}$
(D) $1-2^{1/32}$
(E) $\frac{1}{2}$

535. E01 X08 Quel que soit le naturel n, le nombre $2^n3^n5^n + 2^n15^n14 + 3^n10^n2$ est divisible par

(A) 7 ; (B) 11 ; (C) 13 ; (D) 17 ; (E) 19.

536. D01 X19 Quelle est la plus grande puissance de 2 par laquelle $m^2 - n^2$ est toujours divisible, quels que soient les entiers impairs m et n ?

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 (E) 32

537. E99 X06 Que vaut $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ lorsque $a^{-1} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ et $b^{-1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$?

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

538. D02 X24 Si $ABCDEF$ est un hexagone régulier, alors la composée de symétries centrales $s_E \circ s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A$ est

(A) La symétrie orthogonale d'axe BF ;
(B) La translation de vecteur $2\overrightarrow{EF}$;
(C) La translation de vecteur $2\overrightarrow{FE}$;
(D) Une rotation de centre F et d'angle 60° ;
(E) La symétrie centrale de centre F.

539. D01 X02 $\sqrt{(-3)^{-2}} =$

(A) -3 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 3 (E) $\sqrt{3}$

540. E02 X30 Combien de polynomes $p(x)$ à coefficients réels vérifient

$$p(x^2) = (p(x))^2 = p(p(x)) \text{ ?}$$

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) Un nombre fini supérieur à 4.
(E) Un nombre infini.

541. D02 X20 À quelle heure (arrondie à la seconde), après midi, les aiguilles des heures et des minutes sont-elles pour la première fois dans le prolongement l'une de l'autre ?

(A) 12 h 32 min
(B) 12 h 32 min 30 s
(C) 12 h 32 min 44 s
(D) 12 h 32 min 46 s
(E) 12 h 32 min 48 s

542. E99 X15 Le nombre 1 est solution de l'équation $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$. Quel est le produit des deux autres solutions ?

(A) 8 (B) -8 (C) 17 (D) 10 (E) -10

543. D99 X21 Quel est le nombre des solutions de l'équation $(x-3)^{x+2} = 1$, d'inconnue entière x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

544. D00 X21 Comme d'habitude, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que $k \leq x$. Combien l'équation $x^2 + \lfloor x \rfloor - 2 = 0$, d'inconnue réelle x, admet-elle de solutions ?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

545. E01 X16 Quel est le nombre de solutions distinctes de l'équation $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2$, d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

546. D01 X26 Combien l'équation $x^{x^x} = x^x$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}_+^*$, possède-t-elle de solutions ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

547. D01 X15 Quel est le nombre de solutions de l'équation $(x-1)x(x+1) = 8 - x$, d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

548. E99 X29 Quel est le nombre des racines de l'équation $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$, d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Une infinité

549. D02 X30 Le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 + \sqrt{x - x^3} = 2x$ est

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

550. E02 X02 Combien l'équation $(1+x)^3 = 1 + x^3$ a-t-elle de solutions réelles ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité.

551. D00 X16 Soit p et q deux réels distincts tels que les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, d'inconnue réelle x, sont p et q ; que vaut q ?

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

(E) Plusieurs valeurs sont possibles.

552. D00 X19 Quelle est la somme des solutions de l'équation $|x+2| = 2|x-2|$, d'inconnue réelle x ?

(A) $\frac{38}{3}$ (B) $\frac{20}{3}$ (C) 6 (D) $\frac{16}{3}$ (E) $\frac{2}{3}$

553. E00 X17 Que vaut le produit des racines de l'équation $x^4 - x^2 - 12 = 0$, d'inconnue réelle x ?

(A) -12 (B) -4 (C) -1 (D) 4 (E) 12

554. E02 X05 Que vaut le produit des solutions de l'équation $16^2 - (4\,x - 12)^2 = 0$?

(A) -16 (B) -7 (C) -6 (D) 7 (E) 16

555. D99 X17 Parmi les suivantes, l'équation du second degré qui admet pour solutions $\dfrac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-b}}$, quels que soient les réels a et b tels que $a > b > 0$, est :

(A) $bx^2 - 2a\sqrt{a}x + a^2 = 0$;

(B) $(2a-b)x^2 - 2a\sqrt{a}x - (2a^3 - a^2b) = 0$;

(C) $bx^2 + 2a\sqrt{a}x + a^2 = 0$;

(D) $bx^2 - 2a\sqrt{a}x + a^2b = 0$;

(E) $(2a-b)x^2 - a\sqrt{a}x + b = 0$.

556. E99 X27 Laquelle des équations suivantes admet pour racines celles de $ax^2 + bx + c = 0$ ainsi que leurs opposés, et ce quels que soient a, b, $c > 0$?

(A) $a^2x^4 + (2ac - b^2)x^2 + c^2 = 0$ (D) $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$

(B) $a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$ (E) $ax^4 + bx^2 + c = 0$

(C) $a^2x^4 + (b^2 - 4ac)x^2 + c^2 = 0$

557. E02 X28 L'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions réelles r et s telles que $r<s$. Sachant que a est strictement positif, laquelle des équations suivantes a nécessairement pour solutions $-r$ et s ?

(A) $ax^2-\sqrt{b^2-4ac}x-c=0$

(B) $cx^2-bx+a=0$

(C) $cx^2+bx+a=0$

(D) $ax^2+bx-c=0$

(E) $ax^2+\sqrt{b^2-4a\,c}x+c=0$

558. D99 X12 Soit m un paramètre réel différent de 1 ; le point représentant la solution du système $\begin{cases} x-y+2=0 \\ mx-y-2m=0, \end{cases}$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, appartient au premier quadrant (ouvert) si et seulement si m satisfait à l'une des conditions suivantes ; laquelle ?

(A) $m<-1$

(B) $-1<m<0$

(C) $-1<m<1$

(D) $0<m<1$

(E) $m<-1$ ou $m>1$

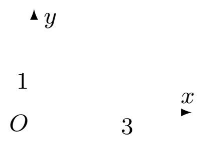
559. E00 X18 Quels que soient les réels a, b, c et d, la valeur de l'inconnue z dans la solution du système

$$\begin{cases} -x+y+z+t=a \\ x-y+z+t=b \\ x+y-z+t=c \\ x+y+z-t=d \end{cases}$$

(d'inconnues réelles x, y, z et t) est $z=k(a+b-c+d)$, pour un certain coefficient k. Que vaut ce dernier ?

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{4}$ (E) $-\frac{1}{2}$

560. D01 X27 Laquelle des équations suivantes est celle de la courbe figurée ci-contre ?



(A) $y = \left|x^2 - 2\right|$

(B) $y = |x|^2 - 2$

(C) $|y| = x^2 - 2$

(D) $x = \left|y^2 - 2\right|$

(E) $|x| = y^2 - 2$

561. E99 X03 Jeanne note trois nombres. En les additionnant deux à deux, elle obtient les sommes 63, 65 et 68. Quel est le plus petit des trois nombres notés ?

(A) 31 (B) 30 (C) 28 (D) 25 (E) 23

562. D00 X03 Quel est le nombre de solutions de l'inéquation $0 \leq 1 - x \leq \dfrac{1}{1+x}$, d'inconnue entière x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Une infinité

563. E01 X05 Une opération $*$ est définie en posant, pour tous réels a et b,

$$a * b = (a+b)(a-b).$$

Quelles sont les solutions de l'équation $5 * x = 5$, d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) -1 et 1 (C) -5 et 5 (D) -20 et 20 (E) $-2\sqrt{5}$ et $2\sqrt{5}$

564. E01 X15 Quelle est la plus grande valeur atteinte par l'expression $\cos(x^{1000})$ lorsque x varie dans $\mathbf{R}$?

(A) 0 (B) 1 (C) π (D) 1000 (E) Elle n'existe pas.

565. D00 X13

L'équation $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

(A) Est impossible ;

(B) Équivaut à $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x \neq 0 \neq y \ ; \end{cases}$

(C) Admet pour ensemble de solutions $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$;

(D) Admet pour ensemble de solutions $\{(t, 2t) : t \in \mathbf{R}^*\}$;

(E) Admet pour ensemble de solutions $\left\{\left(1 + \sqrt{5}, 1\right)\right\}$.

566. D00 X29

Laquelle des doubles inégalités suivantes est vraie pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$?

(A) $x < x^x < x^{(x^x)}$

(B) $x^x < x < x^{(x^x)}$

(C) $x^{(x^x)} < x^x < x$

(D) $x^x < x^{(x^x)} < x$

(E) $x < x^{(x^x)} < x^x$

567. E02 X17

Soit $x \in]0; 1[$. Laquelle des propositions suivantes est nécessairement vraie ?

(A) $x > \sqrt{x}$

(B) $1/x > \sqrt{x}$

(C) $x > 1/x$

(D) $x^4 > x^2$

(E) $x^3 > x$

568. E02 X12

Si x et y sont deux réels tels que $0 < x \leq y$, quelle est alors l'inégalité fausse parmi les suivantes ?

(A) $x^{1/2} \leq y^{1/2}$

(B) $x^{1/3} \leq y^{1/3}$

(C) $x^2 \leq y^2$

(D) $x^{-1} \leq y^{-1}$

(E) $-x^{-2} \leq -y^{-2}$

569. E99 X12

Si $\sqrt{p} = 8$ et $\sqrt[3]{q} = 64$, que vaut $\sqrt[6]{pq}$?

(A) $\sqrt{8}$ (B) $\sqrt[6]{512}$ (C) 6 (D) 16 (E) 512

570. Une fourmi se promène le long des arêtes d'un cube de côté 1 sans jamais repasser par le même point. Quelle est la longueur de la plus longue promenade qu'elle pourrait ainsi accomplir en partant d'un sommet du cube et en y revenant ?
E02
X04

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

571. *Sans réponse préformulée* — Deux bougies ont initialement la même hauteur. L'une brule complètement en 4 h et l'autre en 3 h. Si elles sont allumées exactement au même instant, après combien de minutes la hauteur de l'une sera-t-elle la moitié de la hauteur de l'autre ?
E00
X12

572. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il, outre la liste triviale (98), de suites croissantes d'entiers naturels consécutifs dont la somme est 98 ?
D99
X16

573. Quelle est la plus petite valeur de $2^{\cos x}$ pour x réel ?
E02
X26

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $2^{-\pi}$ (E) 2

574. Une suite de nombres $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par $a_0 = 0$ et, si $n > 0$, $a_n = a_{n-1} + (1 + (-1)^n)q$, où q est un nombre réel fixé. Que vaut $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2002}$?
E02
X21

(A) $2\,004\,002 \cdot q$
(B) $2\,006\,004 \cdot q$
(C) $4\,004\,002 \cdot q$
(D) $4\,006\,002 \cdot q$
(E) $4\,006\,004 \cdot q$

575. *Sans réponse préformulée* — Si $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur à x, pour combien de valeurs de l'entier k l'égalité
E02
X13

$$\lfloor k\pi \rfloor = k\lfloor \pi \rfloor + 1$$

est-elle satisfaite ?

576. *Sans réponse préformulée* — Si b vaut 50 % de plus que a, si c vaut un tiers de plus que b et si d vaut x % de moins que c, que doit valoir x pour que a et d aient la même valeur ?
D02
X07

577. D99 X28 Si une fonction polynomiale de degré 4 a exactement trois racines distinctes, alors :

- (A) Cette fonction est paire ;
- (B) Cette fonction est impaire ;
- (C) Cette fonction s'annule en 0 ;
- (D) Cette fonction admet un minimum d'ordonnée 0 ;
- (E) Une des trois racines de cette fonction est aussi racine de sa dérivée.

4.3 Géométrie

578. D02 X04 La somme des longueurs de toutes les arêtes d'un parallélipipède rectangle vaut 148. En augmentant sa longueur de 7, sa largeur de 11 et sa hauteur de 5, nous obtenons un cube. Quel est le volume du parallélipipède initial ?

(A) 385 (B) 1001 (C) 1331 (D) 1681 (E) 1755

579. D99 X03 Si $ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté 1, quel est le périmètre du triangle ACE ?

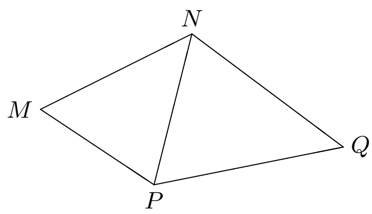
(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{2}$ (E) $6\sqrt{3}$

580. E99 X25 Un segment $[AB]$ est divisé en n parties de même longueur. Sur chacun des n petits segments obtenus est construit un triangle équilatéral. Lorsque n augmente indéfiniment, la somme des périmètres de ces n triangles équilatéraux

- (A) Se rapproche de la longueur de $[AB]$;
- (B) Se rapproche de $\sqrt{3}$ fois la longueur de $[AB]$;
- (C) Se rapproche du double de la longueur de $[AB]$;
- (D) Augmente indéfiniment ;
- (E) Reste constante.

581. D00 X07 *Sans réponse préformulée* — Stéphane fait son jogging. Pour l'instant, il lui reste à parcourir la moitié de ce qu'elle a déjà couru ; un kilomètre plus tôt, il lui restait à courir le double de ce qu'elle avait déjà couru. Quelle est, en kilomètres, la longueur de son entrainement ?

582. D02 X12 *Sans réponse préformulée* — Dans la figure imprécise ci-contre, les angles $N\widehat{M}P$ et $N\widehat{P}Q$ ont la même amplitude. Si $\|MP\| = 80$, $\|MN\| = 120$, $\|PN\| = 100$ et $\|PQ\| = 150$, quelle est la longueur de $[NQ]$?



583. D01 X18 Les longueurs des côtés d'un triangle sont 10, 12 et 18. Quelle est la longueur de la plus grande hauteur de ce triangle ?

A 11 **B** $\dfrac{34}{3}$ **C** $8\sqrt{2}$ **D** $5\sqrt{5}$ **E** $2\sqrt{33}$

584. D01 X25 Considérons toutes les hauteurs de tous les triangles dont les sommets sont parmi les sommets d'un cube d'arête 1. Quelle est la longueur de la plus grande ?

A $\sqrt{2}$ **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D** 2 **E** 1

585. E00 X10 Dans la figure ci-contre, les six cercles, de rayon 1, sont tangents entre eux et tangents aux côtés du triangle équilatéral. Que vaut le périmètre de celui-ci ?

A 24 **B** 18 **C** $18\sqrt{3}$ **D** $12 + 6\sqrt{3}$
E $6 + 12\sqrt{3}$

586. D02 X08 Les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ d'un triangle en papier mesurent respectivement 12, 20 et 16. Ce triangle est plié de manière à amener B sur C. Quelle est la longueur du pli ?

A $5\sqrt{2}$ **B** $3\left(1 + \sqrt{2}\right)$ **C** $8 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **D** $6 + \sqrt{2}$ **E** $\frac{15}{2}$

587. D00 X23 Ci-contre est représentée une feuille de papier rectangulaire de largeur 21, qui a été pliée selon AE pour amener le coin B en F sur le côté $[CD]$. Si $\|CE\| = \|CF\|$, quelle est la longueur $\|AB\|$ de la feuille ?

A B
21 E
D F C

(A) 29,7 (B) 30 (C) $21\sqrt{2}$ (D) $21\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{2000}$

588. E02 X06 Dans la figure imprécise ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B et D est un point de $[AC]$. Si $\|AD\| = \|AB\| = \frac{1}{2}$ et $\|BC\| = 1$, que vaut alors $\|CD\|$?

A
D
B C

(A) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (B) $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

589. D01 X11 Un cercle est inscrit dans un triangle équilatéral de côté 1. Un petit cercle est tangent au premier cercle et à deux côtés du triangle. Quel est son rayon ?

(A) $\dfrac{1}{12}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{15}$ (E) $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$

590. E01 X24 La longueur de la corde commune à deux cercles sécants est de 32 cm. Ces deux cercles ont des rayons de 20 cm et 34 cm. L'une des longueurs suivantes peut être la distance entre les centres des cercles ; laquelle ?

(A) 14 cm (B) 18 cm (C) 27 cm (D) 54 cm (E) $2\sqrt{389}$ cm

591. D01 X24 *Sans réponse préformulée* — Dans ce cercle de centre O, $\|AC\| = 75$, $\|BC\| = 35$ et $\|CD\| = 21$. Quel est le rayon du cercle ?

D
A B
C
O

592. D01 X14 Dans un quadrilatère $ABCD$, $\|AB\| = \|BC\| = \|BD\| = 24$ et $\|AD\| = \|CD\| = 12$. Que vaut $\|AC\|$?

(A) $16\sqrt{2}$ (B) $12\sqrt{3}$ (C) $10\sqrt{5}$ (D) $8\sqrt{7}$ (E) $6\sqrt{15}$

593. D02 X10 Partant d'un sommet d'un hexagone régulier dont les côtés mesurent 2 cm, une abeille parcourt 5 cm le long du périmètre de cet hexagone. A quelle distance est-elle alors de son point de départ ?

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{13}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) $\sqrt{15}$ (E) 4

594. D01 X17 Huit trapèzes isométriques sont construits sur les côtés d'un octogone régulier, comme l'indique la figure ci--contre. Les trois petits côtés de chaque trapèze sont de longueur 1. Quelle est la longueur de leur grand côté ?

(A) 2
(B) $2 + 1/\sqrt{2}$
(C) $1 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$
(D) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
(E) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

595. E99 X18 Les pompiers ont appuyé contre un immeuble une échelle de 25 m, dont le sommet se trouve à 20 m du sol horizontal. Un pompier juché sur l'échelle aperçoit le pied de l'immeuble à 45° sous l'horizontale. Quelle longueur d'échelle a-t-il déjà gravie, en mètres ? (La taille du pompier est négligeable.)

(A) $\frac{25}{4}\sqrt{3}$ (B) $\frac{25}{4}\sqrt{2}$ (C) $\frac{100}{7}$ (D) $\frac{75}{7}$ (E) $\frac{50}{7}$

596. E00 X19 Pour mettre en évidence une voiture dans sa salle d'exposition, un garagiste la présente inclinée. Les quatre roues occupent les sommets d'un rectangle de 3 m de long et d'1,5 m de large. La roue avant gauche est laissée au sol ; la roue avant droite est posée sur un support vertical de 30 cm de haut ; la roue arrière gauche est posée sur un support de 70 cm de haut. Quelle est la hauteur du support sur lequel poser la roue arrière droite ?

(A) 170 cm (B) 100 cm (C) 70 cm (D) 40 cm (E) 30 cm

597. D01 X29 Trois cubes en bois d'arête 1 sont assemblés comme le montre la figure ci-contre. Une fourmi se déplace sur la surface de cet assemblage. Quelle est la longueur du plus court chemin qui lui permet de se rendre du sommet A au sommet B ?

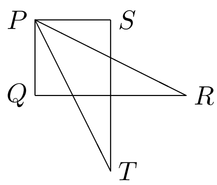
B

A

(A) $\sqrt{17}$ (B) $\sqrt{15}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) $1+2\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

598. E01 X20 *Sans réponse préformulée* — Un fil est enroulé régulièrement sur un cylindre de 24 cm de haut et de 8 cm de circonférence. Il fait ainsi 4 tours. Quelle est, en centimètres, la longueur de ce fil ?

599. E99 X13 Dans la figure (imprécise) ci-contre, PQR et PST sont deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 2 et 5 ; les droites QR et ST sont perpendiculaires. Que vaut l'aire de la partie du plan qui est commune à PQR et PST ?



(A) 9/8 (B) 2 (C) 12/5 (D) 5/2 (E) 3

600. D02 X14 Sur les côtés d'un carré $ABCD$, on construit, extérieurement à celui-ci, les triangles équilatéraux ABP, BCQ, CDR et DAS ; puis les losanges $PKQB$, $QLRC$, $RMSD$ et $SNPA$. Le rapport de l'aire de l'octogone $PKQLRMSN$ à celle du carré $ABCD$ vaut

(A) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $2\left(1+\sqrt{3}\right)$ (D) $3+\sqrt{3}$ (E) 6

601. D99 X09 Un carré a ses quatre sommets parmi ceux d'un octogone régulier. Quel est le rapport de l'aire de l'octogone à celle du carré ?

(A) 3/2 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (E) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

602. E00 X25 *Sans réponse préformulée* — Parmi tous les rectangles dont la longueur et la largeur sont des nombres entiers et dont l'aire vaut 1350, quel est le périmètre de celui qui a le plus petit périmètre ?

603. E00 X23 Dans un triangle de base 10 et de hauteur 5, est inscrit un carré, dont un côté est sur la base du triangle. Quelle est l'aire de ce carré ?

(A) 4 (B) 16 (C) 25 (D) $\frac{100}{9}$

(E) Elle dépend du triangle.

604. E99 X20 Un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 9 cm et 12 cm a été découpé dans du papier. Le long de son hypoténuse, est détachée une bande de 3 cm de largeur. Quelle est l'aire du petit triangle qui reste ?

(B) $27/2$ cm^2

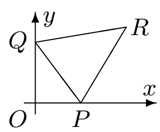
(C) $75/4$ cm^2

(A) 18 cm^2

(E) $147/8$ cm^2

(D) $75/9$ cm^2

605. E99 X07 Dans la figure ci-contre, les points P, Q et R ont respectivement pour coordonnées $(p, 0)$, $(0, q)$ et (r, s), avec $r \geq p \geq 0$ et $s \geq q \geq 0$. Que vaut l'aire du triangle PQR ?



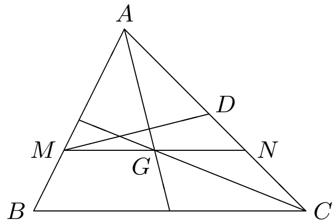
(A) $\frac{1}{2}(pq + qr + rs + sp)$ (D) $\frac{1}{2}(pq + qr + ps)$

(B) $\frac{1}{2}(qr + ps - pq)$ (E) $\frac{1}{2}(pr + qs - pq)$

(C) $\frac{1}{2}(qr + rs + sp - pq)$

606. E02 X22

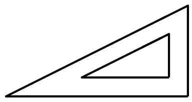
Dans la figure imprécise ci-contre, G est le centre de gravité du triangle ABC ; la droite MN comprend G et est parallèle au côté $[BC]$; enfin, D est le point qui partage $[AN]$ de telle manière que $\|AD\| / \|AN\| = 2/3$. Que vaut le rapport de l'aire du triangle ADM à celle du triangle ABC ?



(A) $\frac{4}{27}$ (B) $\frac{8}{27}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{7}{18}$ (E) $\frac{4}{9}$

607. D99 X22

La figure ci-contre représente une équerre dont les côtés de l'angle droit mesurent 12 et 24 ; à l'intérieur, un petit triangle est évidé ; chacun de ses côtés est à distance 3 du côté parallèle du grand triangle. Quel est le rapport de l'aire du grand triangle à celle du petit ?



(A) 10 (B) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ (C) $\frac{8}{3}\left(2+\sqrt{3}\right)$ (D) $\frac{8}{5}\left(3+\sqrt{5}\right)$

(E) Les données ne suffisent pas pour le déterminer.

608. E01 X29

Un triangle équilatéral est inscrit dans un autre triangle équilatéral de manière que chaque côté de l'un soit perpendiculaire à un côté de l'autre. Que vaut le rapport de l'aire du plus grand à celle du plus petit ?

(A) 2 (B) 3 (C) $3\sqrt{3}$ (D) $9/4$ (E) 9

609. D99 X05

Sans réponse préformulée — Trois cercles centrés en A, B et C sont tangents extérieurement deux à deux. Ceux de centres B et C ont chacun une longueur de 6π et celui de centre A a une longueur de 4π. Que vaut l'aire du triangle ABC ?

610. , *quelleest*, *encentimètrescarrés*, *celledeC*$_1$?

(A) 4 (B) 4π (C) $4\sqrt{\pi}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) $4\sqrt{2}$

E01 X04

Soit C_2 un cercle tangent au cercle C_1 et passant par le centre de celui-ci.
Si l'aire de C_2 est d'1 cm^2

X
5
Y
4
P

611. E00 X29 Deux cercles de rayons x et y ($x > y$) sont tangents extérieurement. Soit X et Y les points de contact d'une tangente extérieure commune et P son point d'intersection avec la droite des centres. Si $\|XY\| = 5$ et $\|YP\| = 4$, que vaut x ?

(A) $\frac{14}{5}$ (B) 3 (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{9}{2}$ (E) $\frac{405}{52}$

A
B
C

612. D00 X18 Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle et $\|AB\| = 1$. Chacun des côtés de ce triangle est le diamètre d'un demi-cercle. Que vaut l'aire ombrée ?

(A) $\frac{1}{4}\pi$ (B) $\frac{1}{4}(\pi - 1)$ (C) $\frac{1}{4}(\pi + 1)$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 1

613. D01 X04 Deux tangentes à un cercle de rayon 2 sont perpendiculaires. Quelle est l'aire de la portion de plan limitée par le cercle et ces deux tangentes ?

(A) $1/2$ (B) $3/4$ (C) $\pi/4$ (D) $4 - \pi$ (E) $2 - \pi/2$

614. E00 X11 Soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de cercles concentriques. Notons R_n la mesure en centimètres du rayon de Γ_n, P_n la mesure en centimètres de sa circonférence et A_n la mesure en centimètres carrés de son aire. Si, pour tout n, $R_{n+1} = R_n + \frac{1}{2}$, laquelle des relations suivantes est toujours vraie ?

(A) $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}P_n + \frac{\pi}{4}$
(B) $A_{n+1} = A_n + P_n + \frac{\pi}{2}$
(C) $A_{n+1} = A_n + P_n + \frac{\pi}{4}$
(D) $A_{n+1} = A_n + P_{n+1}$
(E) $A_{n+1} = A_n + P_{n+1} - P_n$

615. E99 X17 Un rectangle de diagonale d a $2p$ pour périmètre. Que vaut son aire ?

(A) $p^2/2 - d^2/4$
(B) $p^2/2 - d^2/2$
(C) $p^2 - d^2/2$
(D) $p^2 - d^2$
(E) $2p^2 - d^2$

616. E02 X23

Une feuille de papier $ABCD$ de format rectangulaire est telle que

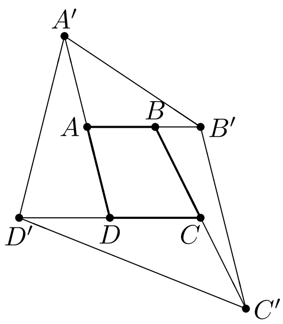
$$\|AB\| = a \quad \text{et} \quad \|BC\| = b \quad (\text{avec } b < a < 2b).$$

Cette feuille est pliée de manière à amener B sur un point du bord $[CD]$ tout en laissant C fixe. Ensuite, la feuille est pliée une seconde fois en amenant A sur un point du bord $[CD]$ tout en laissant D fixe. Quelle est l'aire du triangle obtenu après ces deux pliages successifs ?

(A) $\dfrac{a^2}{4}$ (B) $\dfrac{a\,b}{2}$ (C) $\dfrac{a\,b}{3}$ (D) $\dfrac{2\,b^2}{3}$ (E) $\dfrac{a^2+b^2}{6}$

617. E00 X13

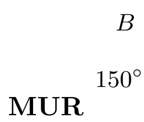
Soit $ABCD$ un trapèze (avec $AB \,/\!/\, CD$) ; les points A', B', C' et D' sont tels que A est le milieu de $[DA']$, B est le milieu de $[AB']$, C est le milieu de $[BC']$, D est le milieu de $[CD']$. Si a est l'aire de $ABCD$, quelle est celle du quadrilatère $A'B'C'D'$?



(A) $3a$ (B) $4a$ (C) $5a$ (D) $6a$ (E) $7a$

618. D00 X26

Un des coins d'une cour de ferme est formé par deux pans du mur dont l'angle est de 150°. Le fermier décide d'y placer un enclos pour ses poules, en forme de trapèze rectangle. S'il dispose de 10 m de treillis (et ne compte pas en placer le long des murs), quelle doit être, en mètres, la grande base B de ce trapèze pour que son aire soit maximale ?



(A) 7 (B) 10 (C) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ (D) $10\,(2-\sqrt{3})$ (E) $10\,(\sqrt{3}-1)$

619. D00 X30

Un octaèdre régulier d'arête 6 est coupé par un plan parallèle à deux de ses faces. Chaque arête coupée par ce plan l'est au tiers de sa longueur. Quelle est l'aire de l'hexagone que l'octaèdre découpe dans le plan ?

(A) $12\sqrt{3}$ (B) $13\sqrt{3}$ (C) $48\sqrt{3}$ (D) $12+24\sqrt{3}$ (E) $18+36\sqrt{3}$

620. E99 X04 Si le rayon d'une sphère est doublé, le rapport de son aire à son volume est :

Ⓐ Multiplié par quatre ;
Ⓑ Doublé ;
Ⓒ Divisé par deux ;
Ⓓ Divisé par quatre ;
Ⓔ Inchangé.

621. D01 X09 La figure ci-contre représente le développement d'un solide, avec indication de la longueur des arêtes. Quel est le volume de ce solide ?

$\sqrt{3}$
$\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$
1 2 1
1 1 1
1 1 1 1

Ⓐ $\sqrt{6}$
Ⓑ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
Ⓒ $6\sqrt{6}$
Ⓓ $4/3$
Ⓔ $3/2$

622. D00 X15 *Sans réponse préformulée* — Une praline sphérique est constituée d'une couche de chocolat noir entourant une sphère de chocolat blanc. Le diamètre de celle-ci est égal à l'épaisseur de la couche de chocolat noir. Quel est le rapport du volume du chocolat noir à celui du chocolat blanc ?

623. E00 X30 Soit T un tétraèdre quelconque et soit T' le tétraèdre dont les sommets sont les centres de gravité des faces de T. Que vaut le rapport du volume de T à celui de T' ?

Ⓐ 27 Ⓑ 8 Ⓒ $\frac{27}{8}$ Ⓓ 2 Ⓔ $\frac{3}{2}$

624. E00 X22 Deux verres à vin identiques, coniques, de hauteur h, sont l'un plein et l'autre vide. Jusqu'à quelle hauteur faut-il transvaser du liquide du verre plein dans l'autre pour que les deux verres contiennent la même quantité de liquide ?

Ⓐ $\frac{1}{2}h$ Ⓑ $\frac{1}{3}h$ Ⓒ $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ Ⓓ $\frac{\sqrt{6}}{6}h$ Ⓔ $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}h$

et **625.** cm^2, 72 cm^2 et 108 cm^2 ?

Sans réponse préformulée — Quel est, exprimé en centimètres cubes, le
D00 volume d'un parallélépipède rectangle dont les faces ont pour aires 54 cm^2
X08

626. D00 X04 *Sans réponse préformulée* — Une statue en bronze massif a une masse de 16 T. Quelle est, en kilogrammes, la masse de sa maquette à l'échelle $1/20^{\text{e}}$, également réalisée en bronze massif ?

627. D02 X05 *Sans réponse préformulée* — Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent aux côtés de celui-ci en D, E et F. Si les angles $\widehat{D}$ et $\widehat{E}$, marqués sur la figure ci-contre, mesurent respectivement 70° et 66°, quelle est la mesure en degrés de l'angle $A\widehat{C}B$?

A

F 66° E

70°

B D C

628. E01 X26 *Sans réponse préformulée* — Soit N le nombre de triangles ABC (non dégénérés) non semblables deux à deux, dont tous les angles sont mesurés en degrés par un nombre entier, avec de plus $A > 90°$. Que vaut $N/10$?

629. D02 X22 Si a, b, c, d sont quatre nombres réels strictement positifs tels que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < 1,$$

alors nécessairement

(A) $\frac{b}{a} < \frac{d}{c} < \frac{b\,d}{a\,c} < 1$ (D) $1 < \frac{b\,d}{a\,c} < \frac{b}{a} < \frac{d}{c}$

(B) $1 < \frac{d}{c} < \frac{b\,d}{a\,c} < \frac{b}{a}$ (E) $\frac{b\,d}{a\,c} < 1 < \frac{d}{c} < \frac{b}{a}$

(C) $1 < \frac{d}{c} < \frac{b}{a} < \frac{b\,d}{a\,c}$

630. E01 X30 La hauteur $[AH]$ et la médiane $[BM]$ d'un triangle ABC ont même longueur et se coupent à l'intérieur du triangle. Si $A\widehat{C}B = 56°$, que vaut $M\widehat{B}C$?

(A) 14° (B) 28° (C) 30° (D) 42° (E) 56°

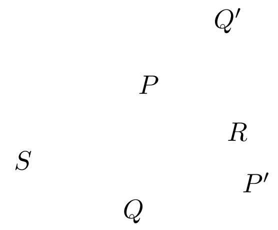
631. E00 X15 *Sans réponse préformulée* — Dans la figure (imprécise) ci-contre, quelle est, en degrés, la mesure principale de l'angle α ?

α

80°

30°

632. D99 X15 Dans la figure ci-contre, P' est le symétrique de P par rapport à QR et Q' est le symétrique de Q par rapport à PR. Si l'angle $P\widehat{R}Q$ vaut 50°, quelle est la mesure de l'angle $P\widehat{S}Q$?



(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°
(E) Les données ne suffisent pas pour le déterminer.

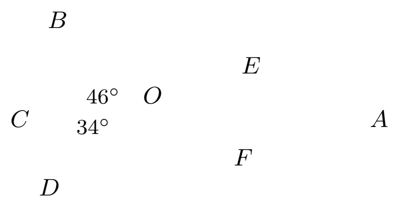
633. E02 X19 Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC ont la même longueur et ils comprennent respectivement les points P et Q tels que $\|AP\| = \|PQ\| =$ $= \|QB\| = \|BC\|$. L'amplitude de l'angle de sommet A du triangle ABC, exprimée en degrés, est alors

(A) $\frac{141}{7}$ (B) $\frac{65}{3}$ (C) $\frac{45}{2}$ (D) $\frac{180}{7}$ (E) 30

634. D00 X14 Si les angles extérieurs α', β' et γ' d'un triangle sont proportionnels à 4, 5 et 6, alors les angles intérieurs correspondants α, β et γ sont proportionnels à

(A) 3, 2 et 1 ;
(B) 4, 2 et 1 ;
(C) 4, 3 et 1 ;
(D) 7, 5 et 3 ;
(E) 20, 15 et 8.

635. E00 X21 Dans la figure (imprécise) ci-contre, O est le centre du cercle, A est un point extérieur et B, C, D, E et F sont des points du cercle. Si $B\widehat{O}C = 46°$ et $C\widehat{O}D = 34°$, que vaut la somme des angles $B\widehat{A}D$ et $E\widehat{C}F$?



(A) 24° (B) 40°
(C) 48° (D) 64° (E) 80°

636. D99 X18 Un quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur et ses deux autres côtés ont une longueur triple des deux côtés précédents. Les angles adjacents à deux côtés de longueurs distinctes sont droits. Quel est le sinus de l'angle aigu de ce quadrilatère ?

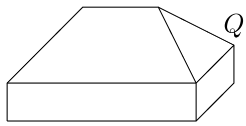
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

637. E99 X23 Un polygone régulier étoilé est un polygone croisé, connexe (c'est-à-dire d'un seul tenant), inscriptible dans un cercle et dont les côtés ont même longueur. Dans un cercle donné, combien est-il possible d'inscrire de polygones réguliers étoilés à 21 sommets, non isométriques deux à deux ?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

638. D02 X15 *Sans réponse préformulée* — Sur une plaque de bois est dessiné un pentagone convexe ; en chacun de ses sommets, un clou est planté. Un élastique tendu entre trois de ces clous permet de concrétiser un triangle en le délimitant. Combien faut-il utiliser d'élastiques pour concrétiser tous les triangles possibles de cette planche à clous ?

639. E99 X21 Tous les pans du toit de la maison de plan rectangulaire figurée ci-contre sont inclinés à 45° sur l'horizontale. Quelle est l'inclinaison de l'arête PQ ?



(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75° (E) Une autre valeur

640. E01 X11 Soit α un angle du premier quadrant et a, b deux réels strictement positifs tels que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$. Que vaut nécessairement $\sin\alpha$?

(A) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (B) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (C) $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ (D) $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$ (E) $\dfrac{a - b}{a + b}$

641. D02 X28 Dans un cercle, des cordes de longueur 2, 3 et 4 déterminent des angles au centre α, β et $\alpha + \beta$ avec $\alpha + \beta$ plus petit qu'un angle plat. Que vaut alors $64\cos\beta + 16\cos\alpha$?

(A) $2\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2} + 2$ (D) 5 (E) $\frac{81}{16}$

642. E02 X03

Quel est le nombre maximum de points communs à un cercle et à la courbe d'équation $y = \cos x$?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) Un nombre plus grand que 16.

(E) Ce nombre n'existe pas.

643. D02 X19

Étant donné deux réels a et b, soit les propositions

$$(1) \qquad a \leq b$$
$$(2) \qquad |a| \leq b$$

Laquelle des affirmations suivantes est alors vraie ?

(A) (1) implique (2) ;

(B) (2) implique (1) ;

(C) (1) et (2) sont équivalentes ;

(D) (2) est une condition nécessaire pour (1) ;

(E) (1) est une condition suffisante pour (2).

644. D99 X11

Les géographes comptent l'*azimut* a d'une direction sur la carte en degrés, de 0° à 360°, dans le sens horlogique, à partir du nord (qui est en haut de la carte). Les mathématiciens préfèrent travailler avec l'*angle polaire* p, mesuré en radians, de 0 à 2π, dans le sens antihorlogique, à partir de l'axe Ox, qui pointe vers la droite. Laquelle des relations suivantes permet de calculer p à partir de a ?

(A) $p = \frac{\pi}{180}a$

(B) $p = \frac{\pi}{180}(90 + a)$

(C) $p = \frac{\pi}{360}a$

(D) $p = \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{180}(90 - a) & \text{si } a \leq 90 \\ \frac{\pi}{180}(450 - a) & \text{si } a > 90 \end{array}\right.$

(E) $p = \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{180}(90 - a) & \text{si } a \leq 90 \\ \frac{\pi}{180}(90 + a) & \text{si } a > 90 \end{array}\right.$

B

A C

O

645. E99 X16 Dans la figure ci-contre, O est le centre du cercle et les angles $A\widehat{O}B$ et $B\widehat{O}C$ mesurent chacun 1 radian. Deux fourmis F et F' se rendent de A vers C, la première le long de l'arc $\widehat{ABC}$ et la seconde le long de la ligne brisée AOC. Elles partent en même temps et se déplacent à la même vitesse constante non nulle. Laquelle des affirmations suivantes est exacte ?

- **(A)** F arrivera en C avant que F' n'ait dépassé O.
- **(B)** F arrivera en C alors que F' est entre O et C.
- **(C)** F' arrivera en C alors que F est entre B et C.
- **(D)** F et F' arriveront simultanément en C.
- **(E)** Tout dépend du rayon du cercle.

646. E00 X08 Sur le cercle de rayon 10 centré à l'origine, combien y a-t-il de points dont les deux coordonnées sont entières ?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 12 **(E)** 16

647. E01 X17 Dans le plan $\mathbf{R}^2$, combien y a-t-il de points à coordonnées entières sur la droite d'équation $y = \sqrt{2}x$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 31 **(E)** Une infinité

648. E99 X19 *Sans réponse préformulée* — Quelle est l'abscisse du point de l'axe réel qui minimise la sormne des carrés de ses distances aux trois points d'abscisses -100, 9 et 1000 ?

649. D99 X04 Dans un repère orthonormé, les sommets d'un rectangle ont pour coordonnées $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ et $(0,1)$. Une droite passant par l'origine partage ce rectangle en deux parties dont les aires sont dans le rapport de 1 à 2. Quelle est sa pente ?

(A) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ **(E)** $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$

650. E99 X28 Dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy, quelle est l'aire de la région déterminée par la condition $|x| + |y| + |x + y| \leq 1$?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\sqrt{3} - 1$

651. D99 X24 Un quadrilatère convexe $ABCD$ satisfait l'égalité $\|AB\|^2 + \|CD\|^2 = \|BC\|^2 + \|DA\|^2$. Nécessairement :

(A) Ce quadrilatère est un trapèze ;
(B) Ce quadrilatère est un parallélogramme ;
(C) Les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires ;
(D) Ce quadrilatère a deux côtés opposés de même longueur ;
(E) Ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.

652. D02 X27 *Sans réponse préformulée* — Pour combien de valeurs entières de x la fraction $\dfrac{2\,x + 5}{x - 2}$ désigne-t-elle un entier ?

653. D99 X20 *Sans réponse préformulée* — De combien de régions connexes (c.-à-d. d'un seul tenant) se compose la partie de l'espace E obtenue en ôtant de E les plans des quatre faces d'un tétraèdre ?

654. D99 X27 Des tétraèdres dont les quatre faces sont des triangles non isocèles isométriques l'un à l'autre :

(A) Cela n'existe pas ;
(B) Cela existe et ils sont tous isométriques ;
(C) Cela existe et ils sont tous semblables ;
(D) Cela existe et ils ont tous un centre de symétrie ;
(E) Cela existe et ils ne possèdent jamais de plan de symétrie.

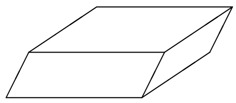
655. D00 X05 Dans chacune des cinq figures ci-dessous, la ligne intérieure est tracée à distance constante de la ligne extérieure. Dans quel cas la ligne intérieure *n'*est-elle *pas* semblable à la ligne extérieure ?

(A) (B) (C) (D) (E)

656. E01 X19 Projetons orthogonalement un cube sur un plan perpendiculaire à l'une de ses grandes diagonales. L'image de la réunion de ses arêtes est représentée par l'un des schémas suivants ; lequel ?

(A) (B) (C) (D) (E)

657. D01 X08 *Sans réponse préformulée* — Voici un parallélépipède vu en perspective. Combien possède-t-il de paires d'arêtes parallèles ?



658. D00 X22 *Sans réponse préformulée* — Dans un plan, deux polygones convexes ont l'un 21 côtés et l'autre 45. Combien ont-ils, au maximum, de points d'intersection ?

659. E00 X02 Un disque est partagé en 2000 secteurs de même amplitude par des rayons issus de son centre. Quel est le nombre maximal de ces secteurs qu'une droite peut couper, si elle ne passe pas par le centre du disque ?

(A) 998 (B) 999 (C) 1000 (D) 1001 (E) 1002

660. D00 X06 *Sans réponse préformulée* — Quatre cercles d'un plan se coupent deux à deux en 2 points distincts ; trois de ces cercles n'ont jamais de point commun. En combien de régions partagent-ils le plan ?

661. D01 X21 *Sans réponse préformulée* — Dans un polyèdre convexe, chaque sommet est entouré d'une face pentagonale et de deux faces hexagonales. Il y a 12 faces pentagonales. Quel est le nombre de faces hexagonales ?

4.4 Analyse

662. D00 X20 Voici le graphe de la dérivée première d'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Laquelle des propositions suivantes est certainement vraie ?

y

O x

(A) La fonction f est croissante sur $\mathbf{R}$.

(B) La fonction f admet un maximum en 0.

(C) La fonction f est croissante sur $\mathbf{R}_+$ et décroissante sur $\mathbf{R}_-$.

(D) La fonction f est une fonction paire.

(E) La fonction f admet Ox pour asymptote.

663. E01 X12 Quatre des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ suivantes ont le même domaine de définition. Une cinquième a un domaine de définition différent ; laquelle ?

(A) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

(B) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

(C) $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$

(D) $x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

(E) $x \mapsto \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

664. E99 X14 La fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto |\sin x| + |\cos x|$

(A) Est périodique et sa plus petite période est 2π ;

(B) Est périodique et sa plus petite période est π ;

(C) Est périodique et sa plus petite période est $\pi/2$;

(D) Est périodique et sa plus petite période est $\pi/4$;

(E) N'est pas périodique.

665. D01 X23 La fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \sin(x^2)$ est

- (A) Périodique de période 2π ;
- (B) Périodique de période π ;
- (C) Périodique de période π^2 ;
- (D) Périodique de période $\sqrt{\pi}$;
- (E) Non périodique.

666. D02 X11 La somme de deux fonctions périodiques, l'une de (plus petite) période 2 et l'autre de (plus petite) période 3, n'est jamais une fonction

- (A) Trigonométrique ;
- (B) Paire ;
- (C) Impaire ;
- (D) Constante ;
- (E) Périodique.

667. E02 X15 Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$ et a un nombre réel. Si, pour tout réel x,

$$f(2a - x) = f(x),$$

alors

- (A) La fonction g définie par $g(x) = f(x + a)$ est certainement paire ;
- (B) La fonction g définie par $g(x) = f(x + a)$ est certainement impaire ;
- (C) La fonction g définie par $g(x) = f(x - a)$ est certainement paire ;
- (D) La fonction g définie par $g(x) = f(x - a)$ est certainement impaire ;
- (E) La fonction g définie par $g(x) = f(a - x)$ est certainement impaire.

668. E00 X27 Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, partout définie. Laquelle des conditions suivantes *n'*est *pas* équivalente aux quatre autres ?

- (A) $(\forall\, x \in \mathbf{R})\ \ f(-x) = f(x)$
- (B) $(\forall\, x \in \mathbf{R}_-)\ f(-x) = f(x)$
- (C) $(\forall\, x \in \mathbf{R}_+)\ f(-x) = f(x)$
- (D) $(\forall\, x \in \mathbf{R}_-)\ f(|x|) = f(x)$
- (E) $(\forall\, x \in \mathbf{R}_+)\ f(|x|) = f(x)$

669. E01 X25 L'altitude h d'un avion est donnée en fonction du temps t par $h(t) = (t-1)(t-2)+4$. Les instants où cet avion descend sont exactement ceux où :

- (A) $t < 1$;
- (B) $t > 2$;
- (C) $t < 1$ ou $t > 2$;
- (D) $t < 3/2$;
- (E) $t > 0$.

670. E02 X20 Soit la fonction f définie par $f(x) = 3^x$. Alors,

$$f(x+2) - f(x+1) =$$

(A) $f(x)$ (B) $2\,f(x)$ (C) $4\,f(x)$ (D) $6\,f(x)$ (E) $8\,f(x)$

671. D01 X28 *Sans réponse préformulée* — Soit f une fonction de deux variables telle que, pour tous naturels m et n,

$$\begin{aligned} &f(0,n) = n+1,\\ &f(m+1,0) = f(m,1),\\ &f(m+1,n+1) = f(m, f(m+1,n)). \end{aligned}$$

Que vaut $f(1,1)$?

672. E01 X09 Laquelle des fonctions suivantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est une isométrie de la droite réelle ?

- (A) $x \mapsto 3x$
- (B) $x \mapsto -x+3$
- (C) $x \mapsto x^3$
- (D) $x \mapsto |x|$
- (E) $x \mapsto 3$

673. D99 X14 Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x, $f(2x+1) = 4x^2 - 4x + 1$, alors $f(x) = 0$ lorsque x vaut :

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

674. E02 X27 Soit une fonction réelle f définie dans $\mathbf{R}$ telle que

$$(\forall\, x \in \mathbf{R})\ f(x) \cdot (f(x) - x) = 0.$$

Alors,

(A) f est nécessairement la fonction nulle ;

(B) f est nécessairement la fonction identique (appliquant x sur x) ;

(C) f est soit la fonction nulle, soit la fonction identique ;

(D) Il existe exactement quatre fonctions vérifiant la propriété énoncée ;

(E) Il existe une infinité de fonctions vérifiant la propriété énoncée.

675. E02 X29 L'expression $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur à x. Alors, la fonction $f(x) = \left\lfloor x + \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{2} - x \right\rfloor$, définie sur $\mathbf{R}$,

(A) Est strictement croissante ;

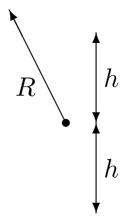
(B) Est constante ;

(C) Est strictement décroissante ;

(D) A pour ensemble-image l'intervalle $[\,3; 4\,]$;

(E) A pour ensemble-image la paire $\{3, 4\}$.

676. D99 X30 Dans un tronc d'arbre supposé cylindrique, doivent être découpées deux poutres de même forme dont la section est un trapèze isocèle (voir la figure ci-contre) et dont les faces rectangulaires sont parallèles à l'axe du tronc. Si le rayon du tronc est R, quelle doit être la hauteur h commune de ces trapèzes pour que le volume de ces poutres soit maximal ?



(A) $\frac{1}{4}R$ (B) $\frac{1}{2}R$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ (E) R

677. L'une des courbes ci-dessous est représentée par les équations paramétriques
E00
X14

$$\begin{cases} x = -t\cos t \\ y = t\sin t, \end{cases}$$

t variant de 0 à $+\infty$. Laquelle ?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
y	y	y	y	y
x	x	x	x	x

678. E00 X24 D est un disque de rayon r et D' un disque de rayon x centré sur le bord de D. Notons $f(x)$ l'aire de $D \cap D'$. Lequel des graphes ci-dessous est celui de f ?

(A)
y πr^2
O r $2r$ x

(B)
y πr^2
O r $2r$ x

(C)
y πr^2
O r $2r$ x

(D)
y πr^2
O r $2r$ x

(E)
y πr^2
O r $2r$ x

679. Une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est représentée graphiquement ci-contre. (Un point plein $\bullet$ fait partie du graphe, mais un point creux $\circ$, pas.) Lequel des cinq graphes ci-dessous est celui de la fonction $1/f$?

D00
X09

y 1 O 1 x

(A) y 1 x 1

(D) 1 O 1 x

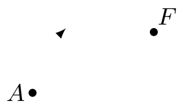
(B) y 1 x 1

(E) y 1 O 1 x

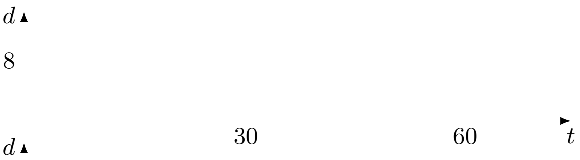
(C) y 1 O 1 x

680. D02 X26

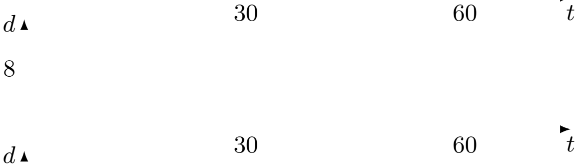
Un cercle est tracé sur une feuille de papier (voir la figure ci-contre). Partant du point A, une fourmi se déplace le long de ce cercle à la vitesse constante de 1 cm/s. Parmi les graphiques suivants, quel est celui qui représente la variation de la distance $d = \|AF\|$ séparant la fourmi de son point de départ A en fonction du temps ?



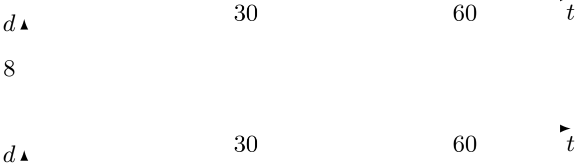
(A)



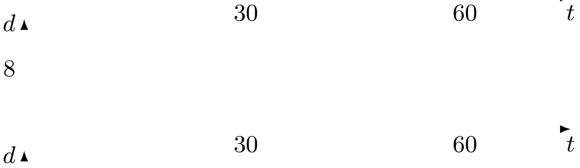
(B)



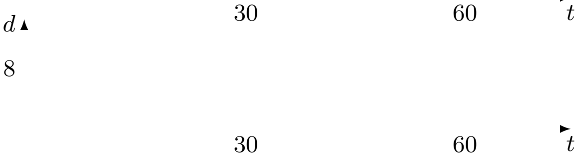
(C)



(D)



(E)



681. D99 X10 Le graphe ci-dessous est celui de l'une des fonctions suivantes ; laquelle ?

y

1

O π x

(A) $x \mapsto 2\cos^2 x$

(B) $x \mapsto 2|\cos x|$

(C) $x \mapsto 2\cos|x|$

(D) $x \mapsto 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(E) $x \mapsto 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

S

682. Le côté de l'hexagone régulier ci-contre vaut a et son aire, H. Le point P en parcourt le bord à partir du sommet S. Lequel des cinq graphes ci-dessous représente l'aire A de la région ombrée en fonction de la distance x parcourue par P ?
E99
X11

P

A
H

(A)

x
$6a$

A
H

(D)

x
$6a$

A
H

(B)

x
$6a$

A
H

(E)

x
$6a$

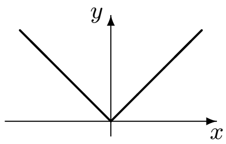
A
H

(C)

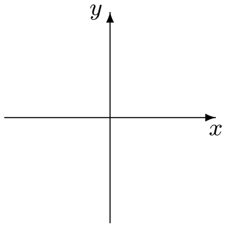
x
$6a$

683. D02 X29

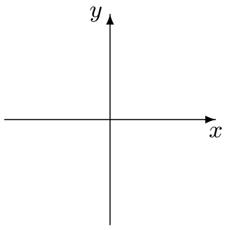
Le graphique ci-contre est celui de la dérivée d'une fonction f. Parmi les graphiques suivants, lequel pourrait être celui de la fonction f ?



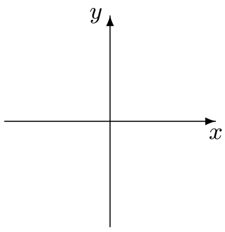
(A)



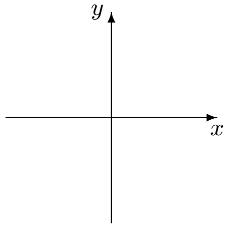
(B)



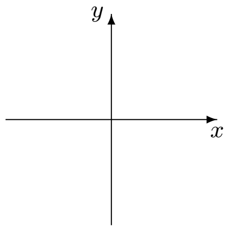
(C)



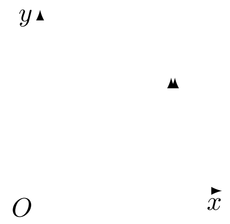
(D)

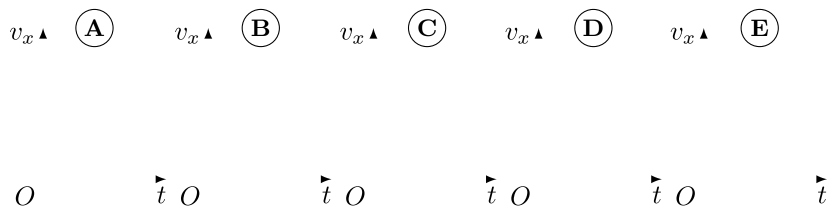


(E)



684. E01 X22 La pointe d'un crayon trace à vitesse constante une courbe en forme de lettre manuscrite « e » (voir le schéma ci-contre). L'un des graphiques suivants donne en fonction du temps t la composante selon x de son vecteur vitesse ; lequel ?





4.5 Logique

685. E01 X02 Quelle est la négation de « *La nuit, tous les chats sont gris.* » ?

(A) « *Le jour, aucun chat n'est gris.* »
(B) « *Le jour, tous les chats sont gris.* »
(C) « *La nuit, aucun chat n'est gris.* »
(D) « *Au moins un chat est gris la nuit.* »
(E) « *Au moins un chat n'est pas gris la nuit.* »

686. E00 X01 Parmi les élèves de l'école du village, il y a des garçons et des filles ; par contre, le club de football du village ne compte que des garçons. Laquelle des affirmations suivantes se déduit de ces informations ?

(A) Tous les membres du club de football sont des élèves de l'école.
(B) Aucun élève n'est membre du club de football.
(C) Certains élèves sont membres du club de football.
(D) Certains membres du club ne sont pas des élèves.
(E) Certains élèves ne sont pas membres du club de football.

687. D01 X12 Jean et Jacques sont parfois menteurs : l'un ment des deux les lundis, mardis et mercredis et dit la vérité les autres jours ; l'autre ment les jeudis, vendredis et samedis et dit la vérité les autres jours. Aujourd'hui, ils ont cette conversation :

JEAN. — Je mens tous les samedis.
JACQUES. — Je mentirai demain.
JEAN. — Je mens tous les dimanches.

Quel jour sommes-nous ?

(A) Dimanche (B) Lundi (C) Mercredi (D) Jeudi (E) Samedi

688. D01 X07 Parmi les phrases suivantes, quelle est la négation de : « *Si l'accusé est coupable, alors il a un complice.* » ?

(A) « *Si l'accusé a un complice, alors il est coupable.* »
(B) « *Si l'accusé est innocent, alors il n'a pas de complice.* »
(C) « *L'accusé est coupable et il n'a pas de complice.* »
(D) « *L'accusé est innocent : c'est son complice qui a fait le coup !* »
(E) « *L'accusé est innocent et il a un complice.* »

689. D02 X21 Pour tout naturel non nul n, on pose $f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Alors, quels que soient les naturels non nuls a et b, $f(a+b) - f(a) - f(b) =$

(A) ab
(B) $2ab$
(C) $a^2 + b^2 - ab$
(D) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$
(E) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - ab)$

690. E02 X10 Dans les quatre propositions ci-dessous, le point d'exclamation désigne la factorielle : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et $0! = 1$.
Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

(A) Pour tous naturels m et n, $(m+n)! = m! + n!$.

(B) Pour tous naturels m et n, $(m+n)! = m! \cdot n!$.

(C) Pour tout naturel m, $(2\,m)! = 2\,m!$.

(D) Pour tout naturel m, $(2\,m)! = 2^m\,m!$.

(E) Les quatre propositions précédentes sont fausses.

4.6 Analyse combinatoire & probabilités

691. D01 X30 Dix cartes sont numérotées de 1 à 10. Après les avoir mélangées, vous jouez comme suit :

(a) Prenez la carte du dessus du paquet ; si elle porte le numéro 1, vous avez gagné ; sinon, allez en (b).

(b) Si vous avez déjà tiré trois cartes, vous avez perdu ; sinon, replacez la carte que vous avez en main dans le paquet, à la place indiquée par son numéro (à partir du dessus du paquet) et allez en (a).

Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?

(A) $\dfrac{29}{100}$ (B) $\dfrac{3}{10}$ (C) $\dfrac{2}{7}$ (D) $\dfrac{13}{45}$

(E) Une autre réponse

692. D02 X03 Pour organiser mon emploi du temps, je dois répondre à Alexandre avant de répondre à Béatrice, à Claire avant Denis et à Claire avant Béatrice. Dans combien d'ordres différents puis-je alors donner mes quatre réponses ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

693. E01 X01 Combien de cartes d'un jeu de 52 cartes faut-il prendre pour être certain d'avoir au moins une carte de chacune des quatre couleurs ?

(A) 5 (B) 14 (C) 27 (D) 36 (E) 40

694. E99 X08 Une classe comporte dix filles et onze garçons. Quel est le rapport du nombre de manières de ranger les garçons en une file au nombre de manières de ranger les filles en une file ?

(A) 2 (B) 10 (C) 11 (D) 10^{11} (E) 11^{10}

695. D00 X10 Francis possède 12 disques compacts : 5 de J.-J. Goldman, 3 de C. Dion, 3 de P. Obispo et 1 de J. Halliday. De combien de manières peut-il les ordonner sur une planche de son étagère, s'il ne sépare pas les disques d'un même interprète ?

(A) 24 (B) 120 (C) 540 (D) 103 680 (E) 665 280

696. D02 X17 *Sans réponse préformulée* — Dix couples mariés se retrouvent pour fêter un anniversaire. Chaque personne serre la main de chaque autre, sauf de son conjoint. Combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?

697. E00 X20 Une boite contient des jetons de trois couleurs : des rouges, des verts et des blancs. Le nombre de jetons verts est au moins la moitié du nombre de jetons blancs et au plus le tiers du nombre de jetons rouges. Le total du nombre de jetons blancs et du nombre de jetons verts est au moins de 55. Quel est le nombre minimal de jetons rouges compatible avec ces informations ?

(A) 54 (B) 55 (C) 56 (D) 57 (E) 60

698. D99 X07 60 joueurs de basket doivent être répartis dans des équipes de 5 à 10 joueurs, de telle sorte qu'aucune équipe n'ait deux ou plus de deux joueurs de plus qu'une autre. Quels sont les nombres d'équipes que ces règles permettent de former ?

(A) 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12
(B) 6, 8, 9, 10 et 12
(C) 6, 10 et 12
(D) 6, 8, 10 et 12
(E) 6, 7, 8 et 12

699. E00 X06 Combien existe-t-il de nombres de quatre chiffres non nuls distincts dont la somme des chiffres est 12 ?

(A) 2 (B) 24 (C) 48 (D) 56 (E) Plus de cent

700. E02 X08 Lors d'un sondage, 500 personnes ont dû répondre par « oui » ou « non » à deux questions ; 375 d'entre elles ont choisi « oui » pour la première question ; 275 ont répondu « oui » pour la seconde question et 40 ont choisi « non » aux deux questions. Combien de ces personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

(A) 95 (B) 125 (C) 185 (D) 190 (E) 215

701. D02 X06 Les dates sont codées à l'aide de 6 chiffres (JJ.MM.AA) ; par exemple, 06.02.02 pour le 6 février 2002. Mais un assemblage de 6 chiffres ne correspond pas toujours à une date ; par exemple, 12.34.56. Parmi tous les assemblages possibles de 6 chiffres, quelle est la proportion, à 0,1 % près, de ceux qui correspondent à une date ?

(A) 3,6 % (B) 10 % (C) 11 % (D) 12 % (E) 36 %

702. E02 X25 Six nombres différents sont tirés au hasard dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, chaque nombre ayant la même probabilité d'être choisi. Quelle est la probabilité que le plus petit des nombres tirés soit 3 ?

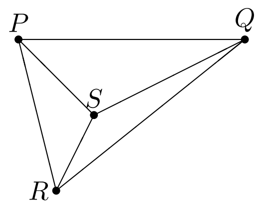
(A) $\frac{1}{210}$ (B) $\frac{1}{84}$ (C) $\frac{1}{35}$ (D) $\frac{1}{27}$ (E) $\frac{1}{14}$

703. D00 X27 Un fil de longueur L est coupé en deux, le point de section étant choisi au hasard (uniformément). Soit $x \geq 1$; quelle est la probabilité que l'un des morceaux soit au moins x fois aussi long que l'autre ?

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{x}$ (C) $\dfrac{1}{1+x}$ (D) $\dfrac{2}{1+x}$

(E) Elle dépend de L.

704. E99 X30 Les quatre villages P, Q, R et S sont reliés entre eux par des routes comme indiqué sur le schéma ci-contre. Lorsqu'il neige, chacune des routes a une chance sur deux d'être barrée. Il a neigé la nuit dernière. Quelle est la probabilité qu'il soit quand même possible de se rendre de chaque village à chaque autre ?



(A) $\frac{11}{32}$ (B) $\frac{13}{32}$ (C) $\frac{15}{32}$ (D) $\frac{17}{32}$ (E) $\frac{19}{32}$

705. D99 X23 Jean, qui s'est caché, est recherché par ses amis. *A priori*, il y a une chance sur quatre qu'il soit dans le jardin. Sinon, il est dans l'une des neuf pièces de la maison, de manière équiprobable. Ses amis ont déjà fouillé sans le trouver six des pièces. Quelle est, compte tenu des seules informations disponibles à ce moment, la probabilité qu'il se trouve dans la pièce suivante ?

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{3}$

706. E01 X18 Soit E un ensemble de naturels. Un élément de cet ensemble est choisi au hasard : la probabilité qu'il soit pair est 1/2 et celle qu'il soit multiple de 7 est 1/7. Soit p la probabilité qu'il soit multiple de 14. Laquelle des affirmations suivantes est toujours correcte ?

(A) $p = 0$ (B) $p = \frac{1}{14}$ (C) $\frac{1}{7} \leq p \leq \frac{1}{2}$ (D) $p = \frac{9}{14}$

(E) Sans information supplémentaire, il est impossible de déterminer p.

707. E01 X07 Admettons que, à chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille est égale à celle d'avoir un garçon et que les sexes de différents enfants sont indépendants. Si j'ai deux enfants, quelle est la probabilité que j'aie au moins une fille ?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

4.7 Problèmes — Divers

708. E02 X18 *Sans réponse préformulée* — J'ai beaucoup de pièces de 1 centime, plus de 1000 mais moins de 5000.

- Si j'en fais des tas de 10, il en reste une.
- Si j'en fais des tas de 9, il en reste 2.
- Si j'en fais des tas de 8, il en reste 3.
- Par contre, si j'en fais des tas de 11, il ne m'en reste plus.

Combien ai-je alors fait de tas de 11 ?

709. E00 X16
Un bassin contient 198 poissons rouges et 2 poissons noirs ; la proportion de poissons rouges est alors de x %. Combien de poissons rouges faut-il enlever pour que la proportion de poissons rouges dans le bassin passe à $(x-1)$ % ?

(A) 149 (B) 100 (C) 98 (D) 58 (E) 1

710. D99 X01
Je traine une moyenne de 9/20 en mathématique depuis le début de ce trimestre. Heureusement, avec le 17/20 que je viens d'obtenir, ma moyenne remonte à 10/20. Si chaque interrogation est notée sur 20 points, combien y en a-t-il eu durant ce trimestre, celle-ci comprise ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

711. E00 X28
Sans réponse préformulée — Deux voitures se déplacent à vitesse constante. La plus lente met 1 min de plus que l'autre pour parcourir 16 km ; par ailleurs, elle parcourt 4 km de moins que l'autre en 1 h. Quelle est, en kilomètres par heure, la vitesse de la plus rapide des deux voitures ?

712. D00 X11
Le lièvre et la tortue courent tous deux à vitesse constante, la vitesse du lièvre étant le double de celle de la tortue. Si celle-ci a, au moment du départ, une avance a, quelle distance aura parcourue le lièvre lorsqu'il rattrapera la tortue ?

(A) a (B) $2a$ (C) $a+2$ (D) $\dfrac{a}{a+2}$ (E) $\dfrac{2a}{a+2}$

713. E02 X11
Sans réponse préformulée — Deux trains qui roulent à 60 km/h se croisent. L'un a une longueur de 200 m et l'autre de 300 m. Combien de temps, mesuré en secondes, s'écoule entre l'instant où les débuts des deux trains sont à la même hauteur et celui où les queues de ces trains sont à leur tour à la même hauteur ?

714. E02 X24
Quel est, au maximum, le nombre d'éléments d'un ensemble de diviseurs naturels de 60 dans lequel aucun élément ne divise aucun autre ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

715. E01 X23 *Sans réponse préformulée* — Un silo A contient un mélange homogène de ciment et de sable, dans le rapport de 2 kg de ciment pour 3 kg de sable. Un silo B contient lui aussi un tel mélange, avec 3 kg de ciment pour 7 kg de sable. En puisant dans ces deux silos, on souhaite obtenir 120 kg d'un mélange contenant 3 kg de ciment pour 5 kg de sable. Combien de kilogrammes de mélange faut-il prélever dans le silo A ?

716. D02 X09 Si x personnes travaillant x heures par jour pendant x jours produisent x articles identiques, quel est le nombre d'articles de même type que produiraient y personnes travaillant y heures par jour pendant y jours ? Il est admis que toutes les personnes ont la même productivité.

(A) y (B) $\frac{y^3}{x^2}$ (C) $\frac{y^3}{x^3}$ (D) $\frac{x^3}{y^3}$ (E) $\frac{x^2}{y^3}$

717. E02 X07 *Sans réponse préformulée* — Dans le plan, combien de points ayant pour coordonnée un couple de naturels appartiennent à la droite d'équation $2\,x + 3\,y = 25$?

718. D02 X18 À la fin de la correction d'un examen, noté sur 20, un professeur se fait la réflexion suivante : « *Si je doublais toutes les notes, le nombre d'échecs resterait le même.* » En admettant qu'un échec corresponde à une note strictement inférieure à 10 et qu'une note plus grande que 10 est ramenée à 20 après doublement, laquelle des affirmations suivantes est certainement correcte ?

(A) Toutes les notes sont strictement inférieures à 10.

(B) Toutes les notes sont supérieures à 10.

(C) Les notes sont soit strictement inférieures à 5, soit supérieures à 10.

(D) Il y a autant de notes inférieures à 5 que de notes supérieures à 10.

(E) Il y a autant de notes inférieures à 5 que de notes strictement supérieures à 5.

719. D99 X29 Un triangle rectangle (dont les côtés de l'angle droit sont notés a et b et les angles opposés α et β respectivement), satisfait la condition $a = \cos\alpha$. À son sujet, laquelle des affirmations suivantes est exacte ?

- **A** La longueur de l'hypoténuse peut valoir 2.
- **B** La longueur de l'hypoténuse vaut nécessairement 1.
- **C** Les trois côtés sont nécessairement de longueur inférieure à 1.
- **D** La longueur du côté b est nécessairement supérieure à celle de a.
- **E** Le côté b est nécessairement de longueur inférieure à 1.

720. D00 X28 *Sans réponse préformulée* — Soit n, b et $p \in \mathbf{N}$. Appelons *logarithme de n en base b modulo p* un naturel $l < p$ tel que $b^l - n$ est multiple de p. Quel est le logarithme de 3 en base 5 modulo 7 ?

4.8 Table des réponses

	E99	E00	E01	E02	D99	D00	D01	D02
X01	A	E	E	C	C	E	A	B
X02	29	D	E	C	E	D	C	D
X03	B	D	E	E	C	C	C	D
X04	C	A	A	C	A	2	D	E
X05	C	E	E	B	12	A	1	92
X06	B	C	A	A	C	14	24	A
X07	B	D	E	4	A	3	C	50
X08	C	D	D	D	C	648	18	E
X09	D	B	B	B	C	E	D	B
X10	7	D	222	E	B	D	B	B
X11	E	A	D	15	D	B	C	D
X12	D	144	A	D	E	C	C	125
X13	C	C	E	7	E	A	2	D
X14	C	B	D	B	E	D	E	D
X15	D	50	B	A	D	26	B	10
X16	D	B	C	A	2	A	E	9
X17	B	B	B	B	A	C	C	180
X18	D	C	E	361	B	D	C	C
X19	303	B	E	D	D	B	C	B
X20	E	D	40	D	15	A	D	C
X21	E	B	D	A	D	B	20	A
X22	D	E	A	B	D	42	24	C
X23	C	D	90	A	C	C	E	C
X24	B	E	B	C	C	204	73	E
X25	E	150	D	E	A	D	A	7
X26	3	A	198	C	4	E	B	B
X27	A	E	C	E	E	D	D	6
X28	B	64	C	A	E	5	3	D
X29	A	C	B	E	A	E	C	C
X30	E	A	C	C	D	B	D	B

Chapitre 5

Finales miNi

5.1 Finale 1999

1. Quarante tuyaux sont disponibles ; leurs longueurs sont de 2 m, 4 m ou 6 m. Il y a autant de tuyaux de 2 m que de tuyaux de 6 m. Quelle est la longueur totale des tuyaux disponibles ?

2. Un rectangle dont la longueur vaut trois fois la largeur est garni d'un quadrillage. Le long de chaque côté, quatre rangées de carrés sont gris ; les autres carrés sont blancs. Il y a 544 carrés gris. Combien y a-t-il de carrés blancs ?

3. Dans le trapèze $ABCD$, $AB\ //\ CD$, $\|AB\| = 10$ et $\|CD\| = 6$; en outre, la hauteur de ce trapèze est $h = 4$. Si P est le milieu de $[AD]$ et Q celui de $[PB]$, que vaut l'aire du triangle PCQ ?

4. Nous observons que

$$\begin{gathered} 1+2+1=4=2^2, \\ 1+2+3+2+1=9=3^2, \\ 1+2+3+4+3+2+1=16=4^2, \\ \ldots \end{gathered}$$

Les sommes ainsi construites sont-elles *toutes* des carrés d'entiers ? Si oui, le démontrer ; si non, indiquer un exemple où cette propriété n'est pas satisfaite.

5.2 Finale 2000

1. Alix, Bénédicte et Claude disposent chacune d'une plaque en bois de forme carrée, dont l'épaisseur est 1 cm. Les mesures en centimètres des côtés de ces plaques sont des nombres entiers impairs. Ces trois plaques sont découpées en petits cubes d'1 cm d'arête par des traits de scie parallèles à leurs côtés. Ces cubes sont alors rassemblés en un seul tas et les trois amies les utilisent pour former un maximum de cubes de 2 cm d'arête. Ce travail terminé, trois petits cubes unitaires restent non assemblés. Expliquer que ceci était prévisible.

2. Un triangle quelconque ABC a tous ses angles aigus. Soit D un point de $]AB[$. Le cercle $\mathcal{B}_1$ de centre B passant par D coupe $]BC[$ en E ; le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre C passant par E coupe $]CA[$ en F ; le cercle $\mathcal{A}_1$ de centre A passant par F coupe $]AB[$ en G ; le cercle $\mathcal{B}_2$ de centre B passant par G coupe $]BC[$ en H ; le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre C passant par H coupe $]CA[$ en I.

(a) Montrer que le cercle $\mathcal{A}_2$ de centre A passant par I coupe $]AB[$ en D.

(b) Dans quel(s) cas $\mathcal{A}_1$ passe-t-il par D ?

3. Dans un hexagone convexe $ABCDEF$, $AB \mathbin{//} CF$, $CD \mathbin{//} BE$ et $EF \mathbin{//}$ $\mathbin{//} AD$. Montrer que les triangles ACE et BDF ont même aire.

4. Avec trois chiffres distincts non nuls, il est possible de former six nombres de deux chiffres distincts. Quels sont ces six nombres si leur somme vaut 484 ? Ce problème admet-il une solution unique ?

5.3 Finale 2001

1. Mon épouse et moi avons trois enfants dont une paire de jumeaux. Le produit de s âges (exprimés en nombres entiers) des membres de la famille vaut 2001. Que vaut la somme de ces âges ?

2. Si n est un nombre naturel autre que zéro, convenons de représenter par le symbole $n!$ le produit des naturels de 1 à n (c'est-à-dire $1 \times 2 \times \cdots \times n$). Trouver le chiffre des unités de

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 2001!.$$

3. (a) Le parallélogramme $ABCD$ a une aire dont la mesure vaut 4002. Si M est le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AD]$, démontrer que l'aire du quadrilatère $AMCN$ a pour mesure 2001.

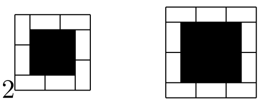
(b) Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe quelconque, si M est le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AD]$, l'aire du quadrilatère $AMCN$ vaut--elle encore la moitié de celle de $ABCD$?

4. (a) Déterminer le plus petit nombre naturel qui, ajouté à 1000, 1231 et 1715, donne trois nombres ayant un diviseur commun plus grand que 1.

(b) Existe-t-il d'autres naturels que celui trouvé ci-dessus qui possèdent la même propriété ? Si oui, quel est le plus petit d'entre eux ? Quels sont tous ceux qui conviennent ?

5.4 Finale 2002

1. Mathilde dispose des dominos de 1 cm sur 2 cm de manière à former le contour d'un carré, comme le montre chacune des deux figures ci-dessous.

.2


Le carré intérieur a une aire de 9 cm^2*danslafiguredegaucheetde*16 cm^2 dans celle de droite.

(a) Quelle sera l'aire du carré intérieur si Mathilde utilise 20 dominos ?

(b) Et si elle utilise 2002 dominos ?

(c) Avec un nombre quelconque de dominos, Mathilde pourra-t-elle toujours former le contour d'un carré ? Si non, déterminer tous les nombres pour lesquels cette opération est réalisable.

2. Deux points B et C étant fixés dans le plan, ccombien existe-t-il de triangles ABC possédant les deux propriétés suivantes :

– Les mesures des angles (en degrés) sont des nombres entiers ;
– L'amplitude de l'angle de sommet B est double de celle de l'angle de sommet C ?

3. Combien existe-t-il de paires de nombres (distincts) pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 2002\}$ et tels que leur somme est un nombre pair ?

4. Un quadrilatère convexe possède la propriété suivante : tous les triangles ayant pour sommets trois des sommets de ce quadrilatère ont le même périmètre. Ce quadrilatère a-t-il une forme particulière (trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré, ...) ?

Chapitre 6

Finales miDi

6.1 Finale 1999

1. Un rectangle dont la longueur vaut trois fois la largeur est garni d'un quadrillage. Le long de chaque côté, quatre rangées de carrés sont gris ; les autres carrés sont blancs. Il y a 915 carrés blancs. Combien y a-t-il de carrés gris ?

2. Mathieu simplifie erronément la fraction $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{abc}}$, obtenant ainsi $\dfrac{\overline{a}}{\overline{ac}}$. Et cependant, par extraordinaire, malgré cette erreur, les deux fractions sont égales. Quelle est leur valeur commune ?
(N.B. : $\overline{abc}$; $\overline{ab}$; etc. désignent les nombres formés par la juxtaposition des chiffres a, b et c ; a et b ; etc.)

3. Dans la figure ci-dessous, le Yin (la partie noire) et le Yang (la partie blanche) sont limités par des demi-cercles.

(a) Construire une droite qui partage le Yin ainsi que le Yang en deux parties de même aire.

(b) Y a-t-il d'autres solutions ? Si oui, les donner. Si non, expliquer pourquoi.

4. Cinq fléchettes ont atteint une cible ayant la forme d'un disque de 10 cm de rayon. Montrer que deux points d'impact, au moins, sont distants de de moins de $10\sqrt{2}$ cm.

6.2 Finale 2000

1. Sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ d'un parallélogramme $ABCD$, sont construits, extérieurement, les triangles équilatéraux ABF et ADE. Le triangle CEF est-il toujours équilatéral ?

2. Trois nombres réels non nuls ont la propriété que chacun d'eux est égal au carré de la somme des deux autres. Quels sont ces trois nombres ?

3. Par les sommets A et B d'un triangle ABC, deux droites sont tracées de manière à partager l'intérieur du triangle en quatre régions : trois triangles et un quadrilatère. Si trois de ces régions sont de même aire, montrer que le quadrilatère est l'une d'entre elles.

4. Déterminer tous les entiers $u \leq v \leq w \leq x \leq y \leq z$ tels que

$$2^u + 2^v + 2^w + 2^x + 2^y + 2^z = 2000.$$

6.3 Finale 2001

1. Les parallélogrammes $ABCD$ et $AEFG$ sont tels que E appartient à la droite BC et D à la droite FG. Comparer les aires de ces parallélogrammes. Sont-elles égales ? L'une est-elle toujours plus grande que l'autre ? Si oui, laquelle ?

2. Trouver touts les entiers x pour lesquels $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x - \sqrt{x}}$ sont eux-mêmes des entiers.

3. Déterminer tous les triples (x, y, z) constitués d'entiers naturels qui satisfont à l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

4. (a) Quelles sont toutes les valeurs prises par le reste (par défaut) de la division de a^3 par 7 lorsque a est un naturel quelconque ?

(b) Les entiers naturels a, b et c sont tels que $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 7. Que vaut alors le reste de la division de $a \cdot b \cdot c$ par 7 ?

6.4 Finale 2002

1. Soit M le milieu de la base $[AB]$ d'un trapèze isocèle $ABCD$ et E le point d'intersection de MD et de AC. Si M est le centre du cercle circonscrit au trapèze et si $[AD]$ et $[DE]$ ont la même longueur, déterminer l'amplitude de l'angle $D\widehat{A}B$.

2. La somme de quatre nombres réels est nulle ; la somme de leurs cubes est également nulle. Est-il vrai qu'alors deux de ces quatre nombres sont nécessairement opposés ?

3. (a) Existe-t-il quatre nombres naturels distincts non nuls tels que la somme de trois quelconques d'entre eux soit toujours un nombre premier ?

(b) Existe-t-il cinq nombres naturels distincts non nuls tels que la somme de trois quelconques d'entre eux soit toujours un nombre premier ?

4. Soit un rectangle $ABCD$, P un point situé sur un des côtés de ce rectangle, E et F les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les diagonales du rectangle. Démontrer que la somme $\|PE\|+\|PF\|$ reste constante lorsque P parcourt tout le périmètre de $ABCD$.

Chapitre 7

Finales maXi

7.1 Finale 1999

1. Une suite s_1 est constituée de n nombres naturels. La suite s_2 est obtenue par une modification de l'ordre des termes de s_1 ; la suite s_3 est construite en soustrayant, terme à terme, s_2 de s_1.

(a) Montrer que, lorsque $n = 3$, le produit des termes de s_3 est un nombre pair.

(b) Le résultat subsiste-t-il lorsque $n = 1999$?

2. Déterminer tous les polynomes P à coefficients réels tels que $P(X^2) = (P(X))^2$.

3. Un tétraèdre régulier et un octaèdre régulier, l'un et l'autre d'arête 1, reposent sur la table, posés sur une face. Lequel surpasse l'autre en hauteur ? De combien ?

4. Sur chaque côté d'un polygone régulier à n côtés, nous sélectionnons un point qui n'est pas un sommet, et nous construisons le n-gone convexe P que ces n points déterminent.

(a) Lorsque $n = 4$, si le quadrilatère P a ses angles égaux, est-il nécessairement un carré ?

(b) Lorsque $n = 5$, si le pentagone P a ses angles égaux, est-il nécessairement régulier ?

(c) Pour quels nombres naturels n supérieurs à 3 est-il vrai que, si le n-gone P a ses angles égaux, alors il est nécessairement régulier ?

7.2 Finale 2000

1. Montrer que si a, b et c sont trois nombres naturels distincts strictement supérieurs à 1, alors

$$\frac{a^2-1}{a^2} \cdot \frac{b^2-1}{b^2} \cdot \frac{c^2-1}{c^2} \geq \frac{5}{8}.$$

2. Déterminer tous les réels a tels que

$$(\forall\, x \in \mathbf{R})\ \sin(ax) = a \sin x \cos x.$$

3. Le polynome

$$P = (X-1)(X-2)(X-3)\cdots(X-2000) - 1$$

est-il divisible par un polynome à coefficients entiers, non constant et différent de P ?

4. Montrer que pour tout point P intérieur au triangle ABC,

$$\min\{\|PA\|, \|PB\|, \|PC\|\} + \|PA\| + \|PB\| + \|PC\| < \\ < \|AB\| + \|BC\| + \|CA\|.$$

7.3 Finale 2001

1. Étant donné un rectangle $ABCD$, déterminer deux points K et L respectivement sur $[BC]$ et sur $[CD]$ tels que les triangles ABK, AKL et ADL aient la même aire.

2. Trouver toutes les solutions du système suivant d'inconnues réelles x, y, u et v.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ u^2 + v^2 = 1 \\ xu + yv = 1 \\ xu - yv = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. Déterminer tous les réels r tels que -20, 1, 10 et r soient les quatre solutions d'une équation de la forme $p(q(x)) = 0$ dans laquelle $p(x)$ et $q(x)$ sont des trinomes du second degré.

4. Les entiers a_0, a_1, a_2, ..., a_{100} satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_1 > a_0 \geq 0 \\ a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k \quad \text{(pour } k = 0, 1, 2, \ldots, 98). \end{cases}$$

Comparer les nombres a_{100} et 2^{99}. Sont-ils égaux ? L'un est-il toujours plus grand que l'autre ? Si oui, lequel ?

7.4 Finale 2002

1. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$(\forall\, n \in \mathbf{N})\ a_n = n + \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

Déterminer le plus petit entier naturel k pour lequel a_k, a_{k+1},..., a_{k+2001} constituent une suite de 2002 entiers consécutifs.

N.B. : $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur à x.

2. (a) Dans le plan, soit $AB_1C_1D_1$ et $AB_2C_2D_2$ deux carrés ayant un sommet commun (les sommets sont cités dans le même sens). Si B, C et D sont respectivement les milieux des segments $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$ et $[D_1D_2]$, le quadrilatère $ABCD$ est-il aussi un carré ?

(b) Qu'en est-il si les sommets des carrés $AB_1C_1D_1$ et $AB_2C_2D_2$ sont cités en sens opposés ?

3. Voici une vue partielle d'une table de multiplication dans laquelle un tableau rectangulaire a été sélectionné.

$$
\begin{array}{|ccccc|cc}
\cline{1-5}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \\
3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & \cdots \\
4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & \cdots \\
\cline{1-5}
\multicolumn{1}{c}{5} & 10 & 15 & 20 & \multicolumn{1}{c}{25} & 30 & \cdots \\
\multicolumn{1}{c}{\vdots} & \vdots & \vdots & \vdots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Pour chaque tableau dont l'élément du coin supérieur gauche et celui du coin inférieur droit sont respectivement 1 et 2002, on calcule la somme de tous ses éléments. Quelle est la plus petite des sommes ainsi obtenues ?

4. Trouver tous les nombres premiers a et b tels que $a^{a+1} + b^{b+1}$ soit aussi un nombre premier.