Olympiades mathématiques belges

Recueil de questions 2007 – 2010

collationné par B. Baudelet, B. Bonnewyn & P. Dupont

Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française
(ASBL)

Ce volume est dédié à la mémoire de Claudine Festraets, qui a été durant tant d'années l'une des plus importantes chevilles ouvrières de l'Olympiade.

Table des matières

Chapitre 1

Présentation

Depuis la fondation de l'Olympiade mathématique belge, en 1976, ses questions sont consciencieusement recueillies en volumes publiés par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, ASBL, volumes dont le succès ne se dément pas.

Si ces livres suscitent toujours le même engouement, à l'heure où l'on entend régulièrement prédire la disparition du papier, c'est qu'ils continuent à répondre à une double attente.

D'une part, enseignants et élèves peuvent y puiser une importante collection d'exercices plus ou moins « décalés » par rapport à l'habituel drill scolaire (qui conserve son importance : nous ne prônons pas son abolition !), aux énoncés parfois plus ludiques.

D'autre part, les quelque 25 000 participants à l'Olympiade y trouvent la matière d'une préparation aux épreuves, préparation certes indispensable pour ceux qui visent un classement du meilleur niveau.

C'est donc le succès de ses six prédécesseurs qui nous a encouragés à préparer ce nouveau volume, consacré aux années 2007 à 2010. Toutes les questions d'éliminatoire et de demi-finale posées ces quatre dernières années y sont classées par niveau et par thème. Les questions de finale sont ensuite regroupées en fin de volume.

Benoit Baudelet,
Brigitte Bonnewyn,
Pascal Dupont

1.1 L'Olympiade mathématique belge

L'Olympiade mathématique belge ou O.M.B. est née en 1976. Elle a traversé sans interruption toutes ses éditions annuelles successives. Les dernières de celles-ci ont permis d'enregistrer plus de 28 000 inscriptions et environ 22 000 participants effectifs en Communauté française et au Grand-Duché de Luxembourg.

De quoi remplir un stade important si on les réunissait ! Ils furent au travail durant les mêmes 90 minutes au cours d'un même après-midi de janvier.

Je reconnais la paternité de cette belle organisation mais il importe de souligner que son pouvoir organisateur est la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française ou SBPMef qui compte environ 800 membres. Il convient de souligner davantage encore que le succès de l'épreuve repose entièrement sur une foule structurée de bénévoles. Selon mon estimation prudente il s'agit d'environ 400 personnes. Des professeurs qui se chargent d'organiser et de faire passer le concours à la base c'est-à-dire dans les écoles.

Cette observation nuance modestement la célèbre et réelle démotivation des enseignants. Au sommet de cette hiérarchie ou plutôt au centre, figurent des responsables divers au nombre d'une dizaine qui réalisent l'organisation et le fonctionnement par un travail opiniâtre et quasi quotidien. Dans ces cas-là, on préfère souvent ne pas citer de noms sous prétexte des oublis mais je veux m'avancer ici en citant dans le désordre des personnes qui se sont longuement illustrées : Marianne Potvliege, Claudine Hamoir-Festraets, Jean-Paul Doignon, Pascal Dupont, Christian Van Hooste, Claude Villers, Willy Vanhamme, Lucien Kieffer, Marc De Neef, Georges Delande, Roger Bex, Alfred Warbecq, Christiane Vandeputte, Pierre Van Elsuwé, Monique Wilmet, Henri Stéphenne...

Le concours évolue en trois tours comme on dit en tennis. D'abord l'éliminatoire, puis la demi-finale et enfin la finale. La demi-finale est organisée dans 10 centres régionaux qui ont leurs équipes de responsables propres. Les responsables régionaux jouent un rôle crucial et difficile en liaison avec les écoles et avec le Secrétariat National. Quelques-uns figurent au nombre des personnes citées ci-dessus. Les demi-finales et les Centres Régionaux furent mis en place en 1982. Ces dernières années, les demi-finales ont regroupé environ 2500 participants durant les mêmes 90 minutes d'un mercredi après-midi en février.

Quels furent et quels sont les principes directeurs de l'O.M.B. ?

Le premier gouverne les autres. C'est l'importance des problèmes dans l'activité mathématique de tout niveau et de toute époque en tout lieu. Cette importance déborde du cadre mathématique. Je cite G. Polya (*Mathematical Discovery*, 1962).

Résoudre un problème, c'est chercher un chemin au travers

> *d'une difficulté, un chemin pour contourner un obstacle ou qui permette d'atteindre un but qui n'est pas directement accessible. Résoudre des problèmes est le propre de l'intelligence, et l'intelligence est l'attribut propre de la nature humaine : résoudre des problèmes est l'activité la plus spécifiquement humaine.*

Une parenthèse s'impose ici. Le grand public y compris ses couches les plus cultivées continuent à répandre fièrement le stéréotype selon lequel les mathématiques sont une science achevée. Rien n'est plus faux. Des centaines de milliers de résultats nouveaux sont publiés chaque année et ce rythme de production a connu une croissance accélérée depuis la Renaissance. Ce gigantesque chaos que nul ne peut dominer, est fondé sur des problèmes. Le traitement mathématique d'informations consiste notamment en observations de ces informations par le cerveau, avec ou sans échanges entre des individus. L'observation se fait en formulant des questions et en tentant d'y répondre. La réponse peut exiger de nouvelles questions et ainsi de suite. Certaines questions peuvent devenir plus significatives par leur persistance, la simplicité de leur énoncé en vue de mémorisation et de transmission, par les liens qu'elles évoquent entre des domaines plutôt séparés, etc. Ainsi naissent des problèmes. Il a été écrit que les problèmes sont le pain quotidien du mathématicien. C'est un fait commun à toute production mathématique et à toute époque. Une question pourrait être un problème pour l'enfant de 7 ans et devenir trop facile, immédiate un an plus tard. Lire 33 dans la rue est un problème à 5 ans. Peu après, il devient banal. Peu avant, il est inaccessible. Chacun est confronté constamment à la résolution de problèmes mathématiques soit modestement dans la vie quotidienne, soit pour la détente sous forme de jeux. Nombreux sont les mathématiciens convaincus que les problèmes mathématiques peuvent et doivent jouer un rôle essentiel dans toute formation. Nous étions quelques-uns à partager cette conviction en 1976 et encore à présent. Mais pourquoi faut-il insister si c'est tellement évident ? Ce ne l'est pas pour le grand public. Malheur au professeur qui poserait trop de problèmes et surtout qui voudrait que chacun en fasse. Il irait à l'encontre du courant égalitaire dominant de plus en plus.

Un deuxième principe à la base de l'O.M.B. est la conviction que l'éducation se doit d'être ludique. Pour qu'un individu de 8 ans ou de 65 ans progresse dans un problème intéressant, il est préférable de stimuler son enthousiasme. Ainsi, l'O.M.B. est un jeu !

Un troisième principe découlant pour nous du deuxième est l'intérêt de la compétition. L'expérience éducative sur le terrain montre que l'enthousiasme peut être stimulé de manière importante par l'idée de compétition. On ose à peine l'écrire à notre époque où l'idée de compétition est devenue abusivement exorbitante dans tant de domaines de nos existences et à l'opposé extirpée dans le domaine scolaire au nom de l'égalitarisme auquel j'ai déjà fait allusion. Si j'osais un sarcasme, on peut craindre qu'un jour on ne fasse plus de mathématiques dans nos classes sous prétexte que certains sont avantagés. Collègues, ce n'est pas un sarcasme ! Sous couvert de mathématique, on n'offre guère de problèmes dans nos classes. Les bénévoles qui font fonctionner l'O.M.B. et les jeunes participants doivent le saisir plus ou moins consciemment. L'O.M.B. répond à un besoin trop peu ou pas satisfait.

Un quatrième principe qui rejoint les précédents et qui les développe est de penser non pas à quelques « anormaux » aimant les maths mais à tous les enfants et adolescents, eh oui. Si la mathématique consiste dans sa quintessence en traitement d'informations par le cerveau, on peut croire que cette activité constitue un bon entraînement pour ce cerveau, on peut croire que cette activité est ainsi favorable à la résolution d'autres problèmes et on peut avoir la faiblesse de croire que cette activité est bénéfique pour tous. Quand on demande à quoi servent les maths ou qu'on doute de leur utilité il faut répondre par leur efficacité à poser des problèmes et à les résoudre. Encore convient-il que l'enseignement aborde vraiment des problèmes.

À l'O.M.B. en 1976, nous allions donc tenter d'offrir la joie du jeu-compétition à tous sans forcer personne.

Un cinquième principe à mes yeux essentiel est d'échapper au terrorisme des examens. L'O.M.B. évalue. Et de quelle manière prestigieuse pour ceux qui sortent du lot : élèves, parents, professeurs, écoles. Et de quelle manière prestigieuse pour tous ! Le cinquième principe est basé sur le réalisme. Comment faire ? S'adresser à des inscriptions individuelles ? Pas pour une compétition de masse. Trop difficile à gérer. Nous avons opté pour un contact avec les écoles de tous réseaux. Un pluralisme réussi dans le pouvoir organisateur qu'est la SBPM, dans les structures de l'O.M.B., dans son fonctionnement et surtout dans l'adhésion de la base. S'adresser à toutes les écoles ? Mais encore ? Nous ne pensions qu'aux écoles secondaires de toutes les filières ! Pas aux écoles primaires. On peut certes concevoir une version de l'O.M.B. destinée aux écoles primaires mais nous n'étions pas armé pour cette tâche et à l'heure actuelle la SBPMef et son « armée » de l'O.M.B. ne me semblent toujours pas armés pour franchir ce pas. Il le sera probablement par une autre instance. Soit. Mais comment toucher toutes les écoles secondaires ? Il fallait une liste d'adresses. Elle était disponible dans une publication du Ministère de l'Éducation Nationale. Il faut que chaque école participant au jeu ait un professeur responsable volontaire. Il est chargé de l'inscription des concurrents, en nombre quelconque, de réceptionner les questionnaires, de faire passer le premier tour, de nous communiquer un histogramme des résultats. Telle école peut avoir 400 concurrents. Telle autre peut en avoir un seul. Il n'y a pas de classement officiel des écoles ni même de classement officieux que je sache mais des observations sont possibles. Tous les élèves de la 1^e à la 6^e étaient invités et le sont encore. Le Secrétariat National, une appellation qui s'est maintenue malgré son caractère communautaire et l'impressionnante présence luxembourgeoise, dresse un histogramme global reprenant les résultats de toutes les écoles et le communique à celles-ci. Ainsi, chacun peut se situer. Mon classement serait par exemple 152^e sur 760. Pas mal. Et si j'étais 639^e ? Ce n'est qu'un jeu et l'important vous le savez est de participer. Une autre fois, je ferai mieux. Je vois d'ici votre sourire méfiant. Et si tricherie il y a ? Réponse : si elle existe, elle ne peut guère permettre de profits. Nous n'avons pas longtemps envisagé de faire permuter entre eux les professeurs responsables, de désigner des arbitres voire des inspecteurs. L'O.M.B. se base sur la confiance. En outre, la tricherie ne pourrait obtenir aucun bénéfice si ce n'est de participer à la demi-finale. Il n'empêche que ce genre de considération agite encore de nombreuses discussions. Certains sont plus méfiants que d'autres mais la naïveté domine. Il n'est pas exclu que la confiance si souvent refusée aux professeurs et aux écoles soit un facteur de réussite de l'O.M.B.. J'aime à le croire. Les meilleurs résultats individuels en demi-finale, environ une centaine, sont convoqués à une finale. On m'a souvent demandé si je suis élitiste et parfois on ne me l'a pas envoyé dire. J'ai fini par comprendre que c'est mal vu. J'ignore encore ce qu'est le contraire d'élitiste. On veut parfois me persuader que c'est « démocratique » mais la démarche est à vrai dire démagogique. Nous voulions nous adresser à tous et pensions à eux avant tout mais nous voulions souligner les meilleurs. N'est-ce pas la véritable démocratie ? Les meilleurs en finale sont classés. Il y a une proclamation et un palmarès.

Le sixième principe consistait à cerner la forme du questionnaire. Un correcteur allait-il passer trois mois à évaluer les copies de 760 participants ? La solution ? Un questionnaire à choix multiples. Il demeure très discuté parmi nous. Sa correction est ultra rapide. Le participant introduit ses réponses sur une seule feuille et celle-ci est corrigée à l'aide d'une grille. Ultra rapide. Proche de l'informatisation à laquelle nous avons toujours rêvé. C'est la pertinence des choix multiples qui est souvent contestée. On peut répondre au hasard et horreur, obtenir la bonne réponse ! Notre dissuasion ? Il y a toujours 5 réponses proposées. Ni trois, ni sept ! Un bon équilibre. Autre dissuasion ? « Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse ». Ce système nous plaît depuis longtemps. Vous direz : il n'empêche que le concurrent peut procéder par éliminations successives et déterminer ainsi la bonne réponse sans maîtriser entièrement la question. Dissuasion : introduire dans la 5^e réponse une possibilité d'ouverture du style « Aucune des 4 réponses précédentes ». Bref, je n'ai pas l'intention de vous convaincre sinon du fait que les choix multiples font l'objet dans les discussions pédagogiques de certains arguments inexacts. Force est de reconnaître cependant que les « têtes » de l'O.M.B. n'aiment pas uniformément les choix multiples. Nous avons « inventé » aussi les questions dont la réponse est nécessairement un nombre entier compris entre 0 et 999. C'est un choix multiple déguisé : on offre le choix parmi 1000 réponses ! Ce n'est pas tout ! Il convient que chaque question soit suffisamment brève, qu'elle puisse être résolue en quelques minutes, du moins en principe, qu'elle soit dépourvue de toute ambiguïté, inattaquable dans sa forme, dans sa réponse et qu'elle soit si possible originale... Très très difficile et très très long à élaborer. La substance même du concours. Une des tâches les plus délicates, conduite par le jury constitué d'une vingtaine de personnes. Un jury qui est lui-même chapeauté par un président et un secrétaire dont le travail est immensément difficile. La demi-finale fonctionne selon le même schéma. Chaque année exige ainsi la production de six questionnaires de 30 questions chacun. Pour certains, la tentation de réduire le nombre de questions est très grande. Le plus simple serait qu'il n'y ait pas de questions. Et en finale ? Nous donnons quatre problèmes à traiter en quatre heures. Il est demandé d'en rédiger une solution complète avec la démonstration obéissant aux impératifs de logique et de rigueur largement communs aux mathématiciens de notre temps. Très exigeant pour les concurrents soumis à des standards qu'ils ignorent le plus souvent. Parmi les plus forts, la densité de surdoués est élevée au fil des années. Une belle récompense pour tous ! Les surdoués ne sont pas le centre de nos préoccupations mais ils nous font grand plaisir. Ils montrent que notre travail a un sens. Il convient de se rappeler que la science mathématique millénaire s'est élaborée et s'élabore plus que jamais par des surdoués. Bien entendu, on voudrait savoir aussi ce qu'est le sens de l'O.M.B. pour la masse. La seule réponse que nous possédons est la fidélité des élèves, des professeurs et des écoles au fil des années et un engouement reconnu.

Le septième principe est constitué par les trois niveaux de l'épreuve qualifiés de miNi, miDi et maXi et destinés respectivement aux élèves de 1^{e}–2^{e}, de 3^{e}–4^{e} et de 5^{e}–6^{e}. En 1976, l'idée était de traiter tous les élèves pareillement. Une grande audace rompant avec le célèbre « saucissonnage » horizontal de notre éducation. Une audace qui nous paraissait nécessaire : certains problèmes mathématiques requièrent peu de connaissances. L'imagination est essentielle. Il n'empêche que c'était trop. Les connaissances acquises et l'expérience dans une science cumulative comme les mathématiques jouent un très grand rôle. Dès 1977, nous avons instauré la division en mini-maxi récoltant 893 et 1130 participants. La confrontation verticale nous a valu de nombreuses satisfactions. Il n'empêche que les discussions sur l'injustice du système ont survécu. En 1996, nous passions au détriplement. Pas facile à gérer. Désormais, il y a trois olympiades dans l'O.M.B..

La catégorie la plus peuplée est la miNi avec 10 500 participants en 2001, ce qui représente près de la moitié du total. À mon sens, un bon signe pour les mathématiques mais déconcertant pour bien des personnes qui se figurent que le goût des maths vient après 17 ans. Si j'étais professeur dans une école ou directeur, j'aimerais me positionner par rapport à d'autres grâce à l'O.M.B.. Il est permis de croire que je ne suis pas le seul à penser dans ces termes.

Et les coûts ? L'O.M.B. est autofinancée et bénéficiaire. Chaque participant paye un droit d'inscription de 1,20 €. Le bénévolat représente évidemment une clé marquante de l'équation financière. L'O.M.B. mériterait néanmoins le financement d'un emploi administratif à temps plein. En résumé, l'Olympiade mathématique belge est un grand succès dû en partie à l'efficacité, la rigueur, la disponibilité et l'enthousiasme de ses nombreux dirigeants. Elle a servi de modèle à bon nombre d'autres disciplines. Elle offre un stock considérable de problèmes intéressants pour les professeurs et le grand public.

Francis Buekenhout
(Université Libre de Bruxelles)

1.2 Tableau des participations successives

Année	miNi		miDi		maXi	
1976	-		-		760	
1977	893		-		1130	
1978	1012		-		1271	
1979	1204		-		1447	
1980	1390		-		1778	
1981	1482		-		1849	
1982	3021	(570)	-		3164	(693)
1983	3010	(664)	-		3292	(689)
1984	4424	(871)	-		3933	(782)
1985	5563	(926)	-		4621	(836)
1986	6339	(981)	-		5146	(871)
1987	7779	(1249)	-		6285	(1088)
1988	8149	(1125)	-		6834	(1086)
1989	9140	(1250)	-		7632	(1140)
1990	10488	(1195)	-		8236	(1154)
1991	7517	(1074)	-		5568	(973)
1992	9967	(1266)	-		6715	(984)
1993	11020	(1215)	-		7941	(1006)
1994	10498	(1314)	-		7288	(1065)
1995	11082	(1373)	-		7423	(1082)
1996	8909	(959)	7129	(919)	4937	(730)
1997	8993	(954)	6838	(972)	5038	(765)
1998	9805	(979)	6786	(842)	5376	(730)
1999	9934	(925)	6365	(719)	4995	(654)
2000	10306	(980)	6603	(770)	4811	(662)
2001	10576	(1022)	6598	(825)	4592	(650)
2002	10758	(1030)	6675	(786)	4463	(637)
2003	10912	(1022)	6604	(814)	4589	(652)
2004	12987	(1024)	8062	(765)	5697	(598)
2005	13289	(1073)	8833	(798)	5968	(669)
2006	13332	(1073)	8026	(795)	5819	(691)
2007	12991	(977)	8524	(748)	5881	(620)
2008	13849	(1115)	8258	(808)	6134	(698)
2009	13604	(1108)	8019	(758)	5860	(667)
2010	13416	(1060)	7507	(705)	5922	(658)

Entre parenthèses, figurent les nombres de demi-finalistes.

1.3 L'Olympiade mathématique internationale

Qu'elles soient nationales ou internationales, les Olympiades mathématiques s'inscrivent dans l'évolution actuelle de la pédagogie des mathématiques vers un enseignement faisant une plus grande part à l'activité personnelle des élèves. Privilégiant la réflexion à la mémorisation encyclopédique, elles proposent aux élèves des questions nécessitant une bonne compréhension des concepts, ainsi que des capacités d'analyse, de synthèse et d'imagination. L'O.M.I. constitue l'aboutissement logique du processus qui, pour l'élève belge, commence avec la participation à l'O.M.B.. L'Olympiade mathématique internationale a été organisée pour la première fois en 1959. Pendant plusieurs années, seuls les pays du bloc soviétique y participaient. Elle s'est élargie progressivement. L'O.M.I. est organisée par un Comité désigné par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Celle-ci est la section pédagogique de l'Union Mathématique Internationale, organisme lié à l'UNESCO. La Belgique est représentée au sein de cette Union via son Comité National de Mathématiques, lequel émane de l'Académie Royale des Arts, Sciences et Lettres. Lorsqu'un pays désire organiser l'O.M.I., son gouvernement fait (plusieurs années à l'avance) acte de candidature. Le moment venu, le pays organisateur adresse des invitations officielles aux pays susceptibles de participer. En Belgique, l'invitation est reçue par le Ministère des Affaires Étrangères, qui la transmet aux deux Ministères Communautaires de l'Enseignement. Chaque pays peut présenter un maximum de 6 élèves, n'ayant pas encore entamé l'enseignement supérieur. Chaque élève est invité à résoudre 6 problèmes. La moitié, au plus, des concurrents sont récompensés par des médailles d'or, d'argent ou de bronze. La Belgique a participé pour la première fois à l'O.M.I. en 1969, sans aucune préparation. Les résultats ne furent guère brillants. À la suite de la création de l'O.M.B., une seconde tentative eut lieu en 1977. Les résultats furent meilleurs mais néanmoins décevants. La SBPMef proposa alors à la Direction Générale de l'Organisation des Études d'assurer la préparation et la sélection des concurrents belges, ce qui fut fait à partir de 1979. Quelques années plus tard, la Communauté flamande exprima le désir de participer également à l'O.M.I. Depuis, la délégation belge est composée en parts égales d'élèves francophones et néerlandophones.

En vingt-deux participations, les concurrents belges ont obtenu une médaille d'or, sept médailles d'argent et trente-trois médailles de bronze. Ces résultats placent la Belgique au milieu d'un classement dominé par les grands pays : Chine, Russie, USA, Allemagne. En moyenne, la Belgique se classe honorablement parmi les petits pays. La SBPMef agit avec l'accord et pour le compte du Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation. Elle repère des élèves brillants parmi les participants à l'Olympiade mathématique belge. Elle les invite à prendre part à des week-ends de préparation, qui se déroulent au domaine de La Marlagne à Wépion. Les séances de travail sont assurées par des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et de l'enseignement universitaire.

1.4 La SBPMef

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française est née en 1975 à la suite d'une restructuration de la « Société Belge des Professeurs de Mathématique » créée elle-même en 1953. Son but principal est de contribuer à la promotion et à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique.

La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde.

La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un moyen d'expression et un art de raisonner. Les grandes étapes de son développement ont toujours correspondu à celles de l'évolution de la pensée humaine. Ainsi, elle a joué et continue de jouer un rôle de premier plan dans le développement culturel de l'humanité. D'où l'importance de l'objectif que s'est fixé la SBPMef.

La SBPMef est une association sans but lucratif qui se veut représentative de l'ensemble des professeurs de mathématique de la partie francophone du pays. Elle rassemble des enseignants de tous les réseaux (Communauté française, Enseignement catholique, Enseignement officiel neutre subventionné, Enseignement libre subventionné indépendant) et de tous les niveaux d'enseignement (instituteurs, régents, licenciés, professeurs d'écoles supérieures, universitaires ou non universitaires). Sa réflexion porte sur toutes les facettes de l'enseignement des mathématiques. Elle a ainsi été amenée à consacrer une grande partie de son activité à des sujets tels que l'impact sur l'enseignement des moyens modernes de traitement de l'information, les idées pédagogiques nouvelles, l'évaluation, les socles de compétence...

Le contenu des programmes de cours et les questions d'organisation de l'enseignement des mathématiques retiennent également son attention.

Pour nourrir sa réflexion et diffuser un maximum d'information, la SBPMef s'est dotée de moyens qui ont fait la preuve de leur efficacité. Chaque année, elle organise un congrès de trois jours où plus de deux cents professeurs échangent leurs expériences. La revue *Losanges* et le bulletin d'informations *SBPM-Infor*, ainsi que diverses brochures, constituent des supports d'information à la disposition des membres. Des commissions permanentes, auxquelles peuvent participer tous les membres, réfléchissent plus particulièrement à l'évolution de l'enseignement de la mathématique au niveau secondaire et préparent les prises de position de la Société.

La SBPMef s'adresse aussi directement aux élèves, par le canal de l'Olympiade mathématique belge. Elle les incite ainsi à s'intéresser à l'activité de base du mathématicien, à savoir la résolution de problèmes. C'est elle également qui assure la préparation des jeunes qui représentent la Communauté française de Belgique à l'Olympiade mathématique internationale.

Enfin, la SBPMef tient sa place au sein de la communauté mathématique nationale et internationale et plus particulièrement au sein des groupes qui se préoccupent de l'enseignement des mathématiques. Une convention l'associe aux activités du CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques).

Au niveau institutionnel, de nombreux contacts lient la SBPMef à diverses sociétés étrangères, avec qui elle échange des informations et des publications. Au niveau individuel, nombreux sont les membres de la SBPMef qui participent aux congrès internationaux qui ont lieu chaque année.

Enfin, la SBPMef figure parmi les membres fondateurs de la Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques créée le 12 mai 1999.

Renseignements pratiques :

Siège administratif :	Rue du Onze Novembre 24 B-7000 MONS
Téléphone & fax :	065.31.91.80
Courriel :	`sbpm@sbpm.be`
Adresse Internet :	`http://www.sbpm.be`

En consultant les pages de ce site, vous pourrez trouver tous les renseignements utiles concernant les activités et les publications de la SBPMef.

1.5 Conventions utilisées

Les notations chiffrées qui figurent en regard de chacune des questions permettent de déterminer s'il s'agit d'une question d'éliminatoire ou d'une question de demi-finale, la catégorie concernée et le numéro de la question dans le questionnaire original.

- `e`a : Éliminatoire de l'année a,
  `d`a : Demi-finale de l'année a ;
- `N`q : Catégorie miNi, question q,
  `D`q : Catégorie miDi, question q,
  `X`q : Catégorie maXi, question q.

Exemple :
Le cartouche

230
d10
N21

signifie que la 230e question de ce recueil n'est autre que la question 21 de la demi-finale 2010 de la miNi Olympiade.

Chapitre 2

Éliminatoires et demi-finales miNi

2.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

N	07		08		09		10	
	e	d	e	d	e	d	e	d
1	001	003	002	107	105	004	106	005
2	006	198	007	009	008	108	197	109
3	010	112	011	016	012	113	110	017
4	013	020	111	021	014	200	015	022
5	114	116	199	029	018	030	019	031
6	023	033	185	119	024	186	025	034
7	115	123	026	202	027	124	028	036
8	201	040	117	129	118	204	032	041
9	035	043	120	044	121	045	122	046
10	037	049	125	208	203	050	038	238
11	126	136	127	053	039	054	128	055
12	042	058	205	138	130	059	206	140
13	131	064	132	189	047	144	187	145
14	133	147	134	211	048	066	207	148
15	135	216	051	150	209	070	052	071
16	188	154	056	218	137	155	057	156
17	139	076	060	221	141	159	142	077
18	061	079	062	080	143	224	063	225
19	210	227	065	239	190	082	146	163
20	212	191	067	169	213	084	068	085
21	214	193	069	171	215	172	149	230
22	151	174	152	194	153	089	217	175
23	072	232	073	090	157	176	074	091
24	219	177	220	195	075	233	158	234
25	160	178	078	179	222	180	223	196
26	081	092	226	093	161	094	162	095
27	164	096	165	097	166	235	167	098
28	083	099	228	100	168	236	229	181
29	086	237	087	101	192	182	170	102
30	088	183	231	103	173	104	240	184

2.2 Arithmétique & algèbre

001 e07 N01

$\frac{4}{10} - \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10}\right) =$

(A) 0,2 (B) 0,29 (C) 0,3 (D) 0,31 (E) 0,38

002 e08 N01

$(200 \times 3) + (200 + 7) - (200 - 7) + 200 =$

(A) 1 214 (B) 1 200 (C) 814 (D) 800 (E) 614

003 d07 N01

$(5-1)(4-2)(3-3)(2-4)(1-5) =$

(A) -192 (B) -64 (C) 0 (D) 64 (E) 192

004 d09 N01

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 =$

(A) 50 (B) 55 (C) 99 (D) 100 (E) 110

005 d10 N01

L'un des nombres suivants *n*'est *pas* le carré d'un naturel. Lequel ?

(A) 100 (B) 625 (C) 900 (D) 1000 (E) 1024

006 e07 N02

$10-9+8-7+6-5+4-3+2-1 =$

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 7

007 e08 N02

$\frac{2008+2008+2008+2008+2008+2008}{2008+2008} =$

(A) 8 032 (B) 3 024 (C) 1 004 (D) 3 (E) 1

008 e09 N02

$\frac{20 \times 30 \times 40}{5 \times 20 \times 80} =$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 3

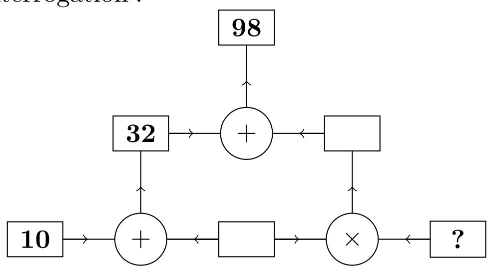
009 d08 N02

$200 + 8 + 20 \times 8 + 2^8 =$

(A) 496 (B) 624 (C) 880 (D) 1 016 (E) 5 488

010 e07 N03

Dans le schéma ci-dessous, que vaut le nombre situé dans la case marquée d'un point d'interrogation ?



(A) 3 (B) 6 (C) 14 (D) 18 (E) 22

011 e08 N03

Que vaut le carré du tiers du quart de 60 ?

(A) $\frac{25}{12}$ (B) $\frac{25}{3}$ (C) 25 (D) 45 (E) 300

012 e09 N03

Dans un théâtre, il y a 25 rangées de 22 fauteuils au parterre, 20 rangées de 25 fauteuils au premier balcon et 18 rangées de 25 fauteuils au second balcon. En tout, quel est le nombre de fauteuils dans ce théâtre ?

(A) 1 500 (B) 1 000 (C) 750 (D) 500 (E) 300

013 e07 N04

Sans réponse préformulée — Quel est le plus grand nombre entier formé de trois chiffres pairs différents ?

014 e09 N04

Quelle division donne le même résultat que 12 : 3 ?

(A) 1 200 : 30
(B) 0,12 : 0,3
(C) 0,12 : 0,03
(D) 1,2 : 30
(E) 12 000 : 300

015 e10 N04

Quatre des expressions suivantes ont la même valeur. Laquelle a une valeur différente ?

(A) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) 0,5 : 4 (D) $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) : 4$ (E) 0,25 : 2

016 d08 N03

$2008^1 - 1^{2008} =$

(A) 0 (B) 1007 (C) 1008 (D) 2007 (E) 2008

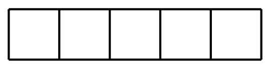
017 d10 N03

La fraction $\dfrac{n+3}{n-1}$ *ne* vaut *pas* un nombre entier lorsque l'on donne à n l'une des valeurs suivantes. Laquelle ?

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

018 e09 N05

Un rectangle est formé de 5 carrés identiques. Le périmètre de chaque carré vaut 16 cm.



Quel est, en centimètres, le périmètre de ce rectangle ?

(A) 48 (B) 64 (C) 80 (D) 96 (E) 120

019 e10 N05

Sans réponse préformulée — Un facteur débute sa tournée à 6 h. À 10 h, il a déjà livré les trois cinquièmes de ses lettres et constate qu'il lui en reste 120. Combien de lettres avait-il au départ ?

020 d07 N04

Lequel des nombres suivants n'est pas premier ?

(A) 23 (B) 37 (C) 91 (D) 97 (E) 101

021 d08 N04

Sans réponse préformulée — Que vaut la somme des nombres premiers compris entre 90 et 100 ?

022 d10 N04

Que vaut x si $\dfrac{1}{4} : \dfrac{1}{5} = 1 + x$?

(A) $\frac{1}{20}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2 (E) 4

023 e07 N06

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} =$

(A) $\dfrac{1}{14}$ (B) $\dfrac{3}{14}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{7}{8}$ (E) $\dfrac{3}{4}$

024 e09 N06

Que vaut le triple de l'opposé de la moitié de l'inverse d'un quart ?

(A) -24 (B) -6 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$ (E) 6

025 e10 N06

Lequel de ces nombres admet un nombre impair de diviseurs positifs ?

(A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 48 (E) 49

026 e08 N07

La moitié de a vaut 7, le tiers de b vaut 7 et le quart de c vaut aussi 7. Que vaut $a+b+c$?

(A) 63 (B) 56 (C) $\frac{91}{12}$ (D) $\frac{273}{12}$ (E) 168

027 e09 N07

Pour quelle valeur de a l'égalité $31-4+3+7-5-a=19$ est-elle vérifiée ?

(A) 13 (B) 16 (C) 23 (D) 41 (E) 51

028 e10 N07

Dans une école, il y a x élèves et y enseignants. Laquelle des formules suivantes exprime le fait qu'il y a huit fois plus d'élèves que d'enseignants ?

(A) $x+8=y$ (B) $x=y+8$ (C) $x=8y$ (D) $y=8x$ (E) $y \geqslant 8x$

029 d08 N05

Pour $a=6$, que vaut $-\frac{2}{a^3}\cdot 3a^2$?

(A) -1 (B) $-\frac{1}{9}$ (C) 3 (D) 6 (E) -36

030 d09 N05

Que vaut le quotient de la division de 2^{12} par 2^3 ?

(A) 4 (B) 6 (C) 2^4 (D) 2^9 (E) 2^{15}

031 d10 N05

Lequel des nombres suivants est négatif ?

(A) $(-3)^2$ (B) $\frac{-4}{-5}$ (C) 3^3-2^2 (D) $(-2009)(-2011)$ (E) $5-7$

032 e10 N08

Lequel des nombres suivants n'est *pas* divisible par 15 ?

(A) 50 505 (B) 305 305 (C) 333 555 (D) 353 535 (E) 555 555

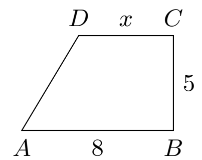
033 d07 N06

Que vaut le double de l'inverse de l'opposé de $\dfrac{1}{2}$?

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) -1 (C) 1 (D) -4 (E) -2

034 d10 N06

Dans le trapèze rectangle $ABCD$, $|AB| = 8$, $|BC| = 5$ et $|CD| = x$. Quelle est l'aire de ce trapèze ?



(A) $\frac{5}{2}x + 20$ (B) $\frac{5}{2}x + 4$ (C) $\dfrac{5x+4}{2}$ (D) $8(x+5)$ (E) $\frac{5}{2} + 8x$

035 e07 N09

Que vaut le quart du tiers de douze fois 624 ?

(A) 468 (B) 624 (C) 832 (D) 5616 (E) 9984

036 d10 N07

Sans réponse préformulée — Quand on ajoute 7 au naturel non nul n, on obtient un nombre multiple de 7 ; quand on ajoute 8 à n, on obtient un nombre multiple de 8 ; quand on ajoute 9 à n, on obtient un nombre multiple de 9. Quelle est la plus petite valeur possible de n ?

037 e07 N10

$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 =$

(A) 17 (B) 21 (C) 31 (D) 33 (E) 63

038 e10 N10

Le prix d'un pantalon avait augmenté de 50 % mais, aux soldes, il passe à 50 % du nouveau prix. Quel pourcentage du prix initial représente le prix soldé ?

(A) 60 % (B) 70 % (C) 75 % (D) 80 % (E) 100 %

039 e09 N11

L'arête d'un premier cube mesure 5 cm et l'arête d'un deuxième cube mesure 20 % de plus. Que vaut, en centimètres cubes, la différence des volumes des deux cubes ?

(A) 25 (B) 81 (C) 91 (D) 101 (E) 124

040 d07 N08

L'expression $5x - 2 - (5x - 4)$ est égale à

(A) $10x - 2$; (B) $10x + 2$; (C) 2 ; (D) -2 ; (E) -6.

041 d10 N08

Une seule des cinq égalités suivantes est correcte. Laquelle ?

(A) $22^2 = 444$

(B) $142{,}7 + 61{,}3 = 203{,}73$

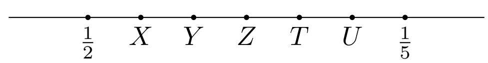
(C) $100 + 80 + 16 = 14^2$

(D) $\frac{3}{17} + \frac{2}{5} = \frac{5}{22}$

(E) $4{,}05^2 = 16{,}25$

042 e07 N12

Entre les graduations $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{5}$, quel est le point de graduation $\dfrac{1}{4}$?



(A) X (B) Y (C) Z (D) T (E) U

043 d07 N09

Sans réponse préformulée — Un nombre pair de trois chiffres est tel que le chiffre des centaines est le double de celui des unités et le chiffre des dizaines est le double de celui des centaines. Quel est ce nombre ?

044 d08 N09

Sans réponse préformulée — Je pense à un nombre. À son double, je soustrais 4, puis je divise le résultat par 3. Au nombre obtenu, j'ajoute 5, je multiplie le résultat par 8 et j'obtiens finalement 2008. Que vaut le nombre de départ ?

045 d09 N09

Sans réponse préformulée — La somme de quatre nombres naturels vaut 236. Deux de ces nombres sont consécutifs et les deux autres sont les triples des deux premiers. Que vaut le plus grand de ces nombres ?

046 d10 N09

Laquelle des fractions suivantes est la plus grande ?

(A) $\dfrac{8}{45}$ (B) $\dfrac{8}{48}$ (C) $\dfrac{8}{-3}$ (D) $\dfrac{8}{-50}$ (E) $\dfrac{8}{-1}$

047 e09 N13

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit nombre naturel non nul divisible à la fois par 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ?

048 e09 N14

La longueur totale des arêtes d'un parallélépipède rectangle vaut 108 cm. Deux des dimensions de ce parallélépipède mesurent 12 cm et 8 cm. Que mesure, en centimètres, la troisième dimension ?

(A) 7 (B) 28 (C) 68 (D) 88
(E) Les données sont insuffisantes pour répondre.

049 d07 N10

$123\,456\,789 + 987\,654\,321 =$

(A) 1 000 000 000
(B) 1 000 000 110
(C) 111 111 110
(D) 1 111 111 110
(E) 11 111 111 110

050 d09 N10

Sans réponse préformulée — Combien de termes comporte la somme

$$1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 2005 + 2009 \ ?$$

051 e08 N15

Un prix est multiplié par 1,4. De quel pourcentage est-il augmenté ?

(A) 14 % (B) 40 % (C) 60 % (D) 114 % (E) 140 %

052 e10 N15

Un professeur augmente de 2 points la note de chacun de ses 26 élèves. La moyenne de la classe

(A) Augmente de 52 points ;
(B) Reste inchangée ;
(C) Augmente de 2 points ;
(D) Augmente de 2/26 point ;
(E) Diminue de 2 points.

053 d08 N11

$$\frac{50^2 - 40^2}{5} =$$

(A) 20 (B) 36 (C) 180 (D) $\frac{324}{5}$ (E) 225

054 d09 N11

Sans réponse préformulée — La somme de cinq nombres naturels consécutifs vaut 130. Quel est le plus petit de ces nombres ?

055 d10 N11

Un des nombres suivants *n'*est *pas* premier. Lequel ?

(A) 11 (B) 51 (C) 101 (D) 211 (E) 311

056 e08 N16

Dans une classe, 20 élèves sont présents et 20 % des élèves sont absents. Combien d'élèves compte la classe lorsque tous les élèves sont présents ?

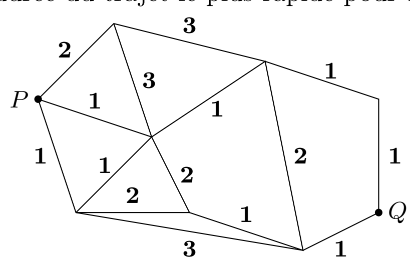
(A) 24 (B) 25 (C) 28 (D) 30 (E) 32

057 e10 N16

Sans réponse préformulée — Une citerne est remplie aux cinq huitièmes de sa capacité. Pour la remplir complètement, il faut encore y verser 372 L. Quelle est, en litres, la contenance totale de cette citerne ?

058 d07 N12

Sans réponse préformulée — Dans le réseau routier représenté ci-dessous, le temps de parcours en heures est indiqué à côté de chaque route. Quelle est, en heures, la durée du trajet le plus rapide pour aller de P à Q ?



059 d09 N12

Le collège Frank Einstein comptait 1000 élèves, mais cette année sa population a baissé de 10 %. Par contre, le pourcentage de filles est passé de 50 % à 55 %. Quel est actuellement le nombre de filles ?

(A) 450 (B) 495 (C) 505 (D) 510 (E) 550

060 e08 N17

On choisit deux nombres parmi les six entiers -8, -7, -6, 2, 3, 4 et on effectue leur produit. Quel est le plus petit produit possible ?

(A) -56 (B) -48 (C) -32 (D) -12 (E) 6

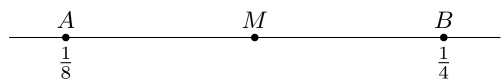
061 e07 N18

Pascal pense à trois nombres entiers. En additionnant ces nombres deux à deux, il obtient les sommes 38, 44 et 52. Quel est le plus petit des trois nombres ?

(A) 13 **(B)** 15 **(C)** 21 **(D)** 23 **(E)** 29

062 e08 N18

Sur la droite graduée représentée ci-dessous, le point M est le milieu de $[AB]$. Quelle est l'abscisse de M ?



(A) $\frac{1}{16}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{3}{16}$ **(E)** $\frac{3}{8}$

063 e10 N18

L'un des nombres suivants est premier. Lequel ?

(A) 2008 **(B)** 2009 **(C)** 2010 **(D)** 2011 **(E)** 2012

064 d07 N13

$$\frac{1}{48} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} =$$

(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{1}{114}$ **(E)** $\frac{6}{114}$

065 e08 N19

Combien existe-t-il de nombres premiers dont la somme des chiffres est 15 ?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 5 **(E)** 7

066 d09 N14

Un sprinter court le 100 mètres en dix secondes. Quelle est, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne ?

(A) 10 **(B)** 24 **(C)** 30 **(D)** 36 **(E)** 48

067 e08 N20

Les 20 % des 50 % de 100 € valent

(A) 2 € ; **(B)** 5 € ; **(C)** 10 € ; **(D)** 30 € ; **(E)** 70 €.

068
e10
N20

Dans une école de 1000 élèves, il y a 550 filles. Le repas chaud de midi est fréquenté par 30 % des filles et par 40 % des garçons. Quelle est la proportion de l'ensemble des élèves qui prennent un repas chaud ?

(A) 30 % (B) 34,5 % (C) 35 % (D) 35,5 % (E) 40 %

069
e08
N21

Sans réponse préformulée — Un nombre entier comporte deux chiffres dont la différence vaut 5. Si l'on permute les deux chiffres, le nombre obtenu ne vaut plus que les trois huitièmes du précédent. Quel est le nombre initial ?

070
d09
N15

Dans un village où vivent 1 600 familles, 3 % d'entre elles possèdent un seul lecteur DVD. Parmi les autres familles, une moitié possède exactement deux lecteurs DVD et l'autre moitié n'en possède aucun. Combien y a-t-il de lecteurs DVD dans ce village ?

(A) 824 (B) 1 552 (C) 1 600 (D) 1 648 (E) 3 152

071
d10
N15

Sans réponse préformulée — Les nombres 1, 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67 et 73 peuvent être rangés dans un tableau 3×3 de manière que chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale aient la même somme. Quelle est cette valeur commune ?

072
e07
N23

Les nombres

$$a = \frac{371}{524}, \quad b = \frac{372}{523}, \quad c = \frac{372}{524} \quad \text{et} \quad d = \frac{373}{523}$$

sont tels que

(A) $a < d < c < b$
(B) $a < c < d < b$
(C) $a < c < b < d$
(D) $a < b < c < d$
(E) $c < b < a < d$

073
e08
N23

Sans réponse préformulée — La somme de deux nombres entiers vaut 233. La division du plus grand par le plus petit donne pour quotient 14 et pour reste 8. Quel est le plus grand des deux nombres ?

074 e10 N23

Sans réponse préformulée — J'écris un nombre de deux chiffres dans lequel le chiffre des dizaines est le double du chiffre des unités. Je permute les deux chiffres, je soustrais le nouveau nombre du premier et j'obtiens 36. Quel est le nombre initial ?

075 e09 N24

Un seau plein pèse 16 250 grammes. Si deux tiers de son contenu sont retirés, il ne pèse plus que 7250 grammes. Que pèse le seau vide ?

(A) 2 kg (B) 2,5 kg (C) 2,75 kg (D) 3 kg (E) 3,25 kg

076 d07 N17

Sans réponse préformulée — Un cube en bois blanc de 80 cm de côté est entièrement peint en rouge. Il est découpé en petits cubes identiques de 1 cm de côté. Combien de ces petits cubes ont exactement deux faces rouges ?

077 d10 N17

Une caisse cubique en bois a, intérieurement, une arête d'1,2 m. Lorsqu'elle est garnie, intérieurement, sur ses six faces, d'une couche d'isolant, le volume restant vaut $\frac{27}{64}$ fois le volume initial. Quelle est, en centimètres, l'épaisseur de la couche d'isolant ?

(A) 7,5 (B) 12 (C) 15 (D) 30 (E) 45

078 e08 N25

De combien de manières peut-on écrire 2008 comme produit de deux entiers positifs, le premier facteur étant supérieur au second ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

079 d07 N18

$$\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} =$$

(A) 0 (B) 0,6 (C) 1 (D) 1,5

(E) Aucune des valeurs précédentes.

080 d08 N18

Sans réponse préformulée — Combien 2008 admet-il de diviseurs entiers positifs ?

081 e07 N26

Une bouteille remplie d'eau pèse 1,1 kg. À moitié vide, elle ne pèse plus que 800 g. Quelle est, en grammes, la masse de la bouteille vide ?

(A) 480 (B) 500 (C) 550 (D) 800 (E) 950

082 d09 N19

La division de 72 par 64 donne un nombre décimal dont le chiffre des centièmes est

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

083 e07 N28

Sans réponse préformulée — Le nombre naturel 2007 est la somme de trois nombres naturels impairs consécutifs. Quel est le plus grand de ces trois nombres ?

084 d09 N20

Sans réponse préformulée — Pour convertir en degrés Fahrenheit une température T donnée en degrés Celsius, il faut multiplier T par $\frac{9}{5}$ puis ajouter 32. Quelle est, en degrés Celsius, la température égale à 95 degrés Fahrenheit ?

085 d10 N20

Sans réponse préformulée — Un nombre de 6 chiffres de la forme $\overline{133ab5}$ est divisible par 7 et par 9. Quelle est la plus grande valeur possible pour le nombre $\overline{ab}$?

086 e07 N29

Sans réponse préformulée — Toutes mes billes sont dans un gros sac ; il y en a entre 100 et 200. Le nombre de billes que je possède n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 11, mais il est divisible par 17. Combien ai-je de billes ?

087 e08 N29

On augmente la longueur d'un rectangle de 30 % et on diminue sa largeur de 20 %. Son aire est

(A) Augmentée de 10 % ;
(B) Augmentée de 6 % ;
(C) Augmentée de 4 % ;
(D) Diminuée de 0,4 % ;
(E) Diminuée de 10 %.

088 e07 N30

Une suite de 15 nombres est telle que la somme de trois nombres consécutifs de cette suite vaut toujours 2007. Le quatrième nombre de la suite est 500 et le quinzième est 200. Que vaut le septième nombre ?

(A) 200 (B) 427 (C) 500 (D) 837 (E) 1 307

089 d09 N22

Si a, b et c sont trois nombres naturels non nuls et si $a = \frac{3}{4}b$ et $b = \frac{5}{6}c$, alors $c =$

(A) $\frac{5}{8}a$; (B) $\frac{8}{5}a$; (C) $\frac{9}{10}a$; (D) $\frac{10}{9}a$; (E) $\frac{1}{2}a$.

090 d08 N23

Le prix d'une marchandise a subi une hausse de 10 % puis une baisse de 9 %. Finalement, il a

(A) Baissé de 1 % ;
(B) Baissé de 0,1 % ;
(C) Augmenté de 1 % ;
(D) Augmenté de 0,1 % ;
(E) Repris sa valeur initiale.

091 d10 N23

Le nombre $\underbrace{121212\ldots12}_{\text{2010 chiffres}}$ *n'*est *pas* divisible par

(A) 2 ; (B) 12 ; (C) 18 ; (D) 24 ; (E) 36.

092 d07 N26

Le prix d'un objet a subi une hausse de 12 %, puis une seconde hausse de 9 %. Au total, cet objet a été augmenté de

(A) 10,8 % ; (B) 16 % ; (C) 21 % ; (D) 22,08 % ; (E) 29 %.

093 d08 N26

Sans réponse préformulée — Les nombres entiers strictement positifs a, b et c sont tels que le produit de a et b vaut c, le double de a vaut b et le double de b vaut c. Que vaut $a + b + c$?

094
d09
N26

Une plante double sa taille tous les 5 ans. Par quel facteur sa taille initiale sera-t-elle multipliée après 20 ans ?

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32
(E) Cela dépend de la taille initiale.

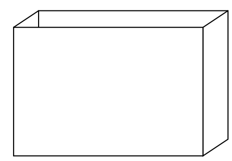
095
d10
N26

$(a+1)(a-1)+(a+1) =$

(A) a^3+a^2-a-1 (B) a^2+a+1 (C) a^3+1 (D) $3a+1$ (E) a^2+a

096
d07
N27

Sans réponse préformulée — La boite représentée ci-contre a la forme d'un parallélipipède rectangle de 25 cm de long, 11 cm de large et 17 cm de haut. Combien de petits cubes de 2 cm d'arête puis-je mettre au maximum à l'intérieur de cette boite, sans qu'ils ne dépassent de la boite et en les rangeant de sorte que leurs faces soient parallèles à celles de la boite ?



097
d08
N27

Quelle est la 2008ᵉ décimale de $\dfrac{73}{7}$?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 8

098
d10
N27

Sans réponse préformulée — On recherche un nombre entier dont le triple augmenté de 4 est strictement supérieur à 31 et dont le triple augmenté de 3 est inférieur (au sens large) au double augmenté de 14. Combien existe-t-il d'entiers satisfaisant ces conditions ?

099
d07
N28

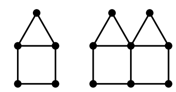
Lequel des cinq nombres ci-dessous est le produit de trois nombres premiers différents ?

(A) 315 (B) 325 (C) 375 (D) 385 (E) 395

100
d08
N28

Sans réponse préformulée — Les nombres naturels a, b, c, d, e sont, dans cet ordre, consécutifs et leur produit vaut 55 440. Que vaut c ?

101 d08 N29



1 2

Sans réponse préformulée — Un enfant utilise des allumettes pour créer des rangées de maisonnettes. Pour la maisonnette 1, il utilise 6 allumettes, pour la rangée de 2 maisonnettes, il utilise 11 allumettes. Combien devra-t-il en utiliser pour construire la rangée de 111 maisonnettes ?

102 d10 N29

Sans réponse préformulée — Dans une division entière, le quotient est 29 et le reste 11. La somme du dividende et du diviseur est 941. Que vaut la somme du diviseur et du quotient ?

103 d08 N30

Sans réponse préformulée — Un sac contient 40 billes certaines rouges, certaines vertes. Lorsqu'on en retire 4 billes vertes, le rapport du nombre de billes vertes restantes au nombre de billes rouges vaut 1/3. Combien reste-t-il de billes vertes dans le sac ?

104 d09 N30

Sans réponse préformulée — On désigne par $\overline{abc}$ le nombre naturel dont les chiffres des centaines, des dizaines et des unités sont respectivement a, b et c. Déterminer le plus grand nombre de la forme $\overline{aba}$ divisible par 36.

2.3 Géométrie

105 e09 N01

Une pièce rectangulaire a pour largeur 6,6 m et pour longueur 12 m. Que vaut, en mètres carrés, l'aire de cette pièce ?

(A) 79 (B) 18,6 (C) 7,92 (D) 79,2
(E) Aucune des valeurs précédentes.

106 e10 N01

Si le rayon d'un cercle mesure 10 cm, que mesure son diamètre ?

(A) 5 cm (B) 20 cm (C) 31,4 cm (D) 62,8 cm (E) 100 cm^2

107 d08 N01

Quel est le nombre d'arêtes d'un cube ?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

108 d09 N02

Les côtés parallèles d'un trapèze mesurent 10 cm et 14 cm. Son aire est de 30 cm^2. Quelle est, en centimètres, la distance entre les deux côtés parallèles ?

A 1 **B** 1,25 **C** 2,5 **D** 5 **E** 10

109 d10 N02

Sans réponse préformulée — Un carré a un périmètre de 120 cm ; quelle est son aire, en centimètres carrés ?

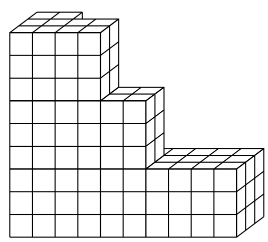
110 e10 N03

Laquelle des lettres suivantes *n'*admet *pas* d'axe de symétrie ?

A I **B** N **C** O **D** W **E** X

111 e08 N04

Sans réponse préformulée — Sur un sol horizontal, on a superposé, comme l'indique la figure ci-dessous, un certain nombre de briques toutes identiques.



Combien y a-t-il de briques au minimum ?

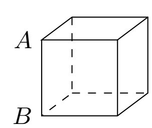
112 d07 N03

Combien de points d'un terrain de football sont à égale distance des quatre coins du terrain ?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

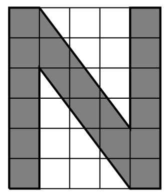
113 d09 N03

Sans réponse préformulée — Dans ce cube, combien d'arêtes sont gauches avec l'arête $[AB]$?



114 e07 N05

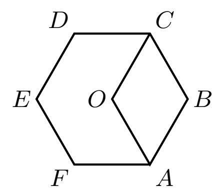
La lettre N majuscule a été dessinée dans un quadrillage dont les mailles sont de côté 1. Que vaut l'aire de cette lettre ?



(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 20

115 e07 N07

Sans réponse préformulée — L'aire de l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O est 840. Que vaut l'aire du losange $OABC$?



116 d07 N05

Sans réponse préformulée — Lorsqu'on triple la longueur de chacune des arêtes d'un cube, par quel nombre est multipliée l'aire totale des six faces du cube ?

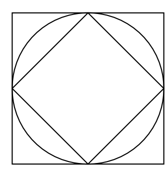
117 e08 N08

Un ennéagone est un polygone à 9 côtés. Lorsqu'il est régulier, combien possède-t-il d'axes de symétrie ?

(A) 0 (B) 9 (C) 18 (D) 27 (E) 36

118 e09 N08

Dans la figure ci-contre, le petit carré est inscrit dans le cercle et le cercle est inscrit dans le grand carré. L'aire du petit carré vaut 1. Que vaut l'aire du grand carré ?



(A) 1,5 (B) 2 (C) 2,5 (D) 3 (E) 4

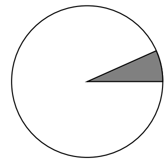
119 d08 N06

Dans un triangle, deux des hauteurs sont en même temps médiatrices. Dans ce cas, le triangle

(A) Est rectangle ;
(B) Est obtusangle ;
(C) Est isocèle non équilatéral ;
(D) Est équilatéral ;
(E) N'existe pas.

120 e08 N09

Dans un cercle dont l'aire vaut 30 cm^2, on considère un secteur d'angle 24°. Que vaut, en centimètres carrés, l'aire de ce secteur ?



(A) 1,8 **(B)** 2 **(C)** 2,25 **(D)** 4,5 **(E)** 7,2

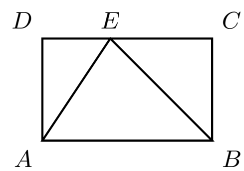
121 e09 N09

L'arête d'un cube mesure 100 dm. Son volume vaut

(A) 10^2 cm^2 ;
(B) 10^2 cm^3 ;
(C) 10^6 cm^3 ;
(D) 10^8 cm^3 ;
(E) 10^9 cm^3.

122 e10 N09

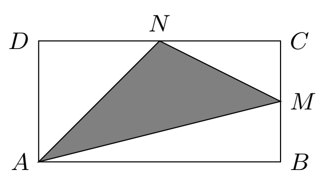
Dans la figure (imprécise) ci-contre, $ABCD$ est un rectangle ; l'angle $\widehat{DAE}$ a une amplitude de 30° et l'angle $\widehat{CBE}$ a une amplitude de 46°. Quelle est l'amplitude de l'angle $\widehat{AEB}$?



(A) 74° **(B)** 76° **(C)** 80° **(D)** 90° **(E)** 104°

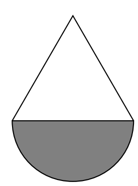
123 d07 N07

Sans réponse préformulée — Un rectangle $ABCD$ a pour dimensions 16 et 8. Les points M et N sont les milieux des côtés $[BC]$ et $[CD]$. Que vaut l'aire du triangle AMN ?



124 d09 N07

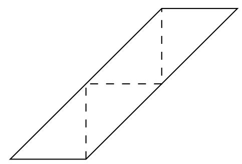
Quelle est l'aire du demi-cercle construit sur un côté d'un triangle équilatéral de côté 1 ?



(A) π **(B)** $\frac{\pi}{2}$ **(C)** $\frac{\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{8}$ **(E)** $\frac{\pi}{16}$

125 e08 N10

Le parallélogramme représenté ci-dessous est un assemblage de quatre triangles rectangles isocèles. Sa base mesure 10 cm. Que vaut, en centimètres carrés, son aire ?



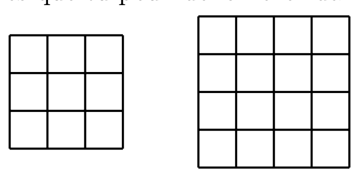
10 cm

(A) 40 (B) 100 (C) 200 (D) 400

(E) Les données sont insuffisantes pour le dire.

126 e07 N11

Ci-dessous, dans la figure de gauche, se trouvent quatorze carrés : neuf carrés de côté 1, quatre carrés de côté 2 et un carré de côté 3. Quel est le nombre exact de carrés que tu peux dénombrer dans la figure de droite ?



(A) 25 (B) 27 (C) 29 (D) 30 (E) 33

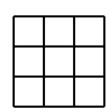
127 e08 N11

Une roue tourne de 30° en une seconde. Combien fait-elle de tours complets en une minute ?

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 18 (E) 180

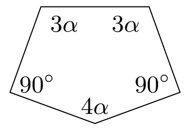
128 e10 N11

Sans réponse préformulée — Il a fallu 24 segments de longueur 1 pour dessiner le quadrillage 3×3 ci-contre. Combien en faudra-t-il pour dessiner un quadrillage 6×6 ?



129 d08 N08

Sans réponse préformulée — Dans le pentagone figuré ci-dessous, quelle est, en degrés, l'amplitude du plus grand des angles intérieurs ?



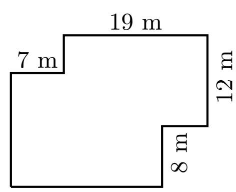
130 e09 N12

Les amplitudes de deux des angles d'un triangle isocèle peuvent valoir

- **(A)** 10° et 80° ;
- **(B)** 10° et 160° ;
- **(C)** 10° et 20° ;
- **(D)** 10° et 170° ;
- **(E)** 90° et 40°.

131 e07 N13

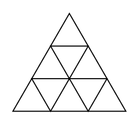
La figure ci-contre montre le plan d'un jardin où les côtés sont deux à deux perpendiculaires. Quel est, en mètres, le périmètre de ce jardin ?



(A) 82 **(B)** 92 **(C)** 104 **(D)** 118
(E) Il manque des données.

132 e08 N13

Combien de triangles sont dessinés dans la figure ci-contre ?



(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 14

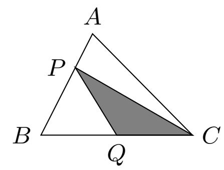
133 e07 N14

Pour trouver le rayon d'un cercle de longueur 60 cm, il faut

- **(A)** Multiplier 60 cm par π ;
- **(B)** Diviser 60 cm par 2π ;
- **(C)** Diviser 30 cm par 2π ;
- **(D)** Multiplier 60 cm par $\pi/2$;
- **(E)** Diviser le carré de 60 cm par π.

134 e08 N14

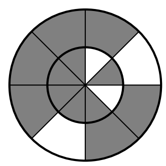
L'aire du triangle ABC vaut 24 cm^2. Le point P est situé au tiers de $[AB]$ à partir de A et le point Q est le milieu de $[BC]$. En centimètres carrés, que vaut l'aire du triangle PQC ?



A 4 **B** 8 **C** 9 **D** 12
E Il manque des données.

135 e07 N15

Le disque dessiné ci-dessous est divisé en secteurs tous de même amplitude. L'aire du grand disque vaut 100. Que vaut l'aire totale des parties non grisées ?



A 10 **B** 12,5 **C** 18 **D** 25 **E** 28

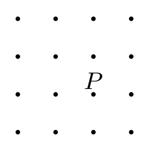
136 d07 N11

Un rectangle de longueur 10 a le même périmètre qu'un triangle équilatéral de côté 10. Que vaut la largeur du rectangle ?

A 10 **B** 5 **C** $\frac{10}{3}$ **D** 6 **E** 15

137 e09 N16

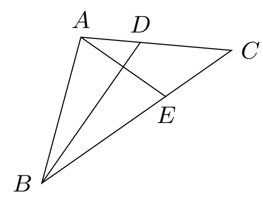
Le quadrillage ci-contre est régulier. Quel est le nombre de carrés dont un sommet est le point P et les trois autres sont des sommets du quadrillage ?



A 8 **B** 10 **C** 12 **D** 14 **E** 16

138 d08 N12

Dans le triangle ABC, les côtés $[AB]$ et $[AC]$ ont même longueur, la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe AC en D et la perpendiculaire abaissée de A sur BD coupe BC en E. L'amplitude de $\widehat{ACB}$ est 32°. Que vaut, en degrés, celle de $\widehat{AEC}$?



(A) 64 (B) 96 (C) 106 (D) 116 (E) 124

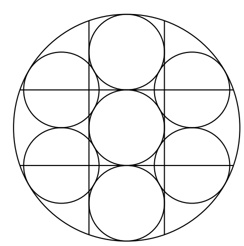
139 e07 N17

Dans un rectangle, les deux diagonales sont toujours

(A) Perpendiculaires ;
(B) Les bissectrices des angles du rectangle ;
(C) Symétriques l'une de l'autre par rapport au centre du rectangle ;
(D) Chacune de longueur supérieure au demi-périmètre du rectangle ;
(E) Des diamètres du cercle passant par les 4 sommets du rectangle.

140 d10 N12

Combien de centres de symétrie et d'axes de symétrie compte la figure ci-contre ?



(A) Pas de centre, mais un axe.
(B) Un centre et pas d'axe.
(C) Un centre et deux axes.
(D) Un centre et quatre axes.
(E) Un centre et six axes.

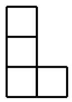
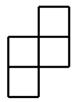
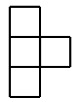
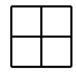
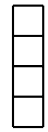
141 e09 N17

Les aires d'un rectangle et d'un carré sont les mêmes et valent 36 cm^2. La largeur du rectangle est le tiers du côté du carré. En centimètres, que vaut la longueur du rectangle ?

(A) 36 (B) 18 (C) 12 (D) 6 (E) 2

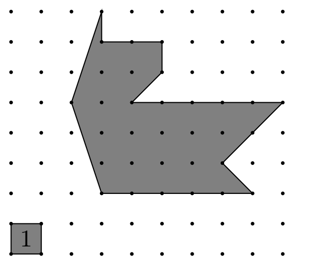
142 e10 N17

Les cinq figures ci-dessous sont formées de carrés juxtaposés. Laquelle d'entre elles n'admet ni axe de symétrie, ni centre de rotation ?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

143 e09 N18

Le quadrillage ci-dessous est régulier ; l'unité d'aire est représentée dans le coin inférieur gauche. Que vaut l'aire du polygone grisé ?



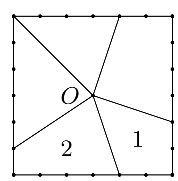
(A) $\frac{13}{4}$ (B) $\frac{59}{2}$ (C) $\frac{61}{2}$ (D) 21 (E) 22

144 d09 N13

Sans réponse préformulée — Les centres des faces adjacentes d'un cube sont joints deux à deux (deux faces sont adjacentes quand elles ont une arête en commun). Quel est le nombre de faces du solide ainsi construit ?

145 d10 N13

Sans réponse préformulée — Dans la figure ci-contre, les côtés du carré sont subdivisés en 6 parties égales et O est le centre du carré. Si l'aire de la zone 1 est de $600\,\text{cm}^2$, quelle est, en centimètres carrés, celle de la zone 2 ?



146 e10 N19

Si $ABCD$ est un parallélogramme de centre O, l'une des affirmations suivantes n'est *pas toujours* vraie. Laquelle ?

(A) La diagonale BD est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.
(B) Les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux.
(C) La somme des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{DCB}$ mesure 180°.
(D) Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COB}$ sont supplémentaires.
(E) Les triangles ABO et COD ont même aire.

147 d07 N14

Sans réponse préformulée — Deux cordes mises bout à bout mesurent au total 29 m. Si un morceau de 1,75 m est détaché de la plus petite des deux cordes pour être joint à la plus grande, alors la grande corde allongée devient trois fois plus longue que la petite corde raccourcie. Quelle est, en mètres, la longueur initiale de la petite corde ?

148 d10 N14

Sans réponse préformulée — Dans le triangle ABC, $|AB| = |AC|$. La bissectrice de l'angle B coupe en D la perpendiculaire à BC élevée en C. Si $\widehat{BDC}$ mesure 70°, quelle est la mesure (principale) en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$?

149 e10 N21

Les angles intérieurs d'un polygone régulier ont la même somme que 12 angles droits. Ce polygone est

(A) Un carré ;
(B) Un pentagone ;
(C) Un hexagone ;
(D) Un octogone ;
(E) Un dodécagone.

150 d08 N15

La somme des angles d'un polygone convexe vaut 900°. Quel est le nombre de côtés de ce polygone ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

151 e07 N22

Un carré a ses quatre sommets sur un cercle de diamètre 10. Quelle est l'aire de ce carré ?

(A) 25 (B) 49 (C) 50 (D) 25π (E) 100

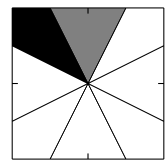
152 e08 N22

Le triangle ABC est isocèle avec $|AB| = |AC|$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe AC en D et $\widehat{ACB} = 32°$. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{ADB}$?

(A) 45 **(B)** 46 **(C)** 48 **(D)** 52 **(E)** 64

153 e09 N22

Chaque côté du carré représenté ci-contre est partagé en quatre parties égales. L'aire du triangle gris vaut 12 cm^2. En centimètres carrés, que vaut l'aire du quadrilatère noir ?



(A) 8 **(B)** 10 **(C)** $\frac{45}{4}$ **(D)** 12 **(E)** $\frac{25}{2}$

154 d07 N16

Un maquettiste utilise entièrement 1,50 m de fil de fer pour former les arêtes d'un prisme à base carrée. Les arêtes latérales du prisme ont une longueur triple de celle des côtés des bases. Quelle est, en centimètres, la longueur d'une arête latérale ?

(A) 28,125 **(B)** 22,5 **(C)** 15 **(D)** 9,375 **(E)** 7,5

155 d09 N16

Dans un parallélogramme P, quelle propriété est *nécessairement fausse* ?

(A) Les deux diagonales de P sont des axes de symétrie.

(B) Les médiatrices des côtés de P sont des axes de symétrie.

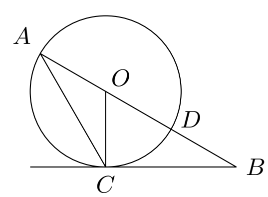
(C) Le milieu d'une des diagonales de P est un centre de symétrie.

(D) P n'a aucun axe de symétrie.

(E) P n'a aucun centre de symétrie.

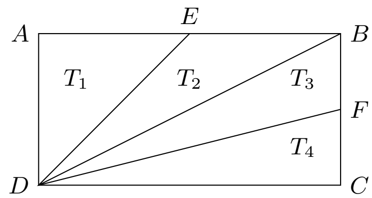
156 d10 N16

Sans réponse préformulée — Dans la figure (imprécise) ci-contre, O est le centre du cercle, la droite BC est tangente à ce dernier et $\widehat{CBD} =$ $= 36°$. Quelle est la mesure (principale) en degrés de l'angle $\widehat{DOC}$?



157
e09
N23

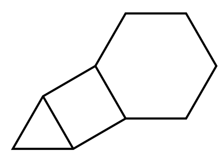
Dans le rectangle $ABCD$, E est le milieu de $[AB]$ et F est le milieu de $[BC]$. L'aire et le périmètre d'un triangle T étant respectivement désignés par $\mathrm{A}(T)$ et $\mathrm{P}(T)$, laquelle des cinq propositions suivantes est vraie ?



(A) $\mathrm{P}(T_1)=\mathrm{P}(T_2)=\mathrm{P}(T_3)=\mathrm{P}(T_4)$
(B) $\mathrm{P}(T_2)<\mathrm{P}(T_1)$
(C) $\mathrm{A}(T_1)>\mathrm{A}(T_3)$
(D) $\mathrm{A}(T_1)=\mathrm{A}(T_2)=\mathrm{A}(T_3)=\mathrm{A}(T_4)$
(E) $\mathrm{A}(T_1)>\mathrm{A}(T_2)$

158
e10
N24

La figure ci-contre est formée d'un triangle équilatéral dont l'aire est de $3\,\mathrm{cm}^2$, d'un carré et d'un hexagone régulier. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de l'hexagone ?



(A) 9/2 (B) 6 (C) 53/6 (D) 12 (E) 18

159
d09
N17

L'amplitude de l'angle formé par deux côtés consécutifs d'un polygone régulier vaut 150°. Quel est le nombre de côtés de ce polygone ?

(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

160
e07
N25

Sur toute la superficie d'un champ de 3 km^2, on enlève une couche de terre de 0,3 m d'épaisseur. La terre enlevée est déposée uniformément sur une surface de 3 ha. De quelle hauteur, exprimée en mètres, cette surface sera-t-elle relevée ?

(A) 2,7 (B) 3 (C) 9 (D) 18 (E) 30

161 e09 N26

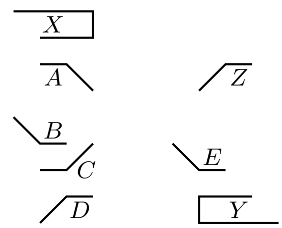
En pliant une feuille de papier en 4 dans le sens de la longueur et en 3 dans le sens de la largeur, on obtient un carré. Le périmètre de la feuille non pliée est de 294 cm. Que vaut, en centimètres, la largeur de la feuille ?

(A) 21 **(B)** 63 **(C)** 84 **(D)** 98 **(E)** 126

162 e10 N26

Dans la figure ci-contre, la symétrie qui applique la figure X sur la figure Y applique la figure Z sur

(A) A ; **(B)** B ; **(C)** C ; **(D)** D ; **(E)** E.



163 d10 N19

Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle. Quel est le rapport de la longueur d'un de ses côtés à celle de l'arc qu'il sous-tend ?

(A) $\frac{3}{\pi}$ **(B)** $\frac{6}{\pi}$ **(C)** $\frac{3}{2\pi}$ **(D)** $\frac{2}{3\pi}$ **(E)** $\frac{1}{6}$

164 e07 N27

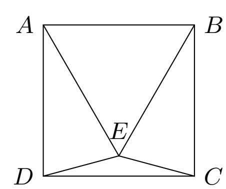
Mathias dispose de 100 petits cubes d'arête 2. Quel est le volume du plus grand cube plein qu'il est capable de construire à l'aide de ces petits cubes ?

(A) 64 **(B)** 128 **(C)** 216 **(D)** 256 **(E)** 512

165 e08 N27

À l'intérieur du carré $ABCD$, on construit le triangle équilatéral ABE. En degrés, que mesure l'angle $\widehat{DEC}$?

(A) 135 **(B)** 140 **(C)** 145 **(D)** 150 **(E)** 155

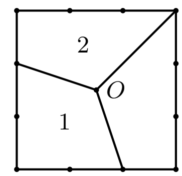


166 e09 N27

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre d'arêtes d'un prisme dont la base est un polygone à 193 côtés ?

167 e10 N27

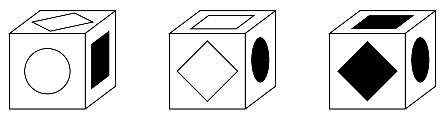
Les points marqués sur les côtés du carré ci-contre les partagent en tiers et O est le centre du carré. Quel est le rapport de l'aire de la zone 1 à celle de la zone 2 ?



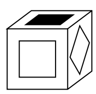
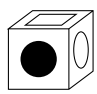
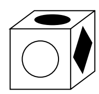
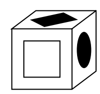
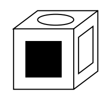
(A) 1 (B) 5/6 (C) 7/6 (D) 8/9 (E) 10/9

168 e09 N28

Paul a collé des étiquettes sur un dé à six faces. Voici trois vues de ce dé.

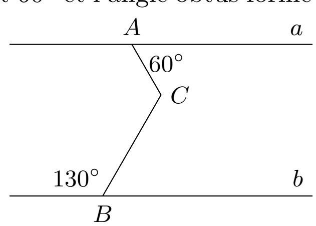


Parmi les cinq vues suivantes, laquelle représente également le dé de Paul ?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

169 d08 N20

Les droites a et b sont parallèles. Comme l'indique la figure, l'angle aigu formé par a et AC vaut 60° et l'angle obtus formé par b et BC vaut 130°.

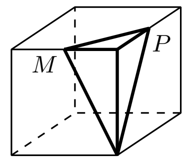


Que vaut, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{ACB}$?

(A) 100 (B) 110 (C) 112 (D) 120 (E) 125

170 e10 N29

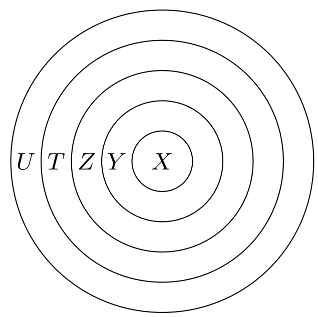
Le volume du cube ci-contre est de $3000\,\mathrm{cm}^3$. Les points M et P sont des milieux d'arêtes. Quel est le volume de la pyramide représentée en trait fort ?



- **A** $500\,\mathrm{cm}^3$
- **B** $375\,\mathrm{cm}^3$
- **C** $250\,\mathrm{cm}^3$
- **D** $133{,}33\ldots\,\mathrm{cm}^3$
- **E** $125\,\mathrm{cm}^3$

171 d08 N21

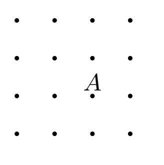
Cinq cercles concentriques ont pour rayons respectifs 1, 2, 3, 4, 5. L'aire du petit cercle vaut X et les aires des quatre couronnes valent respectivement Y, Z, T et U ainsi qu'indiqué par la figure. Laquelle des relations suivantes est correcte ?



- **A** $X + Y = T$
- **B** $U - X = T$
- **C** $X + Y + U = T + Z$
- **D** $U + Z = X + Y + T$
- **E** $X + Y + Z = U$

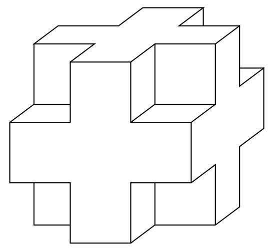
172 d09 N21

Sans réponse préformulée — Le point A est le centre du quadrillage régulier représenté entièrement ci-contre. Quel est le nombre de carrés dont les sommets se trouvent parmi les 25 sommets de ce quadrillage et qui admettent A comme centre de symétrie ?



173 e09 N30

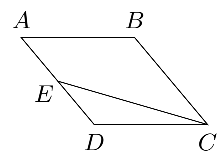
Sans réponse préformulée — En chacun des sommets d'un cube, on a enlevé un petit cube de manière à obtenir le solide que voici :



Quel est le nombre total d'arêtes de ce solide ?

174 d07 N22

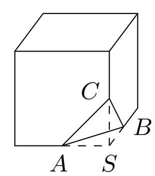
Le point E est le milieu du côté $[AD]$ du losange $ABCD$. Quel est le rapport de l'aire du triangle EDC à l'aire du quadrilatère $ABCE$?



(A) 4 (B) 3 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{4}$

175 d10 N22

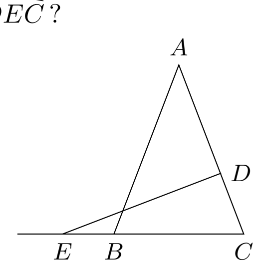
Le cube ci-contre a été « amputé » de la pyramide $SABC$. L'arête du cube mesure $6\,\text{cm}$ et les points A, B et C sont des milieux d'arêtes. Quel est le volume du solide restant ?



(A) $31{,}5\,\text{cm}^3$ (B) $202{,}5\,\text{cm}^3$ (C) $211{,}5\,\text{cm}^3$
(D) $216\,\text{cm}^3$ (E) $220{,}5\,\text{cm}^3$

176 d09 N23

Sans réponse préformulée — Le triangle ABC est tel que $|AB| = |AC|$ et $\widehat{BAC} = 42°$. Le point D appartient au segment $[AC]$ et la perpendiculaire à AC menée par D coupe la droite BC en E. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{DEC}$?

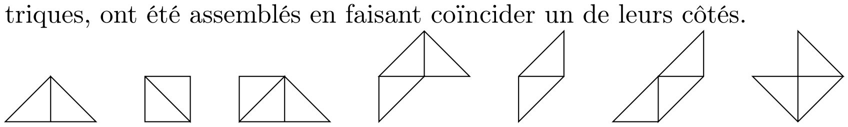


177 d07 N24

Sans réponse préformulée — Si Mathurin avait 6 euros de moins et si Mathieu avait 13 euros de plus, ils auraient chacun autant que leur cousine Mathilde. Sachant qu'à eux trois, ils ont 80 euros, quel est, en euros, l'avoir de Mathurin ?

178 d07 N25

Dans les figures ci-dessous, des triangles rectangles isocèles, tous isométriques, ont été assemblés en faisant coïncider un de leurs côtés.

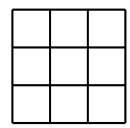


Combien parmi ces figures ont au moins un axe de symétrie ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

179 d08 N25

Sans réponse préformulée — Le quadrillage ci-contre comprend 14 carrés : 9 carrés 1×1, 4 carrés 2×2 et 1 carré 3×3. Combien de carrés comprend un quadrillage 10×10 ?



180 d09 N25

Quels que soient les points distincts A, B et C, si $|AB| = |AC|$, alors nécessairement :

(A) A est le milieu de $[BC]$;

(B) C appartient au cercle de centre B et de rayon $|BA|$;

(C) Le triangle ABC est équilatéral ;

(D) Les points A, B, C ne forment pas un triangle ;

(E) A appartient à la médiatrice de $[BC]$.

181 d10 N28

Les faces triangulaires d'une pyramide à base carrée sont équilatérales. Une seconde pyramide à base carrée a pour sommets les centres des faces de la première. Quel est le rapport du volume de la grande pyramide à celui de la petite ?

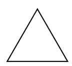
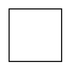
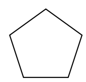
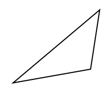
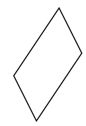
(A) $\frac{27}{2}$ (B) $\frac{27}{4}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) 27 (E) 8

182 d09 N29

Sans réponse préformulée — Considérons les prismes droits à base carrée dont le volume vaut 720 cm^3 et dont les trois dimensions sont des nombres entiers. Quel est, en centimètres carrés, le minimum de leurs aires ?

183 d07 N30

Laquelle des formes de pavé représentées ci-dessous *ne* permet *pas* de paver entièrement le plan (sans trou, ni recouvrement) ?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

184 d10 N30

Le triangle ABC est rectangle en A ; $|AB| = 4$ et $|BC| = 5$; M est le milieu de $[BC]$. Quelle est la longueur de la médiane $[AM]$?

A 2 **B** 2,5 **C** 3 **D** 3,5 **E** 4

2.4 Logique

185 e08 N06

Sans réponse préformulée — Madame Durand a cinq fils. Chacun d'eux a exactement une sœur. Combien Madame Durand a-t-elle d'enfants ?

186 d09 N06

Si un certain professeur se trompe au moins une fois, que peut-on en déduire logiquement ?

A Tous les professeurs se trompent toujours.
B Celui qui se trompe parfois est un professeur.
C Aucun professeur ne dit jamais la vérité.
D Il existe au moins une personne qui s'est trompée au moins une fois.
E Quiconque ne se trompe jamais est un professeur.

187 e10 N13

La phrase « Tous les chats sont des animaux mignons. » a pour négation logique :

- **(A)** « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal mignon. » ;
- **(B)** « Tous les animaux mignons sont des chats. » ;
- **(C)** « Aucun chat n'est un animal mignon. » ;
- **(D)** « Il existe un animal mignon qui n'est pas un chat. » ;
- **(E)** « Tous les chiens sont des animaux terrifiants. ».

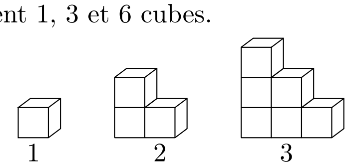
188 e07 N16

Dans cet immeuble à appartements, le facteur distribue 21 lettres et il y a 5 boites aux lettres dans le hall. Une chose est sûre :

- **(A)** Chaque boite contiendra au moins 4 lettres ;
- **(B)** Une boite au moins contiendra au moins 5 lettres ;
- **(C)** Chaque boite contiendra au moins 2 lettres ;
- **(D)** Chaque boite contiendra au moins une lettre ;
- **(E)** Une boite au moins restera vide.

189 d08 N13

Sans réponse préformulée — Jean construit des escaliers au moyen de cubes. Dans les escaliers représentés ci-dessous et numérotés 1, 2, 3, on compte respectivement 1, 3 et 6 cubes.



Si Jean poursuit ses constructions de la même manière, combien lui faudra-t-il de cubes pour construire l'escalier n° 11 ?

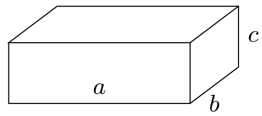
190 e09 N19 Dans une rue, André habite à côté de Bernard, Henri en face de Claude, Éric à côté de François, Daniel à côté d'André, François en face de Daniel et à côté de Henri, Gérard à côté d'Éric. Ces huit personnes habitent dans des maisons différentes. Tu peux en déduire que

- **A** Claude habite à côté de François ;
- **B** Henri habite en face d'André ;
- **C** Éric habite en face de Bernard ;
- **D** Claude habite à côté de Daniel ;
- **E** Gérard habite à côté d'Henri.

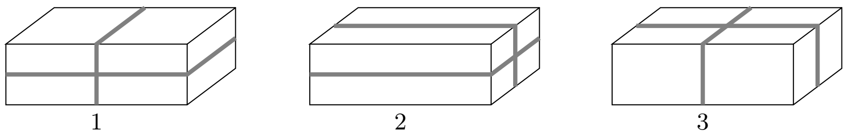
191 d07 N20 *Sans réponse préformulée* — De l'ensemble $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ des neuf premiers nombres premiers, on enlève successivement deux nombres dont le produit est 34, deux nombres dont le produit est 69, deux nombres dont le produit est 95 et deux nombres dont le produit est 143. Que vaut le produit du nombre restant par le dixième nombre premier ?

192 e09 N29

Le paquet représenté ci-dessous a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions a, b, c avec $a > b > c$.



Parallèlement aux arêtes, on peut le ficeler de trois manières différentes :



En ne tenant pas compte des nœuds éventuels, les longueurs de ficelle nécessaire pour les paquets 1, 2 et 3 sont désignées par X, Y et Z respectivement. Laquelle des cinq affirmations suivantes est vraie ?

(A) $Z < X < Y$
(B) $Y < X < Z$
(C) $Z < Y < X$
(D) $X < Y < Z$
(E) $X < Z < Y$

193 d07 N21

On a interrogé 100 élèves à la sortie de leur école : 78 possèdent une TV et 88 une radio. Combien d'entre eux, au minimum, ont les deux appareils ?

(A) 78 **(B)** 66 **(C)** 33 **(D)** 22 **(E)** 12

194 d08 N22

Un drapeau rectangulaire est un damier de carrés noirs et de carrés blancs. La longueur du drapeau comprend deux carrés de plus que sa largeur et au total, il y a 17 carrés noirs. Les carrés des quatre coins sont

(A) 4 blancs ;
(B) 4 noirs ;
(C) 3 noirs et 1 blanc ;
(D) 2 noirs et 2 blancs ;
(E) 1 noir et 3 blancs.

195
d08
N24

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre maximum d'arbres que l'on peut planter de manière que la distance de deux quelconques d'entre eux soit toujours 10 mètres ?

196
d10
N25

Combien des propositions suivantes sont vraies ?
• Quel que soit le nombre premier n, $n+6$ est un nombre premier.
• Quel que soit le nombre pair n, $n+6$ est un nombre pair.
• Si l'entier n est multiple de 17, alors $n+60$ n'est pas multiple de 17.
• Les naturels n et $n+16$ ne sont jamais tous deux des carrés parfaits.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

2.5 Problèmes — Divers

197
e10
N02

Anne a 10 ans, Pierre a 5 ans de plus que Paul et Paul a 3 ans de moins qu'Anne. Quel est l'âge de Pierre ?

(A) 2 ans (B) 7 ans (C) 12 ans (D) 18 ans
(E) Une autre réponse

198
d07
N02

Sans réponse préformulée — Mathilde et Mathieu, qui sont amis, sont allés en vacances au même endroit. Mathilde y est restée du 17 juillet au 15 août, tandis que Mathieu y a séjourné du 11 juillet au 8 août. Tous deux sont arrivés sur leur lieu de séjour le matin et en sont repartis le soir. Pendant combien de journées y ont-ils été ensemble ?

199
e08
N05

À mon rendez-vous à la gare, je suis arrivé avec 7 minutes de retard et mon ami est arrivé à 12 h 07 avec 22 minutes de retard. À quelle heure suis-je arrivé à la gare ?

(A) 11 h 38 (B) 11 h 45 (C) 11 h 52 (D) 12 h 14 (E) 12 h 29

200 d09 N04

Un père et ses deux enfants doivent traverser une rivière sur un petit bateau qui peut supporter 68 kg au maximum. Le père pèse 68 kg, sa fille 36 kg et son fils 32 kg. Au minimum, combien de traversées sont nécessaires ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

201 e07 N08

Sur le plan d'une ville, 15 cm correspondent à 1,5 km. Quelle est l'échelle de ce plan ?

(A) $\dfrac{1}{1\,000}$
(B) $\dfrac{15}{10\,000}$
(C) $\dfrac{1}{10\,000}$
(D) $\dfrac{1}{15\,000}$
(E) $\dfrac{1}{100\,000}$

202 d08 N07

Un escalator de 30 marches monte à la vitesse d'une marche par seconde. Jean, qui est pressé, monte cet escalator à raison de 3 marches toutes les 2 secondes. Combien de secondes faut-il à Jean pour arriver en haut de l'escalator ?

(A) 6 (B) 12 (C) 15 (D) 20 (E) 30

203 e09 N10

Sans réponse préformulée — La somme des âges d'un père et de son fils vaut 56 ans. Le père a 30 ans de plus que son fils. Que vaut, exprimé en années, l'âge du fils ?

204 d09 N08

Une montre à affichage numérique indique les heures, minutes et secondes. Cette montre mise à l'heure le dimanche à midi avance de 2 min 48 s par semaine. Quelle heure indiquera-t-elle le jeudi suivant à 16 h ?

(A) 15 h 58 min 20 s
(B) 16 h 00 min 50 s
(C) 16 h 01 min 10 s
(D) 16 h 01 min 40 s
(E) 16 h 02 min 00 s

205 e08 N12

Deux trains, un omnibus et un train direct, circulent sur une ligne de chemin de fer reliant deux grandes villes. Ils roulent à la même vitesse moyenne, mais le train direct ne s'arrête que dans la gare de départ et dans celle d'arrivée, tandis que l'omnibus s'arrête huit fois en comptant les gares de départ et d'arrivée. Le train omnibus met 24 minutes pour effectuer le trajet complet et le train direct met deux fois moins de temps. Quel est le temps moyen pris par l'omnibus pour effectuer chaque arrêt intermédiaire ?

A 1 min 30 s **B** 2 min **C** 3 min **D** 4 min **E** 12 min

206 e10 N12

Au marché, Marie a acheté une boite de six œufs et un demi-kilo de beurre pour 4,7 €. Le kilogramme de beurre coute 5,8 €. Combien d'œufs Marie pourrait-elle acheter pour 18 € ?

A 6 **B** 12 **C** 24 **D** 60 **E** 84

207 e10 N14

Dans un groupe de 150 adolescents, 98 pratiquent le tennis, 53 font du ski et 39 s'adonnent au ski et au tennis. Combien de ces adolescents ne pratiquent aucun des deux sports ?

A 112 **B** 58 **C** 52 **D** 38 **E** 13

208 d08 N10

Pour payer un montant de 14,5 €, on utilise 17 pièces, les unes de 2 €, les autres de 0,50 €. Combien de pièces de 0,50 € a-t-on utilisées ?

A 5 **B** 7 **C** 9 **D** 11 **E** 13

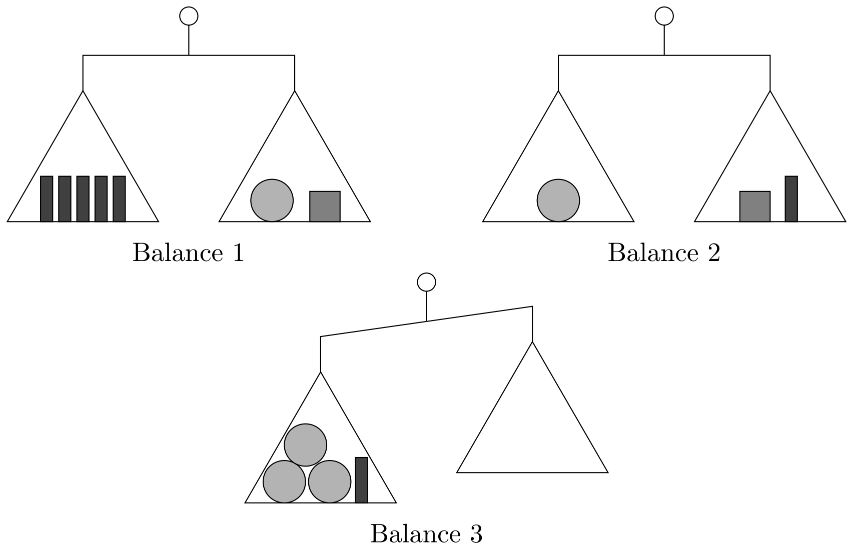
209 e09 N15

Cinq filles bavardent de leurs achats. Voici ce qu'elles se disent.
Aline : « Ce pantalon m'a coûté 72 € au lieu de 90 € ».
Bernadette : « Cette veste valait 120 €, mais je l'ai obtenue pour 84 € ».
Camille : « J'ai acheté une blouse pour les trois quarts de sa valeur ».
Delphine : « Aujourd'hui, j'ai profité d'un rabais de 20 % sur ces bottes ».
Éliane : « J'ai obtenu une ristourne de 10 € sur ce sweat de 100 € ».
Qui, en pour-cent, a obtenu la meilleure remise ?

A Aline
B Bernadette
C Camille
D Delphine
E Éliane

210 e07 N19

Les balances 1 et 2 sont en équilibre. Combien faut-il placer de  sur le plateau de droite de la balance 3 pour équilibrer celle-ci ?



(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

211 d08 N14

Sans réponse préformulée — Au marché, le kilo de tomates coûte le double du kilo de pommes et le kilo de girolles coûte le triple du kilo de tomates. En centimes d'euro, que vais-je payer pour 4 kilos de pommes si 100 grammes de girolles coûtent 0,90 € ?

212 e07 N20

La maison de Mathilde est située en montagne. Partant de chez Mathilde, la route s'élève de 55 m, redescend de 125 m puis remonte de 350 m pour atteindre le col situé à une altitude de 1 270 m. À quelle altitude, en mètres, se trouve la maison de Mathilde ?

(A) 390 **(B)** 740 **(C)** 850 **(D)** 990 **(E)** 1 550

213
e09
N20

J'ai 51 pièces dans mon porte-monnaie. Ce sont des pièces de 1 € et de 20 centimes et elles forment une somme totale de 35 €. Combien ai-je de pièces de 1€ ?

(A) 2 (B) 20 (C) 29 (D) 31 (E) 32

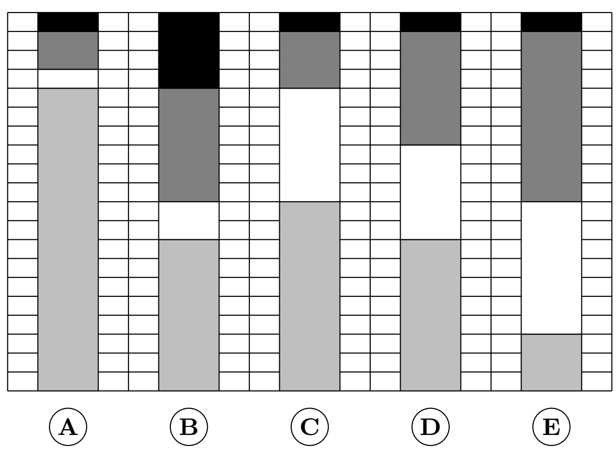
214
e07
N21

Claudine construit un grand cube en empilant 125 petits cubes identiques. Elle pose ce grand cube sur une table, puis en peint les cinq faces visibles. Le nombre de petits cubes dont exactement deux faces sont peintes vaut

(A) 24 (B) 28 (C) 36 (D) 54 (E) 98

215
e09
N21

Une assemblée comprend 60 élus du parti P, 10 élus du parti Q, 30 élus du parti R et 100 élus du parti S. Parmi les cinq diagrammes suivants, lequel représente cette situation ?



216
d07
N15

Sans réponse préformulée — Dans le triangle ABC, l'amplitude de l'angle A vaut trois fois celle de l'angle B et l'amplitude de l'angle C vaut celle de l'angle B augmentée de 20°. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle B ?

217 e10 N22

Un enfant a observé dans son jardin des araignées (à 8 pattes) et des hannetons (à 6 pattes), et aucun autre animal. Il a vu 8 bestioles, qui avaient en tout 54 pattes. Quel est le nombre de hannetons observés ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

218 d08 N16

J'achète un crayon qui coûte 68 centimes d'euro. Je paye avec les pièces dont je dispose et le marchand me rend éventuellement la monnaie. Quel est le plus petit nombre de pièces utilisées lors de cet achat ? Rappelons que les différentes pièces sont 2 €, 1 €, 0,50 €, 0,20 €, 0,10 €, 0,05 €, 0,02 € et 0,01 €.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

219 e07 N24

Mon copain et moi habitons dans la même rue, du côté de numéros impairs et il n'y a ni numéro manquant, ni numéro bis. Mon copain habite au numéro 17 et moi au 71. Combien y a-t-il de maisons entre la sienne et la mienne ?

(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 31 (E) 54

220 e08 N24

Cet après-midi, les deux aiguilles de ma montre indiquent 3 h 10. Si elle fonctionne normalement jusqu'à ce soir à 7 h 40, à combien de reprises les deux aiguilles se seront-elles superposées ?

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 5

221 d08 N17

Tous les jours, un cycliste effectue un circuit de 60 km. Le premier jour, il roule à la vitesse de 20 km/h, le deuxième jour, à la vitesse de 15 km/h et le troisième jour, à la vitesse de 12 km/h. Quelle est, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne pour les trois jours ?

(A) 16,66 (B) 16 (C) 15,66 (D) 15 (E) 14,33

222 e09 N25

Un architecte dispose de deux plans d'un même immeuble, l'un à l'échelle $1/20^e$, l'autre à l'échelle $1/50^e$. La longueur de la façade de cet immeuble est de 20 cm sur le plan à l'échelle $1/20^e$. Que vaut-elle, en centimètres, sur le plan à l'échelle $1/50^e$?

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 50

223 e10 N25

Il a fallu 10 ouvriers travaillant chacun 8 h pour peindre une superficie de $640\,\text{m}^2$. Combien en faudra-t-il pour peindre une superficie de $448\,\text{m}^2$, s'ils ne travaillent plus que 7 h, mais toujours tous au même rythme ?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

224 d09 N18

Sans réponse préformulée — Arthur, Bertrand et Claire se partagent 50 euros. Le rapport de la part d'Arthur à la somme des parts des deux autres est 3/2 et Bertrand reçoit 4 euros de plus que Claire. Combien d'euros Claire reçoit-elle ?

225 d10 N18

Sans réponse préformulée — Un test de 30 questions est coté de la manière suivante : une bonne réponse rapporte 7 points, une abstention vaut 0 et une mauvaise réponse coute 3 points. Un élève, qui a répondu à toutes les questions, obtient un total de 0. Quel est le nombre de ses bonnes réponses ?

226 e08 N26

La montre d'André avance de 10 minutes par heure et celle de Bertrand retarde de 10 minutes par heure. Quelle heure est-il sachant que la montre de Bertrand indique 15 h, que celle d'André indique 17 h et que les deux montres ont été mises à l'heure aujourd'hui au même moment ?

(A) 14 h 30 (B) 16 h (C) 16 h 10 (D) 16 h 40
(E) Les données sont insuffisantes pour le dire.

227 d07 N19

Pour me rendre à la ville en train, un billet simple coûte 30 euros. Je peux acheter pour 250 euros une carte de réduction valable un an. Cette carte me donne droit à deux allers et retours gratuits et les allers et retours suivants à 30 euros. À partir de combien de voyages allers et retours par an l'achat d'une carte est-il intéressant ?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 10

228 e08 N28

À la poste, j'achète 18 timbres, les uns à 0,45 €, les autres à 0,70 € pièce. Je paie avec un billet de 10 € et le guichetier me rend 0,15 €. Combien de timbres à 0,70 € ai-je achetés ?

(A) 11 (B) 10 (C) 8 (D) 7 (E) 3

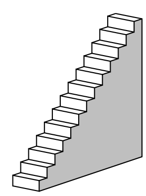
229 e10 N28

Un sac de blé pèse 75 kg ; 100 kg de blé donnent 80 kg de farine ; 4 kg de farine permettent de cuire 7 pains dont le prix de gros, à la sortie de l'atelier, est de 7,5 € pour 5. Quelle est la valeur de la totalité du pain produit avec un sac de blé ?

(A) 127,5 € (B) 135 € (C) 142,5 € (D) 150 € (E) 157,5 €

230 d10 N21

Sans réponse préformulée — Pour peindre le mur soutenant un escalier de 13 marches (en gris sur la figure ci-contre), il a fallu 1,82 L de peinture. En supposant que la peinture a été étendue de manière uniforme, combien de centilitres a demandé la peinture de la partie de ce mur située sous la première marche (à partir du bas) ?



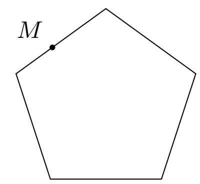
231 e08 N30

On sait que toutes les années multiples de 4 sont bissextiles à l'exception de celles qui sont multiples de 100 mais non multiples de 400. Combien d'années bissextiles sont prévues entre l'an 2008 et l'an 4000 inclus ?

(A) 479 (B) 483 (C) 484 (D) 499 (E) 500

232 d07 N23

Sans réponse préformulée — Partant du point M, une mouche avance le long des côtés d'un pentagone régulier jusqu'à revenir exactement à son point de départ. À chaque sommet, elle tourne au plus court pour passer d'un côté au suivant. À la fin de son périple, quelle est, en degrés, la somme des amplitudes des angles des rotations qu'elle a effectuées ?



233 d09 N24

Sept voleurs se partagent leur butin. À tour de rôle, chacun reçoit un écu et lorsqu'ils ont chacun 15 écus, il reste de l'argent mais il n'y en a plus assez pour encore donner un écu à chacun. Le montant, en écus, de leur butin est un des nombres suivants. Lequel ?

(A) 105 (B) 109 (C) 112 (D) 115 (E) 119

234 d10 N24

Sans réponse préformulée — Un cycliste effectue une promenade constituée d'une descente de 10 km, suivie d'une montée de 2,25 km et enfin d'une descente de 5 km. Sa vitesse en montée vaut 45 % de sa vitesse en descente. La promenade a duré en tout 40 min. Quelle est, en kilomètres par heure, la vitesse de ce cycliste en descente ?

235 d09 N27

Sans réponse préformulée — En une journée, à la frontière, 893 voitures sont passées de Belgique en France et 801 sont passées de France en Belgique. Mais parmi ces voitures, 717 ont fait un aller-retour. Combien de voitures différentes ont traversé la frontière ?

236 d09 N28

Un journal édité en recto-verso comporte 36 pages numérotées de 1 à 36. Le format d'une page est de 33 cm sur 50 cm. Ce journal est tiré chaque jour en 400 000 exemplaires. Parmi les nombres suivants, lequel approche le mieux la superficie du papier employé chaque jour ?

(A) 240 000 m^2
(B) 1 200 000 m^2
(C) 2 000 000 m^2
(D) 2 400 000 m^2
(E) 3 333 333 m^2

237 d07 N29

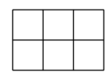
Un train reliant deux villes et partant toujours à la même heure arrive à destination avec 10 minutes de retard lorsqu'il roule à la vitesse de 80 km/h et avec 16 minutes de retard lorsqu'il roule à la vitesse de 60 km/h. Quelle est, en kilomètres, la distance entre les deux villes ?

(A) 1440 (B) 144 (C) 100 (D) 64 (E) 24

2.6 Combinatoire & probabilités

238 d10 N10

La grille 3×2 ci-contre compte 12 sommets. Combien de sommets compte une grille 98×100 ?

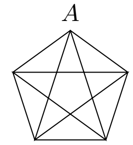


(A) 1980 (B) 4900 (C) 9800 (D) 9999 (E) 19 600

239 d08 N19

On a tracé toutes les diagonales du pentagone régulier représenté ci-contre. Dans cette figure, combien y a-t-il de triangles de sommet A ?

A



(A) 6 (B) 10 (C) 13 (D) 15 (E) 18

240 e10 N30

Un enfant dispose d'un « squelette » de cube en fil de fer. Il décide de tendre une ficelle entre les milieux de chaque paire d'arêtes parallèles. Combien de morceaux de ficelle placera-t-il ?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18 (E) 21

2.7 Table des réponses

N	07		08		09		10	
	e	d	e	d	e	d	e	d
1	B	C	C	D	D	B	B	D
2	D	23	D	B	E	C	C	900
3	A	B	C	D	A	4	B	D
4	864	C	153	97	C	C	B	B
5	D	9	C	A	A	D	300	E
6	D	D	6	D	B	D	E	A
7	280	48	A	B	A	D	C	504
8	C	C	B	144	B	D	B	C
9	B	482	B	371	E	90	B	A
10	C	D	C	E	13	503	C	D
11	D	B	B	C	C	24	84	B
12	E	4	B	C	B	B	D	C
13	B	B	D	66	60	8	A	750
14	B	9	B	600	A	D	D	100
15	D	32	B	B	B	C	C	111
16	B	B	B	B	C	E	992	54
17	E	936	C	D	B	E	A	C
18	B	B	D	8	D	8	D	9
19	E	C	A	D	D	D	A	A
20	D	203	C	B	D	35	B	87
21	B	B	72	E	C	6	D	2
22	C	D	C	A	D	B	D	C
23	C	360	218	D	D	21	84	D
24	B	35	E	3	C	B	E	30
25	E	C	A	385	B	E	D	C
26	B	D	B	14	B	C	C	E
27	E	480	D	D	579	977	A	2
28	671	D	D	9	D	B	E	A
29	119	E	C	556	A	528	E	60
30	C	C	C	9	84	828	D	B

Chapitre 3

Éliminatoires et demi-finales miDi

3.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

D	07		08		09		10	
	e	d	e	d	e	d	e	d
1	241	245	242	336	243	246	244	337
2	338	250	247	442	248	251	249	252
3	339	257	253	432	254	258	340	341
4	467	262	431	263	255	264	256	265
5	259	269	260	443	261	270	433	271
6	266	348	468	273	267	349	342	434
7	343	445	344	353	345	274	268	469
8	346	357	272	277	347	358	444	359
9	435	280	350	448	351	281	352	361
10	354	285	355	450	275	286	470	451
11	276	471	446	289	436	290	356	367
12	447	370	360	472	278	473	279	372
13	282	294	283	375	362	437	449	295
14	363	379	284	438	364	457	365	296
15	366	383	287	302	288	384	452	385
16	453	458	454	304	368	305	369	459
17	371	308	291	391	455	309	373	310
18	292	393	456	314	374	476	293	441
19	376	395	377	317	378	396	474	462
20	297	402	298	320	380	403	381	404
21	382	478	299	464	300	321	301	322
22	439	323	386	410	303	324	387	325
23	388	411	460	412	306	413	475	326
24	440	414	389	415	307	416	390	480
25	311	417	312	327	313	328	392	329
26	315	418	461	330	316	419	394	420
27	318	331	397	332	398	421	399	422
28	400	466	401	423	477	424	319	425
29	405	333	463	426	406	427	407	334
30	479	428	408	335	465	429	409	430

3.2 Arithmétique & algèbre

241 e07 D01

$\dfrac{3^{2007} - 3^{2006}}{2^{2008} - 2^{2007}} =$

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{3^{2006}}{2^{2007}}$ (C) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2006}$ (D) 3 (E) 0

242 e08 D01

On choisit deux nombres parmi les six entiers -8, -7, -6, 2, 3, 4 et on effectue leur produit. Quel est le plus petit produit possible ?

(A) -56 (B) -48 (C) -32 (D) -12 (E) 6

243 e09 D01

Que vaut le triple de l'opposé de la moitié de l'inverse d'un quart ?

(A) -24 (B) -6 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $-\dfrac{3}{2}$ (E) 6

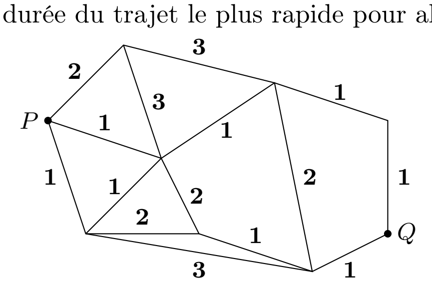
244 e10 D01

$\dfrac{3^{2010}}{3^{200} \cdot 3^{10}} =$

(A) 3 (B) 3^2 (C) 3^{30} (D) 3^{210} (E) 3^{1800}

245 d07 D01

Sans réponse préformulée — Dans le réseau routier représenté ci-dessous, le temps de parcours en heures est indiqué à côté de chaque route. Quelle est, en heures, la durée du trajet le plus rapide pour aller de P à Q ?



246 d09 D01

$\frac{1}{2}\left(1^{2009} + (-1)^{2009}\right) =$

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$ (E) -1

247 e08 D02

$\dfrac{2005 \times 2008 - 2008^2}{2007 \times 2008 - 2008^2} =$

(A) -3 (B) $\dfrac{2005}{2007}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 3 (E) 2006

248 e09 D02

Si $\dfrac{a+2b}{a-5b} = \dfrac{7}{3}$, alors $\dfrac{a}{b} =$

(A) $-\dfrac{41}{4}$; (B) $-\dfrac{4}{41}$; (C) $\dfrac{4}{41}$; (D) $\dfrac{41}{4}$; (E) 37.

249 e10 D02

La moyenne de $\dfrac{1}{4}$ et d'un autre nombre est $\dfrac{1}{6}$. Quel est ce nombre ?

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{12}$ (D) $\dfrac{3}{32}$ (E) $\dfrac{5}{24}$

250 d07 D02

L'un des nombres suivants est une racine carrée de 0,0016. Lequel ?

(A) 0,04 (B) 0,08 (C) 0,008 (D) 0,0004 (E) 0,00256

251 d09 D02

Sans réponse préformulée — La somme de quatre nombres naturels vaut 236. Deux de ces nombres sont consécutifs et les deux autres sont les triples des deux premiers. Que vaut le plus grand de ces nombres ?

252 d10 D02

Sans réponse préformulée — Quand on ajoute 7 au naturel non nul n, on obtient un nombre multiple de 7 ; quand on ajoute 8 à n, on obtient un nombre multiple de 8 ; quand on ajoute 9 à n, on obtient un nombre multiple de 9. Quelle est la plus petite valeur possible de n ?

253 e08 D03

$\dfrac{200^7}{20^{14}} =$

(A) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^7$ (B) 10^{-14} (C) 20^7 (D) -128 (E) $10^{1/2}$

254 e09 D03 Quel nombre, parmi les suivants, est naturel ?

(A) 10π
(B) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$
(C) $-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$
(D) $\dfrac{7\pi+21}{3+\pi}$
(E) $\dfrac{5\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$

255 e09 D04 Si $2a^{2b}=8$, que vaut $3a^{4b}$?

(A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 42 (E) 48

256 e10 D04 Si $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}$, alors $a=$

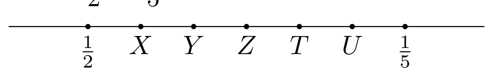
(A) $x+2$; (B) $\dfrac{1}{x+2}$; (C) $\dfrac{x+2}{2x}$; (D) $\dfrac{2x}{x-2}$; (E) $\dfrac{2x}{x+2}$.

257 d07 D03 *Sans réponse préformulée* — La différence de deux nombres est 60. Si on ajoute 10 à chacun d'eux, le plus grand est alors le triple du plus petit. Quel est le plus petit des deux nombres initiaux ?

258 d09 D03 La grandeur Z est proportionnelle au carré de la grandeur X et inversement proportionnelle au cube de la grandeur Y. Si les grandeurs X et Y sont triplées, alors la grandeur Z est

(A) inchangée ;
(B) multipliée par 3 ;
(C) divisée par 3 ;
(D) multipliée par 9 ;
(E) divisée par 9.

259 e07 D05 Entre les graduations $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{5}$, quel est le point de graduation $\dfrac{1}{4}$?



(A) X (B) Y (C) Z (D) T (E) U

260 e08 D05 *Sans réponse préformulée* — La somme de deux nombres entiers vaut 35 et la différence de leurs carrés vaut 455. En valeur absolue, que vaut la différence de ces deux nombres ?

261 e09 D05

Sans réponse préformulée — Une suite de huit chiffres 0 ou 1 est un *octet* : par exemple 01011100 et 00000111 sont des octets. Combien existe-t-il d'octets différents ?

262 d07 D04

$$\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} =$$

A 0 **B** 0,6 **C** 1 **D** 1,5
E Aucune des valeurs précédentes

263 d08 D04

Sans réponse préformulée — Combien y a-t-il de nombres naturels inférieurs à 1 000 et ayant exactement deux chiffres identiques ?

264 d09 D04

Quelle est la valeur minimale de $x^2 + 4x + 5$, où x est un nombre réel ?

A 2 **B** 1 **C** 0 **D** -1 **E** -2

265 d10 D04

Sur la droite joignant les points de coordonnées $(6, 12)$ et $(0, -6)$ se trouve aussi le point de coordonnées :

A $(-3, -8)$; **B** $(-1, -4)$; **C** $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; **D** $(3, 3)$; **E** $(7, 14)$.

266 e07 D06

Que vaut $(x + y)^2$ sachant que la moitié de x ainsi que le tiers de y valent 2,5 ?

A 0,25 **B** 31,25 **C** 81,25 **D** 156,25 **E** 225

267 e09 D06

Dans l'expression « mille milliards de mille sabords », quel est le nombre de sabords ?

A 10^{13} **B** 10^{14} **C** 10^{15} **D** 10^{16} **E** 10^{17}

268 e10 D07

Trois nombres distincts sont choisis parmi -9, -8, -7, -6, 2, 3, 4, 5. Les deux premiers sont multipliés entre eux, puis le troisième est soustrait du produit. Quel est le plus petit résultat possible ?

A -49 **B** -48 **C** -45 **D** -19 **E** 1

269 d07 D05

Sans réponse préformulée — Quelle est la valeur de x dans l'équation $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{x}$?

270 d09 D05

Dans un village où vivent 1 600 familles, 3 % d'entre elles possèdent un seul lecteur DVD. Parmi les autres familles, une moitié possède exactement deux lecteurs DVD et l'autre moitié n'en possède aucun. Combien y a-t-il de lecteurs DVD dans ce village ?

(A) 824 (B) 1 552 (C) 1 600 (D) 1 648 (E) 3 152

271 d10 D05

Parmi les cinq équations suivantes, d'inconnue entière x, combien admettent exactement une solution :

$$x = 1\,; \qquad x^2 = 1\,; \qquad x^3 = 1\,; \qquad x^3 = x\,; \qquad x^3 = x^2\,?$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

272 e08 D08

Sans réponse préformulée — Un nombre entier comporte deux chiffres dont la différence vaut 5. Si l'on permute les deux chiffres, le nombre obtenu ne vaut plus que les trois huitièmes du précédent. Quel est le nombre initial ?

273 d08 D06

Sans réponse préformulée — Les nombres réels x et y satisfont aux deux égalités $y = 2x + 36$ et $x = 2y - 36$. Que vaut $x + y$?

274 d09 D07

Sachant que $a^\star = 1 - 10^a$, que vaut $\big((0^\star)^\star\big)^\star$?

(A) 0 (B) 1 (C) -1000 (D) -49 (E) 0^0

275 e09 D10

Le produit de cinq nombres entiers consécutifs n'est jamais

(A) 120 ;
(B) 720 ;
(C) 3600 ;
(D) Divisible par 3 ;
(E) Divisible par 5.

276
e07
D11

Pascal pense à trois nombres entiers. En additionnant ces nombres deux à deux, il obtient les sommes 38, 44 et 52. Quel est le plus petit des trois nombres ?

(A) 13 (B) 15 (C) 21 (D) 23 (E) 29

277
d08
D08

Le nombre $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{8}{7} \times \frac{9}{10} \times \frac{12}{11} \times \cdots \times \frac{2008}{2007}$ est

(A) Égal à 0 ;
(B) Strictement compris entre 0 et 1 ;
(C) Égal à 1 ;
(D) Strictement supérieur à 1 ;
(E) Infini.

278
e09
D12

Quel est le chiffre des unités du nombre $2^{2009} \cdot 3^{2009} \cdot 6^{2009}$?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

279
e10
D12

Un seul des cinq nombres que voici n'est *pas* le produit de deux naturels consécutifs. Lequel ?

(A) 238 (B) 650 (C) 702 (D) 930 (E) 1806

280
d07
D09

Le baril de pétrole coûtait 60 dollars il y a un mois. Depuis, ce prix a augmenté de 20 % alors que la valeur du dollar a chuté de 20 % par rapport à l'euro. Pendant le mois dernier, le prix en euros du baril

(A) A baissé de 40 % ;
(B) A baissé de 4 % ;
(C) Est inchangé ;
(D) A augmenté de 4 % ;
(E) A augmenté de 44 %.

281 d09 D09

Si a, b et c sont trois nombres naturels non nuls et si $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ et $\frac{b}{c} = \frac{5}{6}$, alors $\frac{a}{c} =$

(A) $\frac{5}{8}$; (B) $\frac{8}{5}$; (C) $\frac{9}{10}$; (D) $\frac{10}{9}$; (E) $\frac{1}{2}$.

282 e07 D13

Si $3x + 5y = 24$ et $7x + 5y = 56$, que vaut y ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

283 e08 D13

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit nombre naturel possédant exactement 10 diviseurs naturels ?

284 e08 D14

Mathias construit un cube à l'aide de petits cubes de 1 cm de côté puis il le peint extérieurement. Quand il le défait, certains petits cubes ont une ou plusieurs faces coloriées et d'autres n'ont aucune face coloriée. À partir de quelle longueur du côté du grand cube les petits cubes n'ayant aucune face coloriée seront-ils en plus grand nombre que les autres ?

(A) 7 cm (B) 8 cm (C) 9 cm (D) 10 cm (E) 11 cm

285 d07 D10

Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de nombres de deux chiffres (le chiffre des dizaines est non nul) égaux à la somme de leurs deux chiffres ?

286 d09 D10

Dans une réserve naturelle, il y a 624 lions. Après un hiver rigoureux, leur nombre diminue de 20 %, tandis qu'à la suite d'un hiver doux, il augmente de 25 %. Lors des huit prochaines années, les climatologues prévoient 3 hivers rigoureux et 5 doux. Combien de lions restera-t-il après ces huit années ?

(A) 848 (B) 975 (C) 1 025 (D) 1 875
(E) Cela dépend de l'alternance des hivers.

287 e08 D15

Dans une assemblée, 60 % sont des femmes. Une femme sur trois est sportive et un homme sur deux est sportif. Parmi les sportifs de cette assemblée, quelle est, exprimée en %, la proportion de femmes ?

(A) 35 **(B)** 40 **(C)** 45 **(D)** 50 **(E)** 55

288 e09 D15

Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de couples (x, y) de nombres entiers tels que $x^2 \leqslant 49$ et $0 < y^3 \leqslant 216$?

289 d08 D11

Une fraction est strictement supérieure à $\frac{5}{9}$ et strictement inférieure à $\frac{4}{7}$. Ses deux termes sont des entiers dont la différence vaut 16. Quelle est cette fraction ?

(A) $\frac{13}{29}$ **(B)** $\frac{17}{33}$ **(C)** $\frac{19}{35}$ **(D)** $\frac{21}{37}$ **(E)** $\frac{29}{45}$

290 d09 D11

Sans réponse préformulée — On désigne par $\overline{abc}$ le nombre naturel dont les chiffres des centaines, des dizaines et des unités sont respectivement a, b et c. Déterminer le plus grand nombre de la forme $\overline{aba}$ divisible par 36.

291 e08 D17

Dans une école, en cinq ans, le nombre de filles a augmenté de 11 % mais le nombre total d'étudiants a augmenté de 20 %. La proportion de filles

(A) Est restée stable ;
(B) A augmenté de 4,5 % ;
(C) A diminué de 4,5 % ;
(D) A diminué de 7,5 % ;
(E) A diminué de 9 %.

292 e07 D18

Sans réponse préformulée — Le nombre naturel 2007 est la somme de trois nombres naturels impairs consécutifs. Quel est le plus grand de ces trois nombres ?

293 e10 D18

En vendant un disque compact à 18 €, un commerçant réalise un bénéfice de 44 % (sur son prix d'achat). À quel prix le vendra-t-il s'il se contente d'un bénéfice de 40 % ?

(A) 16,20 € **(B)** 16,36 € **(C)** 17 € **(D)** 17,30 € **(E)** 17,50 €

294 d07 D13 *Sans réponse préformulée* — Sachant que, pour tous réels non nuls a, b, $a \star b = \dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}$, que vaut $2007 \star (2008 \star 2009)$?

295 d10 D13 *Sans réponse préformulée* — Pour combien d'entiers n la fraction $\dfrac{n+3}{n-1}$ est-elle un entier ?

296 d10 D14 Que vaut $\dfrac{x+y}{x-y}$ si $0 < y < x$ et $x^2+y^2 = 6xy$?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) Une autre valeur

297 e07 D20 Une suite de 15 nombres est telle que la somme de trois nombres consécutifs de cette suite vaut toujours 2007. Le quatrième nombre de la suite est 500 et le quinzième est 200. Que vaut le septième nombre ?

(A) 200 (B) 427 (C) 500 (D) 837 (E) 1 307

298 e08 D20 Lequel des nombres suivants est le plus proche de 2008 ?

(A) $2000\sqrt{2}$ (B) $1\,000\sqrt{5}$ (C) $1200\sqrt{3}$ (D) 2×1025 (E) 2^{11}

299 e08 D21 Combien existe-t-il de fractions rationnelles irréductibles, de dénominateur égal à 51 et qui sont strictement comprises entre 0 et 1 ?

(A) 27 (B) 29 (C) 32 (D) 48 (E) 49

300 e09 D21 Le nombre de diviseurs entiers positifs de 2009 est

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 12

301 e10 D21 De quel pourcentage augmente le volume d'un cube si chaque arête augmente de 50 % ?

(A) 50 % (B) 150 % (C) 225 % (D) 237,5 % (E) 1250 %

302 d08 D15

$3 + 2\sqrt{2} - \dfrac{3}{3 + 2\sqrt{2}} + \dfrac{2}{3 - 2\sqrt{2}} =$

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $12\sqrt{2}$ (C) 0 (D) $\dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$ (E) $2 + 2\sqrt{2}$

303 e09 D22

Les nombres entiers a, b, c sont tels que $(a-2009)(b-2009)(c-2009) = 1$. Quelle est la plus petite valeur que peut prendre l'expression $a + b + c$?

(A) 1 (B) 6024 (C) 6026 (D) 6028 (E) 6030

304 d08 D16

La formule $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'}$ utilisée au cours d'optique s'écrit aussi

(A) $d = f - d'$;
(B) $d = \dfrac{f - d'}{fd'}$;
(C) $d = \dfrac{1}{f - d'}$;
(D) $d = \dfrac{d' - f}{fd'}$;
(E) $d = \dfrac{fd'}{d' - f}$.

305 d09 D16

Les neuf premiers chiffres d'un code de douze chiffres sont 130 999 121 et les trois derniers chiffres de droite sont perdus. Le nombre formé par ce code est divisible par 25. Combien y a-t-il de possibilités pour ce code ?

(A) 100 (B) 50 (C) 40 (D) 36 (E) 30

306 e09 D23

Sans réponse préformulée — Les quatre chiffres du nombre n sont tous différents. La somme des deux premiers chiffres est égale à la somme des deux derniers. Le premier chiffre vaut quatre fois le dernier et le deuxième vaut le tiers du troisième. Que vaut la somme des chiffres de n ?

307 e09 D24

Le polynôme p est tel que $p(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 1$ et $p(-2009) = -41$. Que vaut $p(2009)$?

(A) 43 (B) 42 (C) 41 (D) 40 (E) -40

308 d07 D17

Sans réponse préformulée — Une feuille de papier rectangulaire a un périmètre de 108 cm. Je la plie en deux dans un sens, en quatre dans l'autre et j'obtiens ainsi un carré. Quel est, en centimètres, le périmètre de ce carré ?

309 d09 D17

Sans réponse préformulée — Si $y = \dfrac{1}{x}$, que vaut $\dfrac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}$?

310 d10 D17

Le nombre $\underbrace{121212\ldots12}_{\text{2010 chiffres}}$ *n'*est *pas* divisible par

(A) 2 (B) 12 (C) 18 (D) 24 (E) 36

311 e07 D25

Le nombre naturel n est formé de deux chiffres distincts. On soustrait de n le nombre obtenu en intervertissant ses deux chiffres et le résultat est un nombre naturel cube parfait. Combien existe-t-il de valeurs possibles pour n ?

(A) 0 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 9

312 e08 D25

Pour réussir cet examen, il faut obtenir une note d'au moins 50 sur 100. La moyenne de ceux qui ont réussi est de 65 sur 100, la moyenne de ceux qui ont échoué est de 35 sur 100 et la moyenne de tous les participants est de 53 sur 100. Quel est le pourcentage d'élèves qui ont réussi ?

(A) 66,6 % (B) 60 % (C) 48 % (D) 45 % (E) 20 %

313 e09 D25

Si $a = 2^7 \cdot 6^3$, $b = 4^7 \cdot 3^3$, $c = 12^{10}$, $d = 3^7 \cdot 4^3$ et $e = 6^7 \cdot 2^3$, alors

(A) $a = b = c = d = e$;
(B) $a < d < e < b < c$;
(C) $a < b < c < d < e$;
(D) $d < a < e < b < c$;
(E) $a < d < b < e < c$.

314 d08 D18

Sans réponse préformulée — Quelle est la 2008e décimale de $\dfrac{7}{73}$?

315
e07
D26

Une seule des expressions ci-dessous ne vaut pas 1. Laquelle ?

(A) $\dfrac{(1\cdot 2)^3}{(-3)^3(-4)^3}\cdot\dfrac{(3\cdot 4)^3}{(-1)^3(-2)^3}$

(B) $\dfrac{(-1)\cdot(-2)}{(-3)\cdot(-4)}\cdot\dfrac{3\cdot 4}{1\cdot 2}$

(C) $\dfrac{(1\cdot 2)^2\cdot(3\cdot 4)^2}{(-1)^2\cdot(-2)^2\cdot(-3)^2\cdot(-4)^2}$

(D) $\dfrac{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2+(-4)^2}{(1+2+3+4)^2}$

(E) $\dfrac{(-1)\cdot(-2)}{3\cdot 4}\cdot\dfrac{(-3)\cdot(-4)}{1\cdot 2}$

316
e09
D26

On appelle nombre *oblong* un nombre qui est la somme d'un nombre naturel et de son carré (par exemple, $4+4^2=20$ est un nombre oblong). Parmi les nombres suivants, un seul est oblong, lequel ?

(A) 196 (B) 300 (C) 512 (D) 600 (E) 2009

317
d08
D19

Sans réponse préformulée — Les nombres naturels a, b, c, d, e sont, dans cet ordre, consécutifs et leur produit vaut 55 440. Que vaut c ?

318
e07
D27

Sachant que a et b sont des réels tels que $a>b$ et $c<0$, laquelle des affirmations suivantes est toujours vraie ?

(A) $a+c<b+c$

(B) $a-c<b-c$

(C) $a\cdot c<b\cdot c$

(D) $a\cdot c<b$

(E) $a<b\cdot c$

319
e10
D28

Le produit des âges de mes enfants, exprimés en années, vaut 1664. L'âge du plus jeune est la moitié de l'âge de l'ainé. Combien ai-je d'enfants ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

320
d08
D20

Sans réponse préformulée — Un sac contient 40 billes certaines rouges, certaines vertes. Lorsqu'on en retire 4 billes vertes, le rapport du nombre de billes vertes restantes au nombre de billes rouges vaut $\dfrac{1}{3}$. Combien reste-t-il de billes vertes dans le sac ?

321 d09 D21

Sans réponse préformulée — Quel est le chiffre des unités de $\left(7^9\right)^4$?

322 d10 D21

$2015^2 - 2 \times 2010^2 + 2005^2 =$

(A) 0 (B) 10 (C) 50 (D) 250 (E) 350

323 d07 D22

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale du nombre $5^{17} \cdot 4^8$?

324 d09 D22

Quel est le nombre de solutions de l'équation $\left(\sqrt{x}\right)^3 = 3\sqrt{x}$ d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

325 d10 D22

Lequel des polynomes suivants *ne* divise *pas* $X^7 - X$?

(A) $X^4 + X$ (B) $X^3 - 1$ (C) $X^2 - 1$ (D) $X^2 + X + 1$ (E) $X^4 + 1$

326 d10 D23

Sans réponse préformulée — Quelle est la somme des diviseurs premiers de 2010^{2010} ?

327 d08 D25

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$?

328 d09 D25

Le nombre $\overline{abcd}$ est divisible par 7 lorsque

(A) $d - c + b - a$ est divisible par 7 ;

(B) $a + b + c + d$ est divisible par 7 ;

(C) $\overline{bcd} + a$ est divisible par 7 ;

(D) $\overline{cd} - \overline{ab}$ est divisible par 7 ;

(E) $\overline{bcd} - a$ est divisible par 7.

329 d10 D25

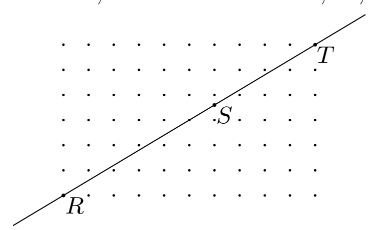
Sans réponse préformulée — Une opération $\star$ est définie sur les entiers par $a \star b = a^b + b^a + ab$. Que vaut $3 \star (1 \star 2)$?

330 d08 D26

Sans réponse préformulée — Les pages d'une bande dessinée sont toutes constituées de 4 bandes. Chaque bande comprend 3 ou 4 cases. Soit n le nombre total de cases de cette bande dessinée. Parmi les entiers strictement positifs, combien de valeurs sont impossibles pour n ?

331 d07 D27

Le quadrillage dessiné ci-dessous est régulier et les points R, S, T sont alignés. L'abscisse de R est 0,3 et celle de T est 0,35 ; quelle est celle de S ?



(A) 0,304 (B) 0,308 (C) 0,325 (D) 0,33 (E) 0,338

332 d08 D27

Sans réponse préformulée — Lors du dernier réveillon, comme le veut la tradition, chaque paire de convives échange 3 bises. Ainsi, 2 340 bises ont été échangées. Combien y avait-il de convives ?

333 d07 D29

Sans réponse préformulée — Les nombres naturels non nuls sont écrits en tableau de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
2 & 3 \\
4 & 5 & 6 \\
7 & 8 & 9 & 10 \\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\
16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\
22 & 23 & \cdots & \cdots & & & & \ddots \\
\vdots
\end{array}$$

La ligne n° 6 comporte le nombre 19. Quel est le numéro de la ligne comportant 2007 ?

334 d10 D29

Combien de couples (x, y) d'entiers vérifient l'équation $\sqrt{x} - \sqrt{17} = \sqrt{y}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 17 (E) Une infinité

335 d08 D30

Sans réponse préformulée — Combien de couples (x, y) d'entiers vérifient l'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$?

3.3 Géométrie

336 d08 D01

Quel est le nombre d'arêtes d'un cube ?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

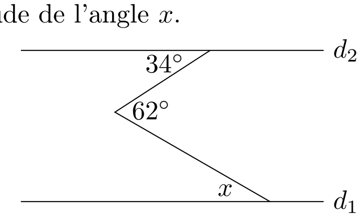
337 d10 D01

La courbe d'équation $y = x^2$

(A) N'admet que Ox comme axe de symétrie ;
(B) N'admet que Oy comme axe de symétrie ;
(C) Admet les deux axes de coordonnées comme axes de symétrie ;
(D) N'admet aucun axe de symétrie ;
(E) Admet l'origine O comme centre de symétrie.

338 e07 D02

Dans la figure ci-dessous, les droites d_1 et d_2 sont parallèles. Déterminer, en degrés, l'amplitude de l'angle x.



(A) 26 (B) 28 (C) 30 (D) 32 (E) 34

339 e07 D03

Dans une cerise, on estime que l'épaisseur de la couche de chair est égale au diamètre du noyau. On admet également que le noyau et la cerise sont deux sphères de même centre. Quel est le rapport du volume de la chair à celui du noyau ?

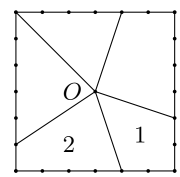
(A) 7 (B) 8 (C) 15 (D) 26 (E) 27

340 e10 D03

Sans réponse préformulée — Si O est l'orthocentre d'un triangle équilatéral ABC, quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{BOA}$?

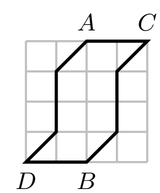
341 d10 D03

Sans réponse préformulée — Dans la figure ci-contre, les côtés du carré sont subdivisés en 6 parties égales et O est le centre du carré. Si l'aire de la zone 1 est de $600\,\text{cm}^2$, quelle est, en centimètres carrés, celle de la zone 2 ?



342 e10 D06

Ci-contre, le quadrillage gris est régulier. L'octogone noir est conservé par (outre l'identité)



(A) Une seule rotation, de 90° ;

(B) Une seule rotation, de 180° ;

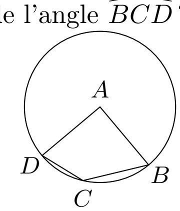
(C) Deux rotations, de 90° et de 180° ;

(D) Une seule symétrie axiale, d'axe AB ;

(E) Une seule symétrie axiale, d'axe CD.

343 e07 D07

Dans le cercle de centre A, l'amplitude de l'angle $\widehat{DAB}$ vaut 90°. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{BCD}$?



(A) 105 (B) 120 (C) 125 (D) 135 (E) 150

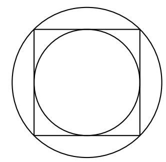
344 e08 D07

Les quatre côtés et une des diagonales d'un losange ont la même longueur a. Quelle est la longueur de l'autre diagonale ?

(A) $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $a\sqrt{2}$ (C) $a\sqrt{3}$ (D) a (E) $2a$

345 e09 D07

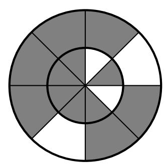
Dans la figure ci-contre, le carré est inscrit dans le grand cercle et circonscrit au petit cercle. L'aire du petit cercle vaut π. Que vaut l'aire du grand cercle ?



(A) $\pi\sqrt{2}$ (B) 2π (C) 4π (D) $3{,}14\pi$ (E) 6π

346 e07 D08

Le disque dessiné ci-dessous est divisé en secteurs tous de même amplitude. L'aire du grand disque vaut 100. Que vaut l'aire totale des parties non grisées ?



(A) 10 (B) 12,5 (C) 18 (D) 25 (E) 28

347 e09 D08

Dans un repère orthonormé du plan, les coordonnées des sommets P et Q d'un carré $PQRS$ sont respectivement $(0,0)$ et $(3,1)$, les points P, Q, R et S se succédant dans l'ordre antihorlogique. Quelles sont les coordonnées de S ?

(A) $(1,3)$
(B) $(-1,3)$
(C) $(-3,3)$
(D) $(-1,2)$
(E) $(3,-3)$

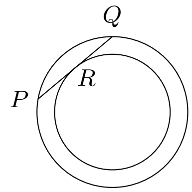
348 d07 D06

Si le rayon d'une sphère augmente de 20 %, l'aire de cette sphère augmente de

(A) 20 % ; (B) 32 % ; (C) 40 % ; (D) 44 % ;
(E) Un autre pourcentage.

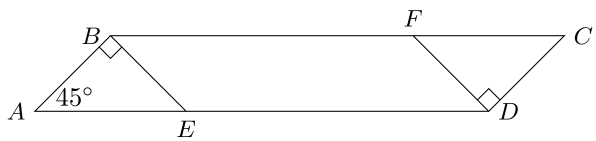
349 d09 D06

Sans réponse préformulée — Une piste de course a la forme d'une couronne circulaire. Le grand cercle admet une corde $[PQ]$ de longueur 20 mètres tangente en R au petit cercle. Que vaut, en mètres carrés, l'aire de la piste arrondie à l'unité la plus proche ?



350 e08 D09

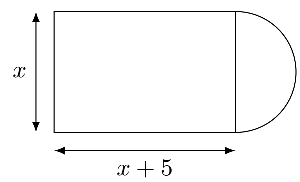
Dans le parallélogramme $ABCD$ représenté ci-dessous, $|AB| = \sqrt{2}$, $|AD| = 10$, l'amplitude de l'angle $\widehat{A}$ vaut 45° et les droites BE et DF sont perpendiculaires à AB. Quelle est la distance entre les droites BE et DF ?



(A) $\sqrt{2}$ (B) 5,6 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $10 - 2\sqrt{2}$ (E) 8

351 e09 D09

La figure ci-dessous est formée d'un rectangle de dimensions x et $x+5$ et d'un demi-cercle dont un diamètre est un petit côté du rectangle. Que vaut l'aire de cette figure ?



(A) $2x + 5 + \pi\dfrac{x}{2}$

(B) $x^2 + 5 + \pi x^2$

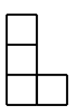
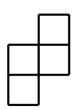
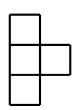
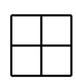
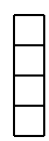
(C) $x^2 + 5x + \dfrac{\pi x^2}{4}$

(D) $x^2 + 5 + \dfrac{\pi x^2}{8}$

(E) $x^2 + 5x + \dfrac{\pi x^2}{8}$

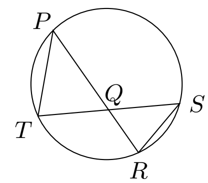
352 e10 D09

Les cinq figures ci-dessous sont formées de carrés juxtaposés. Laquelle d'entre elles n'admet ni axe de symétrie, ni centre de rotation ?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

353 d08 D07

Le quadrilatère $PTSR$ est inscrit dans un cercle. Les droites PR et TS se coupent en Q. Le rapport $\dfrac{PQ}{PT}$ est égal à l'un des suivants ; lequel ?



(A) $\dfrac{SQ}{SR}$ **(B)** $\dfrac{SR}{QS}$ **(C)** $\dfrac{QR}{SR}$ **(D)** $\dfrac{SQ}{QR}$ **(E)** $\dfrac{QR}{QT}$

354 e07 D10

Dans un parallélipipède rectangle, les aires de trois faces adjacentes valent 12, 15 et 20. Que vaut son volume ?

(A) 48 **(B)** 56 **(C)** 60 **(D)** 180 **(E)** 300

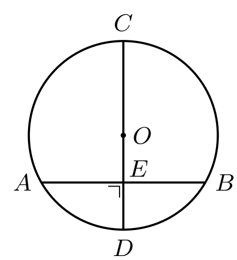
355 e08 D10

Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés vaut 338 et le périmètre égale 30. Quelle est la longueur du plus petit des trois côtés ?

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 12 **(E)** 13

356 e10 D11

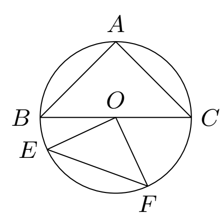
Ci-contre, le cercle a un rayon de 5 cm et $|ED| = 2$ cm. Que vaut $|AB|$?



(A) 3 cm **(D)** 8 cm
(B) 4 cm **(E)** 8,5 cm
(C) 6 cm

357 d07 D08

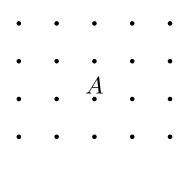
Dans le cercle de centre O, le triangle isocèle BAC est rectangle en A et le triangle EOF est rectangle en O. Quel est le rapport de l'aire de BAC à celle de EOF ?



(A) $\sqrt{2}-1$ **(B)** 1,5 **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 2 **(E)** $\sqrt{2}+1$

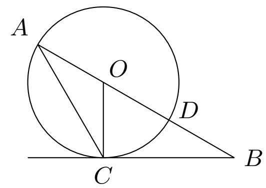
358 d09 D08

Sans réponse préformulée — Le point A est le centre du quadrillage régulier représenté entièrement ci-contre. Quel est le nombre de carrés dont les sommets se trouvent parmi les 25 sommets de ce quadrillage et qui admettent A comme centre de symétrie ?



359 d10 D08

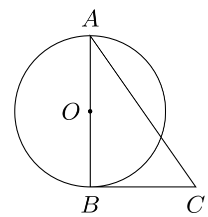
Sans réponse préformulée — Dans la figure (imprécise) ci-contre, O est le centre du cercle, la droite BC est tangente à ce dernier et $\widehat{CBD} = 36°$. Quelle est la mesure (principale) en degrés de l'angle $\widehat{DOC}$?



360 e08 D12

Le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O et la droite BC est tangente au cercle en B. Que vaut l'aire du cercle sachant que $|AC| = 12$ et $|BC| = 8$?

(A) 12π (B) $8\sqrt{3}\pi$ (C) 16π (D) 20π (E) 80π

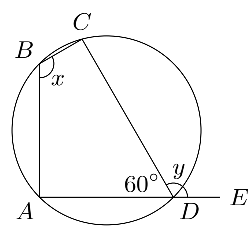


361 d10 D09

Sans réponse préformulée — Pour mesurer la hauteur d'un arbre vertical, Mathieu plante verticalement un bâton qui dépasse du sol de 75 cm. L'ombre du bâton mesure 1 m et celle de l'arbre 6,6 m. Quelle est, en centimères, la hauteur de l'arbre ?

362 e09 D13

Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle et l'angle $\widehat{ADC}$ mesure 60°. Quelle relation est vérifiée par les angles $x = \widehat{ABC}$ et $y = \widehat{CDE}$?

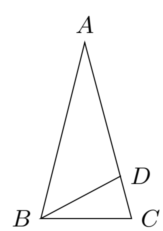


(A) $x + y < 210°$ (B) $x + y > 270°$ (C) $x - y = 60°$ (D) $x = 2y$ (E) $x = y$

363 e07 D14

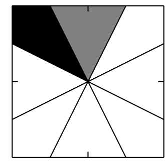
Les triangles BAC et CBD sont isocèles et tels que $|AB| = |AC|$, $|BC| = |BD|$ et $|AB| = 2|BC|$. Quel est le rapport des aires des triangles ABC et BCD ?

(A) 2 (B) 3 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4 (E) $3\sqrt{2}$



364 e09 D14

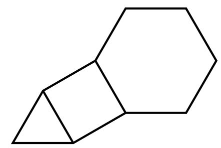
Chaque côté du carré représenté ci-contre est partagé en quatre parties égales. L'aire du triangle gris vaut 12 cm^2. En centimètres carrés, que vaut l'aire du quadrilatère noir ?



(A) 8 (B) 10 (C) $\frac{45}{4}$ (D) 12 (E) $\frac{25}{2}$

365 e10 D14

La figure ci-contre est formée d'un triangle équilatéral dont l'aire est de $3\,\text{cm}^2$, d'un carré et d'un hexagone régulier. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de l'hexagone ?



(A) $3\sqrt{3}$ (B) 6 (C) $6\sqrt{3}$ (D) 12 (E) 18

366 e07 D15

Un triangle équilatéral et un hexagone régulier ont le même périmètre. L'aire du triangle vaut 72. Que vaut l'aire de l'hexagone ?

(A) 72 (B) 108 (C) 144 (D) 216 (E) 432

367 d10 D11

Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle. Quel est le rapport de la longueur d'un de ses côtés à celle de l'arc qu'il sous-tend ?

(A) $\frac{3}{\pi}$ (B) $\frac{6}{\pi}$ (C) $\frac{3}{2\pi}$ (D) $\frac{2}{3\pi}$ (E) $\frac{1}{6}$

368 e09 D16

Les côtés d'un losange mesurent 13 cm et une de ses diagonales mesure 10 cm. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de ce losange ?

(A) 60 (B) 65 (C) 120 (D) 130 (E) 156

369 e10 D16

Les aires de trois des faces d'un parallélépipède rectangle valent 24, 32 et 48 centimètres carrés. Quel est le volume de ce parallélépipède ?

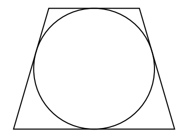
(A) $128\,\text{cm}^3$ (B) $192\,\text{cm}^3$ (C) $384\,\text{cm}^3$ (D) $1024\,\text{cm}^3$ (E) $36\,864\,\text{cm}^3$

370 d07 D12

Sans réponse préformulée — La longueur des côtés d'un losange est 10 cm et celle de la petite diagonale est 12 cm. Que vaut, en centimètres carrés, l'aire de ce losange ?

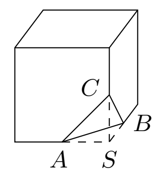
371 e07 D17

Sans réponse préformulée — Un trapèze isocèle est circonscrit à un cercle. La longueur de la petite base est 24 et celle de la grande base est 60. Que vaut le périmètre du trapèze ?



372 d10 D12

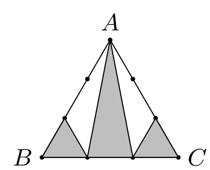
Le cube ci-contre a été « amputé » de la pyramide $SABC$. L'arête du cube mesure 6 cm et les points A, B et C sont des milieux d'arêtes. Quel est le volume du solide restant ?



(A) $31{,}5\,\mathrm{cm}^3$ (B) $202{,}5\,\mathrm{cm}^3$ (C) $211{,}5\,\mathrm{cm}^3$
(D) $216\,\mathrm{cm}^3$ (E) $220{,}5\,\mathrm{cm}^3$

373 e10 D17

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral et les points marqués sur les côtés partagent ceux-ci en tiers. Que vaut le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de ABC ?



(A) 1/2 (B) 2/3 (C) 4/9 (D) 5/9 (E) 9/12

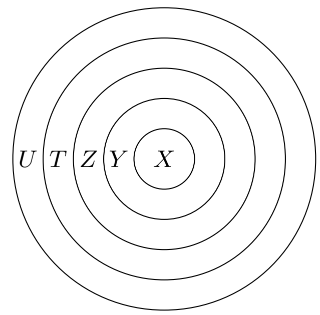
374 e09 D18

En pliant une feuille de papier en 4 dans le sens de la longueur et en 3 dans le sens de la largeur, on obtient un carré. Le périmètre de la feuille non pliée est de 294 cm. Que vaut, en centimètres, la largeur de la feuille ?

(A) 21 (B) 63 (C) 84 (D) 98 (E) 126

375 d08 D13

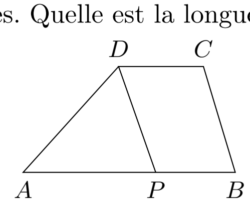
Cinq cercles concentriques ont pour rayons respectifs 1, 2, 3, 4, 5. L'aire du petit cercle vaut X et les aires des quatre couronnes valent respectivement Y, Z, T et U ainsi qu'indiqué par la figure. Laquelle des relations suivantes est correcte ?



(A) $X + Y = T$
(B) $U - X = T$
(C) $X + Y + U = T + Z$
(D) $U + Z = X + Y + T$
(E) $X + Y + Z = U$

376 e07 D19

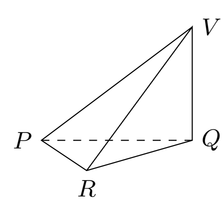
Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ du trapèze $ABCD$ sont parallèles et $|AB| = 40$, $|CD| = 16$. Sur $[AB]$, le point P est tel que $[DP]$ coupe le trapèze en deux parties d'aires égales. Quelle est la longueur de $[AP]$?



(A) 16 (B) 20 (C) 28 (D) 32 (E) 36

377 e08 D19

Dans le tétraèdre $VPQR$, la droite VQ est perpendiculaire au plan PQR, $\widehat{PQR} = 60°$, $|VP| = |VR| =$ $= 10$ et $|VQ| = 8$. Que vaut la longueur de $[PR]$?



(A) 6 (B) $6\sqrt{2}$ (C) 9 (D) 10 (E) $8\sqrt{3}$

378 e09 D19

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est de longueur h et un côté de l'angle droit est de longueur c. Sachant que la différence entre h et c vaut 1, quelle est la longueur de l'autre côté de l'angle droit ?

(A) $h - c$
(B) $\sqrt{h-c}$
(C) $\sqrt{h+c}$
(D) $\sqrt{h^2+c^2}$
(E) $\frac{1}{h} + \frac{1}{c}$

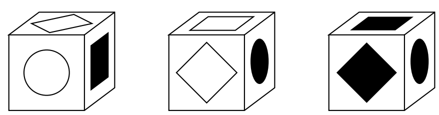
379 d07 D14

L'aire du triangle PST vaut 27 cm^2. Les points Q et R appartiennent respectivement aux côtés $[PS]$ et $[PT]$. La droite QR est parallèle à ST et telle que $|PQ| = 2|QS|$. Que vaut, en centimètres carrés, l'aire du triangle PQR ?

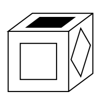
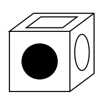
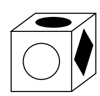
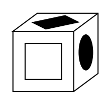
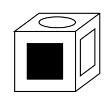
(A) 9 (B) 12 (C) 13,5 (D) 18 (E) 24

380 e09 D20

Paul a collé des étiquettes sur un dé à six faces. Voici trois vues de ce dé.

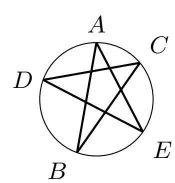


Parmi les cinq vues suivantes, laquelle représente également le dé de Paul ?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

381 e10 D20

Sans réponse préformulée — Quelle est la mesure en degrés de la somme des angles du pentagone étoilé $ABCDE$ ci-contre ?



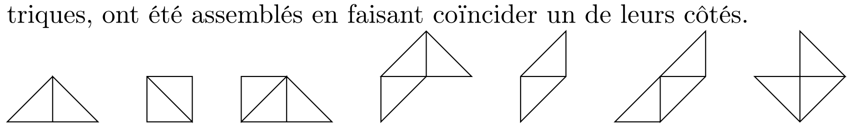
382 e07 D21

Dans le plan, on considère deux cercles de même rayon. Le nombre total de leurs tangentes communes n'est jamais

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4 ;
(E) Égal à aucune des valeurs précédentes.

383 d07 D15

Dans les figures ci-dessous, des triangles rectangles isocèles, tous isométriques, ont été assemblés en faisant coïncider un de leurs côtés.



Combien parmi ces figures ont au moins un axe de symétrie ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

384 d09 D15

En centimètres carrés, que vaut l'aire du triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont un côté de l'angle droit mesure 1 cm ?

(A) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\sqrt{6}$ (E) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

385 d10 D15

Le triangle ABC est rectangle en A. Le point D se trouve sur l'hypoténuse, $|DB| = 30$ et $|DC| = 38$. Le point E se trouve sur $[AC]$ et $|CE| = 34$. Sachant que $|AB| = 32$, calculer $|AE|$.

(A) 24 (B) 25 (C) 26 (D) 27 (E) 28

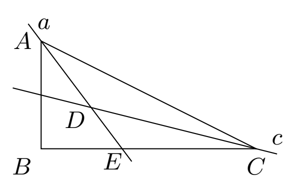
386 e08 D22

La somme des aires de deux carrés vaut 202 et le produit des longueurs de leurs diagonales vaut 198. Quelle est la longueur du côté du plus petit des deux carrés ?

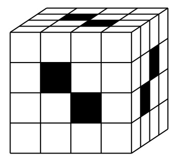
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

387 e10 D22

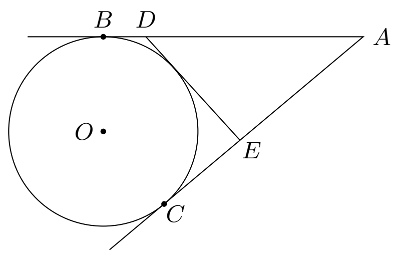
Sans réponse préformulée — Le triangle ABC est rectangle en B. Soit a la bissectrice comprenant A et c la bissectrice comprenant C ; a coupe c en D et BC en E. Quelle est la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{CDE}$?



388 e07 D23 *Sans réponse préformulée* — Ce solide est un grand cube formé de petits cubes et traversé par six tunnels. Chaque tunnel va d'une face du grand cube à la face opposée. Combien de petits cubes composent ce solide ?



389 e08 D24 Les droites AB, AC et DE sont tangentes au cercle de centre O, les points D et E appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, $|AB| = l$ et $|OB| = |OC| = r$. Que vaut le périmètre du triangle ADE ?

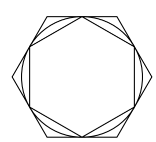


(A) $2l$ (B) $2r + l$ (C) $2l - r$ (D) $3r$
(E) Le périmètre dépend de la position de D sur $[AB]$.

390 e10 D24 Un triangle équilatéral est inscrit à un cercle dont l'aire est de $12\pi\,\text{cm}^2$. Quel est le périmètre du triangle ?

(A) $36/\pi$ cm (B) 6 cm (C) 18 cm (D) 36 cm
(E) Une autre valeur

391 d08 D17 Un hexagone régulier I est inscrit dans un cercle et un hexagone régulier C est circonscrit au même cercle. L'aire de l'hexagone C vaut 420. Que vaut l'aire de l'hexagone I ?



(A) 315 (B) $200\sqrt{3}$ (C) 280 (D) $210\sqrt{3}$ (E) 210

392 e10 D25

Le jardin de Barbara est rectangulaire. Son aire est de $70\,\mathrm{m}^2$ et son périmètre de $38\,\mathrm{m}$. Quelle est, en mètres, la plus grande de ses dimensions ?

(A) 28 (B) 14 (C) 10 (D) 7 (E) 5

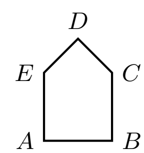
393 d07 D18

Un triangle équilatéral et un hexagone régulier ont le même périmètre. Que vaut le rapport de l'aire du triangle à celle de l'hexagone ?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{2}$

394 e10 D26

Albert et Bernard doivent partager en deux parties de même aire le terrain $ABCDE$ formé d'un carré de 80 mètres de côté prolongé par un triangle rectangle isocèle. Ils décident d'utiliser pour la division une parallèle à AB. À quelle distance de AB cette parallèle doit-elle se trouver ?



(A) 40 m (B) 50 m (C) 52,5 m (D) 55 m (E) 60 m

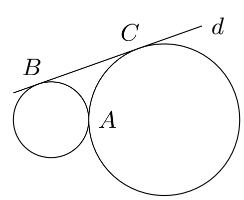
395 d07 D19

Le triangle isocèle ABC est tel que $|AB| = |AC|$ et $|BC| = \sqrt{2}$. Les médianes issues de B et de C sont perpendiculaires. Que vaut l'aire du triangle ABC ?

(A) 1,5 (B) 2 (C) 2,5 (D) 3 (E) 3,5

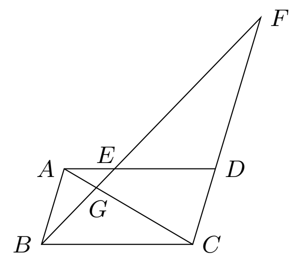
396 d09 D19

Sans réponse préformulée — Deux cercles sont tangents entre eux extérieurement au point A et tangents à la droite d aux points B et C. Leurs rayons sont de 8 cm et 18 cm. Quelle est, en centimètres, la longueur du segment $[BC]$?



397
e08
D27

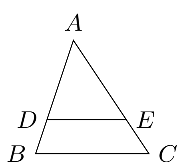
Dans le parallélogramme $ABCD$, une droite issue de B coupe AC en G, AD en E et CD en F. Que vaut $|EF|$ sachant que $|BG| = 4$ et $|GE| = 1$?



(A) $7\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{214}$ (C) 11 (D) 15
(E) Les données sont insuffisantes.

398
e09
D27

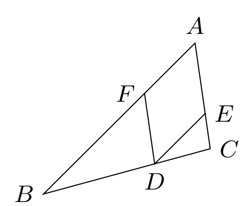
Dans la figure ci-contre, l'aire du triangle ADE vaut la moitié de celle du triangle ABC, la longueur de $[BC]$ est 2 et DE est parallèle à BC. Quelle est la longueur de $[DE]$?



(A) $\sqrt{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (E) $\sqrt{3}$

399
e10
D27

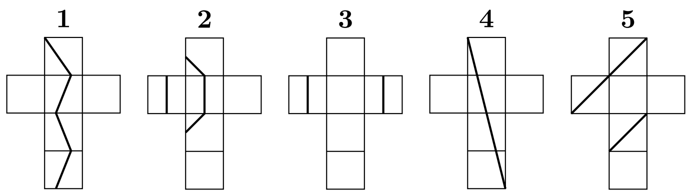
Le losange $AFDE$ est inscrit dans le triangle ABC. (Voir la figure imprécise ci-contre.) Quelle est la longueur de son côté sachant que $|AB| = 15$, $|BC| = 12$, $|AC| = 7$?



(A) $\frac{105}{22}$ (B) $\frac{54}{11}$ (C) $\frac{24}{5}$ (D) $\frac{19}{4}$ (E) 5

400 e07 D28

Un des développements suivants est celui d'un cube C sur lequel a été dessinée l'intersection de C avec un plan. Quel est le numéro de ce développement ?



Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 3 Ⓓ 4 Ⓔ 5

401 e08 D28

Le triangle PQR est équilatéral. Le point A est situé au tiers de $[PQ]$ à partir de P et le point B est situé aux deux tiers de $[PR]$ à partir de P. Quel est le rapport de l'aire du triangle PAB à celle du triangle PQR ?

Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ $\frac{2}{3}$ Ⓒ $\frac{2}{9}$ Ⓓ $\frac{1}{4}$ Ⓔ $\frac{3}{10}$

402 d07 D20

Sans réponse préformulée — Formons le polyèdre dont les sommets sont les milieux des arêtes d'un cube, et dont les arêtes, toutes contenues dans les faces du cube, déterminent sur chacune un polygone convexe. Combien ce polyèdre a-t-il d'arêtes ?

403 d09 D20

Sans réponse préformulée — Sans lever le crayon, je trace sur ma feuille 7 segments de droites. Certains segments se coupent en des points distincts de leurs extrémités. Quel est le nombre maximum de tels points ?

404 d10 D20

Les faces triangulaires d'une pyramide à base carrée sont équilatérales. Une seconde pyramide à base carrée a pour sommets les centres des faces de la première. Quel est le rapport du volume de la grande pyramide à celui de la petite ?

Ⓐ $\frac{27}{2}$ Ⓑ $\frac{27}{4}$ Ⓒ $\frac{9}{2}$ Ⓓ 27 Ⓔ 8

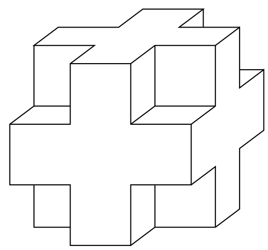
405 e07 D29

La pyramide de Bhlops repose sur une base carrée. Toutes ses arêtes mesurent 20 m. Pour se rendre d'un sommet de la base au sommet opposé, un scarabée se déplace sur les faces triangulaires et parcourt le chemin le plus court. Quelle est, en mètres, la longueur de ce chemin ?

(A) $10\sqrt{2}$ (B) $20\sqrt{2}$ (C) $10\sqrt{3}$ (D) $20\sqrt{3}$ (E) 40

406 e09 D29

Sans réponse préformulée — En chacun des sommets d'un cube, on a enlevé un petit cube de manière à obtenir le solide que voici :



Quel est le nombre total d'arêtes de ce solide ?

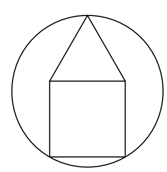
407 e10 D29

Soit S un sommet d'un cube et M, N, P les milieux des trois arêtes issues de ce sommet. La pyramide $SMNP$ est ôtée du cube, puis cette opération est répétée en chaque sommet du cube. Quel est le rapport du volume du solide restant à celui du cube initial ?

(A) $7/8$ (B) $5/6$ (C) $3/4$ (D) $2/3$ (E) $1/2$

408 e08 D30

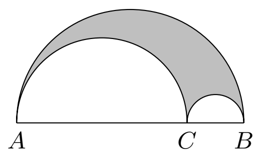
Un carré est surmonté par un triangle équilatéral. Ils ont un côté commun de longueur 10 et sont inscrits dans un cercle de sorte que le carré a deux de ses sommets sur le cercle et que le triangle a un seul de ses sommets sur le cercle. Que vaut le rayon du cercle ?



(A) 10 (B) 9 (C) $3\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{3}$ (E) $5\sqrt{3}$

409 e10 D30

La figure ci-contre est réalisée à l'aide de trois demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[AC]$ et $[CB]$; en outre, $|AC| = 3|BC|$. Sachant que l'aire de la zone grise vaut 12, quelle est l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$?

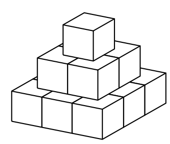


(A) 16 (B) 18 (C) 24 (D) 32 (E) 36

410 d08 D22

Sans réponse préformulée — Dans chaque cube de la pyramide ci-dessous, un nombre entier strictement positif est inscrit en respectant les règles suivantes :

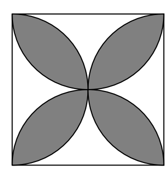
- Les nombres inscrits sont tous différents ;
- Pour chaque cube du deuxième et du troisième étage, le nombre inscrit est la somme des nombres inscrits dans les quatre cubes sur lesquels il repose.



Quel est le plus petit nombre possible inscrit au sommet de la pyramide ?

411 d07 D23

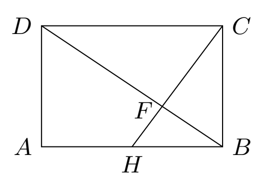
Quatre demi-cercles de rayon 1 admettant pour diamètres les côtés d'un carré déterminent une rosace. Quelle est l'aire de cette rosace ?



(A) $4 - \pi$ (B) $2\pi - 4$ (C) $\pi - 2$ (D) $4 - \frac{\pi}{4}$ (E) 2,28

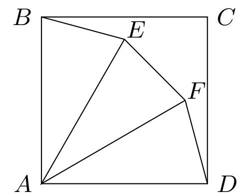
412 d08 D23

Sans réponse préformulée — Dans le rectangle $ABCD$, la droite CH joignant C au milieu H de $[AB]$ coupe la diagonale BD en F. Sachant que $|AB| = 18$, que vaut la distance de F à AD ?



413 d09 D23

Dans le carré $ABCD$ de côté 6, les droites AE et AF partagent l'angle $\widehat{BAD}$ en trois parties de même amplitude. Les segments $[AB]$, $[AE]$ et $[AF]$ ont même longueur. Que vaut le rapport de l'aire du polygone $ABEFD$ à celle du carré $ABCD$?



(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$

414 d07 D24

Sans réponse préformulée — Un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle de centre O. Si $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = 70°$, que vaut, en degrés, l'amplitude de l'angle aigu formé par les droites AB et CD ?

415 d08 D24

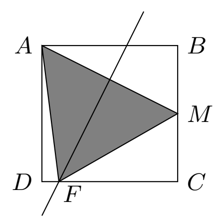
Dans le triangle ABC, les hauteurs issues de B et de C coupent respectivement AC en D et AB en E. Que vaut le périmètre du triangle ABC si $|AB| = 5$ et $|BD| = |CE| = 3$?

(A) 12 (B) 13 (C) $\frac{40}{3}$ (D) $10 + \sqrt{10}$

(E) Il manque une donnée.

416 d09 D24

L'aire du carré $ABCD$ vaut 16. Le milieu de $[BC]$ est le point M et la médiatrice de $[AM]$ coupe CD en F. Que vaut l'aire du triangle AMF ?



(A) 6 (B) $\frac{27}{4}$ (C) 7 (D) $\frac{15}{2}$ (E) 8

417 d07 D25

Un vase cylindrique de hauteur H est rempli à moitié d'eau. Dans le fond du vase, on pose une bougie cylindrique dont le diamètre vaut la moitié de celui de la base du vase et dont la hauteur est double de celle du vase. À quelle hauteur va se situer le nouveau niveau de l'eau ?

(A) $\frac{2}{3}H$ (B) $\frac{3}{4}H$ (C) $\frac{4}{5}H$ (D) H (E) Le vase va déborder.

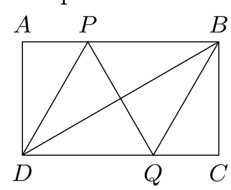
418 d07 D26

Le triangle ABC est rectangle en B, le point D appartient à AC et BD est perpendiculaire à AC. Les longueurs de côtés $[AB]$ et $[BC]$ sont respectivement 8 cm et 15 cm. Quelle est, en centimètres, la longueur de $[BD]$?

(A) 7 (B) $\dfrac{134}{19}$ (C) $\dfrac{127}{18}$ (D) $\dfrac{120}{17}$ (E) $\dfrac{107}{15}$

419 d09 D26

La largeur et la longueur du rectangle $ABCD$ mesurent respectivement 3 et $3\sqrt{3}$. La médiatrice de la diagonale $[BD]$ détermine le quadrilatère $DPBQ$. Que vaut l'aire de ce quadrilatère ?



(A) 9 (B) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (C) $3+3\sqrt{3}$ (D) 10 (E) $6\sqrt{3}$

420 d10 D26

Dans le triangle ABC, $|AB| = |AC|$. Les points P et Q appartiennent respectivement à $[AC]$ et à $[AB]$ et sont tels que $|BP| = |BC| = |PQ| =$ $= |QA|$. Que vaut, en degrés, l'amplitude de $\widehat{BAC}$?

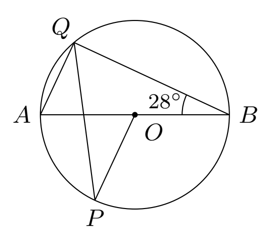
(A) $\dfrac{360}{11}$ (B) $\dfrac{180}{7}$ (C) $\dfrac{51}{5}$ (D) 36 (E) 72

421 d09 D27

Sans réponse préformulée — L'amplitude de chaque angle intérieur d'un polygone régulier est comprise entre 163° et 164°. Combien de côtés possède ce polygone ?

422 d10 D27

Sans réponse préformulée — Dans la figure (imprécise) ci-contre, O est le centre du cercle. Quelle est, en degrés, l'amplitude de $\widehat{AQP}$, sachant que $\widehat{ABQ} = 28°$ et que QA et OP sont parallèles ?



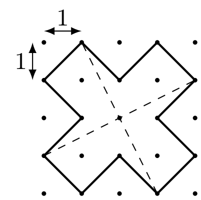
423 d08 D28

Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse vaut 9 et la longueur de la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit vaut 3. Que vaut la somme des longueurs des côtés de l'angle droit ?

A $3\sqrt{15} + 3\sqrt{6}$ **B** 9 **C** $3\sqrt{15}$ **D** $5\sqrt{6}$ **E** 13

424 d09 D28

Le quadrillage ci-dessous est régulier et la distance entre deux points consécutifs (horizontalement ou verticalement) vaut 1. On y a construit une croix dont les sommets sont des points du quadrillage. Cette croix est partagée comme indiqué sur la figure en quatre parties qui seront découpées puis rassemblées pour former un rectangle. Que mesure le plus grand côté de ce rectangle ?



A $2\sqrt{5}$ **B** 2,5 **C** 2,6 **D** $5\sqrt{2}$ **E** $1 + \sqrt{2}$

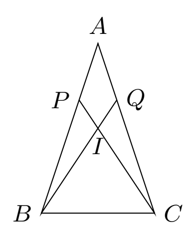
425 d10 D28

Dans le triangle ABC, rectangle en A, soit $a = |BC|$, $b = |AC|$ et $c = = |AB|$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Le cercle de diamètre $[AH]$ coupe AB en P et AC en Q. Quel est le rapport de l'aire du triangle ABC à celle du triangle APQ ?

A $\dfrac{a^4}{b^2 \cdot c^2}$ **B** $\dfrac{a^2}{b \cdot c}$ **C** $\dfrac{a^2}{b^2 + c^2}$ **D** $\dfrac{1 + b \cdot c}{1 - b \cdot c}$ **E** $\dfrac{1}{4}$

426 d08 D29

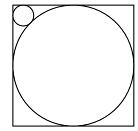
Le triangle ABC est isocèle avec $|AB| = |AC|$. Les points P et Q se trouvent respectivement au tiers de $|AB|$ et au tiers de $|AC|$ à partir de A. Les droites CP et BQ se coupent en I. Quel est le rapport de l'aire du quadrilatère $APIQ$ à celle du triangle ABC ?



A $\dfrac{1}{3}$ **B** $\dfrac{1}{4}$ **C** $\dfrac{1}{5}$ **D** $\dfrac{1}{6}$ **E** $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

427 d09 D29

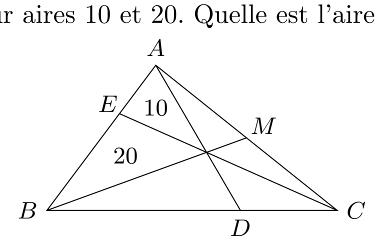
Dans la figure ci-dessous, le grand cercle est inscrit dans le carré, le petit cercle est tangent à deux des côtés du carré et au grand cercle. Que vaut le rapport du rayon du grand cercle à celui du petit cercle ?



(A) 6 (B) $4\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{5}+2$ (D) $3+2\sqrt{2}$ (E) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

428 d07 D30

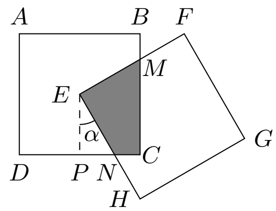
Dans la figure ci-dessous, M est le milieu de $[AC]$ et les droites AD, BM et CE sont concourantes. Deux des petits triangles déterminés par AD, BM et CE ont pour aires 10 et 20. Quelle est l'aire du triangle ABC ?



(A) 60 (B) 75 (C) 85 (D) 90 (E) Il manque des données.

429 d09 D30

Le carré $ABCD$ de centre E et le carré $EFGH$ sont isométriques. La droite EP est perpendiculaire à CD et l'angle $\alpha = \widehat{PEN}$ est tel que $0 < \alpha \leqslant 45°$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?



(A) Le périmètre du quadrilatère $EMCN$ ne dépend pas de α.

(B) Le périmètre de $EMCN$ n'est pas constant et est maximal si $\alpha =$ 30°.

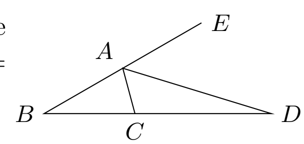
(C) L'aire de $EMCN$ ne dépend pas de α.

(D) L'aire de $EMCN$ n'est pas constante et est maximale si $\alpha = 45°$.

(E) Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

430 d10 D30

Sans réponse préformulée — Dans la figure (imprécise) ci-contre, $\widehat{EAD} = \widehat{CAD}$, $|BA| = |BC| = 8$ et $|AC| = 4$. Que vaut $|CD|$?



431 e08 D04

Depuis que Jean et Marie travaillent dans le même bureau, ils n'ont jamais été absents le même jour. Ainsi, jusqu'à aujourd'hui, il est vrai que

(A) Si Jean est présent, alors Marie est absente ;

(B) Si Jean est présent, alors Marie n'est pas absente ;

(C) Si Jean n'est pas présent, alors Marie est absente ;

(D) Si Jean est absent, alors Marie ne l'est pas ;

(E) Si Marie est présente, alors Jean ne l'est pas.

3.4 Logique

432 d08 D03

Une seule des propositions suivantes est vraie ; laquelle ? ($\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$, &c.)

(A) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a > b \Rightarrow a \cdot b > 0$;

(B) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}_-^*$, $a \geqslant b \Rightarrow a \cdot b \geqslant b^2$;

(C) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}^*$, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$;

(D) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}$, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;

(E) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}$, $a \geqslant b \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2$.

433 e10 D05

La phrase « Tous les chats sont des animaux mignons. » a pour négation logique :

(A) « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal mignon. » ;

(B) « Tous les animaux mignons sont des chats. » ;

(C) « Aucun chat n'est un animal mignon. » ;

(D) « Il existe un animal mignon qui n'est pas un chat. » ;

(E) « Tous les chiens sont des animaux terrifiants. ».

434 d10 D06

La négation logique de la proposition « Si j'améliore mes points de maths, alors mes parents me féliciteront. » est :

(A) « Si j'améliore mes points de maths, alors mes parents ne me féliciteront pas. » ;

(B) « Si je n'améliore pas mes points de maths, alors mes parents ne me féliciteront pas. » ;

(C) « Si je n'améliore pas mes points de maths, alors mes parents me féliciteront. » ;

(D) « J'améliore mes points de maths et mes parents ne me féliciteront pas. » ;

(E) « Je n'améliore pas mes points de maths et mes parents ne me féliciteront pas. ».

435 e07 D09

Dans cet immeuble à appartements, le facteur distribue 21 lettres et il y a 5 boites aux lettres dans le hall. Une chose est sûre :

(A) Chaque boite contiendra au moins 4 lettres ;

(B) Une boite au moins contiendra au moins 5 lettres ;

(C) Chaque boite contiendra au moins 2 lettres ;

(D) Chaque boite contiendra au moins une lettre ;

(E) Une boite au moins restera vide.

436 e09 D11

Dans une rue, André habite à côté de Bernard, Henri en face de Claude, Éric à côté de François, Daniel à côté d'André, François en face de Daniel et à côté de Henri, Gérard à côté d'Éric. Ces huit personnes habitent dans des maisons différentes. Tu peux en déduire que

(A) Claude habite à côté de François ;

(B) Henri habite en face d'André ;

(C) Éric habite en face de Bernard ;

(D) Claude habite à côté de Daniel ;

(E) Gérard habite à côté d'Henri.

437 d09 D13

Les trois médailles (or, argent et bronze) ont été gagnées par Eddy, Fabian et Guy. Selon un spectateur, Fabian a gagné la médaille d'or et Eddy celle d'argent. Selon un autre, c'est Guy qui a obtenu la médaille d'or et Fabian celle d'argent. Dans chacune de ces affirmations, l'attribution d'une médaille est correcte et l'autre est fausse. Dès lors

(A) Guy a obtenu la médaille d'or ;

(B) Fabian a obtenu la médaille d'argent ;

(C) Eddy a obtenu la médaille de bronze ;

(D) Il est impossible de déterminer qui a gagné la médaille de bronze ;

(E) Les informations ne permettent pas de savoir si la médaille d'or a été gagnée par Guy ou par Fabian.

438
d08
D14

Un drapeau rectangulaire est un damier de carrés noirs et de carrés blancs. La longueur du drapeau comprend deux carrés de plus que sa largeur et au total, il y a 17 carrés noirs. Les carrés des quatre coins sont

- (A) 4 blancs ;
- (B) 4 noirs ;
- (C) 3 noirs et 1 blanc ;
- (D) 2 noirs et 2 blancs ;
- (E) 1 noir et 3 blancs.

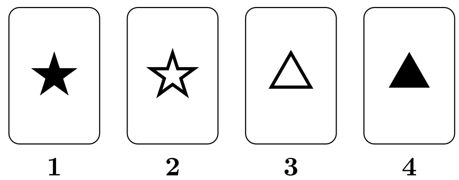
439
e07
D22

Il existe des alphas, des bétas et des gammas. On sait que certains alphas ne sont pas des bétas et qu'aucun béta n'est un gamma. On peut en conclure que

- (A) Certains alphas sont des gammas ;
- (B) Aucun alpha n'est un gamma ;
- (C) Certains gammas sont des alphas ;
- (D) Certains alphas ne sont pas des gammas ;
- (E) Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

440 e07 D24

Claude a dessiné sur chacune des quatre fiches ci-dessous une étoile d'un côté et un triangle de l'autre. Il affirme que si d'un côté l'étoile est noire, alors de l'autre côté, le triangle l'est également. Pour être certain que son affirmation est exacte,



(A) Il faut retourner les quatre fiches ;

(B) Il suffit de retourner les fiches 1 et 2 ;

(C) Il suffit de retourner les fiches 1 et 3 ;

(D) Il suffit de retourner les fiches 1 et 4 ;

(E) Il suffit de retourner la fiche 1.

441 d10 D18

Arthur, Bernard et Claude sont soupçonnés d'un vol. L'enquête a établi que :
• Si Arthur n'est pas coupable, alors Bernard et Claude sont tous deux coupables ;
• Arthur n'est pas coupable ou Bernard est coupable ;
• Bernard n'est pas coupable ou Claude n'est pas coupable.
Qui a commis le vol ?
N.B. : Le « ou » n'est pas exclusif !

(A) Arthur et Bernard

(B) Arthur et lui seul

(C) Bernard et Claude

(D) Claude et lui seul

(E) Les informations ne suffisent pas pour le déterminer.

3.5 Problèmes — Divers

442 d08 D02

L'opération $\star$ est une opération entre deux couleurs dont le résultat est une couleur. Sachant que

$$\begin{aligned}&\text{bleu} \star \text{vert} = \text{vert},\\ &\text{vert} \star \text{bleu} = \text{bleu},\\ &\text{rouge} \star \text{vert} = \text{bleu},\\ &(\text{rouge} \star \text{vert}) \star \text{rouge} = (\text{bleu} \star \text{vert}) \star \text{bleu},\end{aligned}$$

quel est le résultat de : (bleu $\star$ rouge) $\star$ rouge ?

(A) Rouge
(B) Vert
(C) Bleu
(D) Une autre couleur
(E) Impossible à déterminer

443 d08 D05

Sans réponse préformulée — À tour de rôle, 11 personnes (numérotées de 1 à 11) comptent à voix haute à partir de 1, en ajoutant 1 à chaque fois, mais sans citer aucun multiple de 7. Quel est le numéro de la personne qui citera 2008 ?

444 e10 D08

Dans un groupe de 150 adolescents, 98 pratiquent le tennis, 53 font du ski et 39 s'adonnent au ski et au tennis. Combien de ces adolescents ne pratiquent aucun des deux sports ?

(A) 112 (B) 58 (C) 52 (D) 38 (E) 13

445 d07 D07

Sur la totalité d'une surface de 10 km^2, on enlève une couche de terre de 0,30 m d'épaisseur. La terre enlevée est déposée sur une surface circulaire de 400 m de diamètre de façon à y former un cône dont la base est cette surface circulaire. Quelle est, parmi les suivantes, la meilleure valeur approchée de la hauteur de ce cône ?

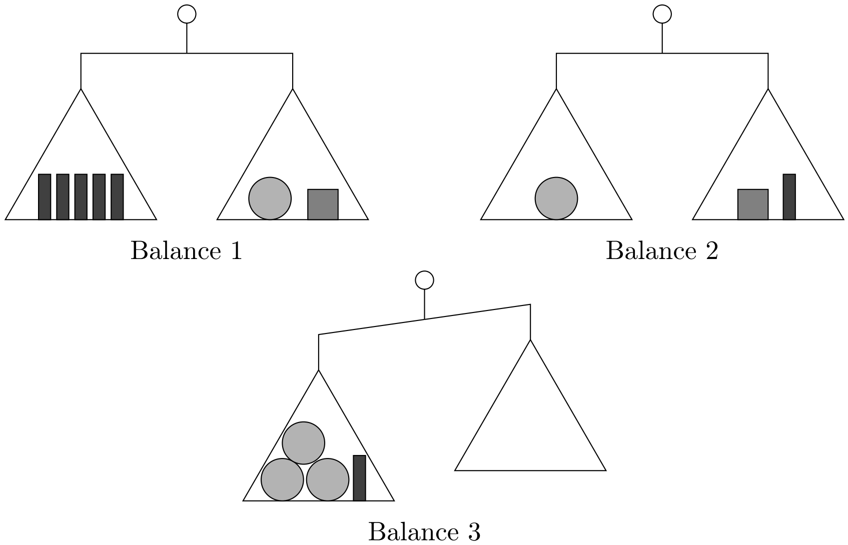
(A) 18 m (B) 45 m (C) 72 m (D) 90 m (E) 144 m

446 e08 D11

Sans réponse préformulée — Dans un club de sport, chaque garçon est ami avec 5 filles et chaque fille est amie avec 8 garçons. Quand une fille est amie avec un garçon, ce garçon est l'ami de cette fille et réciproquement. Combien y a-t-il de filles dans ce club sachant qu'il y a 32 garçons ?

447 e07 D12

Les balances 1 et 2 sont en équilibre. Combien faut-il placer de  sur le plateau de droite de la balance 3 pour équilibrer celle-ci ?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

448 d08 D09

J'achète un crayon qui coûte 68 centimes d'euro. Je paye avec les pièces dont je dispose et le marchand me rend éventuellement la monnaie. Quel est le plus petit nombre de pièces utilisées lors de cet achat ? Rappelons que les différentes pièces sont 2 €, 1 €, 0,50 €, 0,20 €, 0,10 €, 0,05 €, 0,02 € et 0,01 €.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

449 e10 D13

Un enfant a observé dans son jardin des araignées (à 8 pattes) et des hannetons (à 6 pattes), et aucun autre animal. Il a vu 8 bestioles, qui avaient en tout 54 pattes. Quel est le nombre de hannetons observés ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

450 d08 D10

Tous les jours, un cycliste effectue un circuit de 60 km. Le premier jour, il roule à la vitesse de 20 km/h, le deuxième jour, à la vitesse de 15 km/h et le troisième jour, à la vitesse de 12 km/h. Quelle est, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne pour les trois jours ?

(A) 16,66 (B) 16 (C) 15,66 (D) 15 (E) 14,33

451 d10 D10

Sans réponse préformulée — Un test de 30 questions est coté de la manière suivante : une bonne réponse rapporte 7 points, une abstention vaut 0 et une mauvaise réponse coute 3 points. Un élève, qui a répondu à toutes les questions, obtient un total de 0. Quel est le nombre de ses bonnes réponses ?

452 e10 D15

Dans une entreprise, le rapport du nombre d'hommes au nombre de femmes est de 0,76. Quelques années plus tard, alors que le nombre total d'employés n'a pas changé, le nombre de femmes a augmenté de 10 %. Que vaut alors le rapport du nombre d'hommes au nombre de femmes ?

(A) 0,58 (B) 0,6 (C) 0,66 (D) 0,684 (E) 0,86

453 e07 D16

Sans réponse préformulée — Un camion chargé part de Abourg et au même instant un autre camion vide part de Béville. Ces deux camions roulent sur la même route et se croisent 26 minutes après leur départ. Jusque là, la vitesse du premier camion a été de 50 km/h et celle du second de 70 km/h. Quelle est, en kilomètres, la distance qui sépare Abourg et Béville ?

454 e08 D16

Cet après-midi, les deux aiguilles de ma montre indiquent 3 h 10. Si elle fonctionne normalement jusqu'à ce soir à 7 h 40, à combien de reprises les deux aiguilles se seront-elles superposées ?

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 5

455
e09
D17

Au marché, j'ai acheté un certain nombre de machins à 4 € pièce et un truc à 10 €. Le prix moyen de tous les articles que j'ai acquis est un nombre entier d'euros. Quel est le nombre maximum de machins que j'ai pu acheter ?

(A) 0 (B) 2 (C) 5 (D) Une infinité
(E) Il n'y a pas de maximum.

456
e08
D18

Un petit avion doit atterrir à l'aéroport à 10 h. S'il vole en moyenne à la vitesse de 150 km/h, il arrive à l'aéroport une heure trop tôt. S'il vole en moyenne à la vitesse de 100 km/h, il arrive à l'aéroport une heure trop tard. À quelle vitesse, exprimée en km/h, doit-il voler pour arriver exactement à 10 h ?

(A) 115 (B) 120 (C) 125 (D) 130 (E) 135

457
d09
D14

Sans réponse préformulée — Monsieur Mathy demande au fleuriste de lui confectionner trois bouquets de même prix, l'un de roses rouges, le second de roses blanches et le troisième de roses jaunes. Il souhaite les plus grands bouquets pour un budget maximal de 150 €. Le prix d'une rose est de 1,75 €, 1,50 € ou 1,40 € selon qu'elle est rouge, blanche ou jaune. Combien y aura-t-il de fleurs dans le bouquet de roses rouges ?

458
d07
D29

Un train reliant deux villes et partant toujours à la même heure arrive à destination avec 10 minutes de retard lorsqu'il roule à la vitesse de 80 km/h et avec 16 minutes de retard lorsqu'il roule à la vitesse de 60 km/h. Quelle est, en kilomètres, la distance entre les deux villes ?

(A) 1440 (B) 144 (C) 100 (D) 64 (E) 24

459
d10
D16

Sans réponse préformulée — Je roule à vélomoteur, à vitesse constante, sur une route bordée de bornes kilométriques. Je viens de passer devant une borne indiquant un nombre de kilomètres à deux chiffres. Une heure plus tard, je passe devant une autre borne qui porte les deux mêmes chiffres dans l'ordre inverse. Encore une heure plus tard, je lis sur une troisième borne les deux mêmes chiffres que sur la première, dans le même ordre, mais avec un zéro intercalé. Quelle est ma vitesse, en kilomètres par heure ?

460 e08 D23

On sait que toutes les années multiples de 4 sont bissextiles à l'exception de celles qui sont multiples de 100 mais non multiples de 400. Combien d'années bissextiles sont prévues entre l'an 2008 et l'an 4000 inclus ?

(A) 479 (B) 483 (C) 484 (D) 499 (E) 500

461 e08 D26

Dix-neuf joueurs, numérotés de 1 à 19, sont assis autour d'une table ronde dans l'ordre de leurs numéros. On dispose de 2008 cartes que l'on distribue par paquets de cinq en respectant l'ordre des joueurs. Ainsi le joueur n° 1 reçoit le 1er paquet, le joueur n° 19 le 19^{e} paquet, puis à nouveau le joueur n° 1 reçoit le 20^{e} paquet et ainsi de suite. Quel est le numéro du dernier joueur à recevoir un paquet complet ?

(A) 2 (B) 3 (C) 7 (D) 15 (E) 18

462 d10 D19

Des collègues dinent ensemble pour fêter le départ à la retraite de deux d'entre eux. Le prix total du repas est de 400 €. Les deux retraités étant invités, chacun des autres paye 10 € de plus que si tous avaient payé. Quel est le nombre total de convives ?

(A) 140 (B) 40 (C) 12 (D) 10 (E) 8

463 e08 D29

Jean doit transporter cinq objets dont les masses en kg sont des nombres entiers distincts et dont la masse totale vaut 30 kg. Malheureusement, son sac ne peut supporter qu'une masse maximale de 21 kg. Jean peut transporter n'importe quelle combinaison de trois objets dans son sac, mais son chargement devient trop lourd dès qu'il en ajoute un quatrième. Quelle est la masse de l'objet le plus léger ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

464 d08 D21

Mon voisin et moi avons tous deux acheté un nouvel écran où le rapport de la largeur à la hauteur est 16/9. La diagonale de mon écran a 10 cm de plus que celle de l'écran de mon voisin. En centimètres carrés, quelle est la différence de superficie de nos deux écrans ?

(A) 10 (B) $\frac{337}{226}$ (C) $\frac{160^2}{337}$ (D) 100

(E) Impossible à déterminer, il manque une donnée.

465 e09 D30

En pharmacie, il existe de l'alcool à différentes concentrations. Par exemple, l'alcool à 60° est composé de 60 % d'alcool pur et de 40 % d'eau. On réalise un mélange de $\frac{3}{5}$ de litre d'alcool à 90° et $\frac{1}{5}$ de litre d'alcool à 50°. Quelle est, en degrés, la concentration en alcool du mélange obtenu ?

(A) 60 (B) 64 (C) 65 (D) 75 (E) 80

466 d07 D28

Le club de football est situé à 300 m d'une route rectiligne. Le club de basket est situé au bord de cette route et à 500 m à vol d'oiseau du club de football. On veut construire, au bord de la route, une buvette à distance égale des deux clubs. Que vaudra, en mètres, cette distance ?

(A) 250 (B) 276,25 (C) 300 (D) 312,5 (E) 334,25

3.6 Combinatoire & probabilités

467 e07 D04

Des mouchoirs bleus sont disponibles en quantité illimitée, de même que des jaunes, des rouges et des verts. Combien, au minimum, faut-il placer de ces mouchoirs dans un tiroir pour être certain que le tiroir contienne au moins trois mouchoirs ayant la même couleur ?

(A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 13
(E) Une telle valeur n'existe pas.

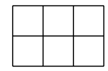
468 e08 D06

Dans un restaurant sont proposés 4 entrées, 5 plats et 3 desserts. Un menu comprend une entrée, un plat et un dessert dans cet ordre. Combien existe-t-il alors de menus ?

(A) 3 (B) 12 (C) 18 (D) 30 (E) 60

469 d10 D07

La grille 3×2 ci-contre compte 12 sommets. Notons $n(x, y)$ le nombre de sommets d'une grille $x \times y$. L'une des affirmations suivantes est correcte quels que soient les naturels x et y. Laquelle ?



(A) $n(x, 3y) = 3n(x, y)$
(B) $n(3x, 3y) = 3n(x, y)$
(C) $n(3x, 3y) = 6n(x, y)$
(D) $n(3x, 3y) = 9n(x, y)$
(E) $n(3x, 3y) < 9n(x, y)$

470 e10 D10

Dans un jeu de 52 cartes, de combien de manières peut-on former une « main » de 3 cartes qui soient toutes des valets ?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 13 (E) 156

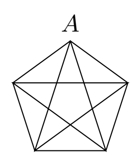
471 d07 D11

Quel est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes d'un cube de sorte que chaque arête soit entièrement peinte dans une de ces couleurs et que les arêtes issues d'un même sommet reçoivent des couleurs différentes ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 12

472 d08 D12

On a tracé toutes les diagonales du pentagone régulier représenté ci-contre. Dans cette figure, combien y a-t-il de triangles de sommet A ?



(A) 6 (B) 10 (C) 13 (D) 15 (E) 18

473 d09 D12

Sans réponse préformulée — On appelle « 2-3-code » un code composé de deux lettres suivies de trois chiffres. Par exemple, ZE117 et ZZ999 sont des 2-3-codes. Combien existe-t-il de dizaines de 2-3-codes qui commencent par L, ne contiennent ni J, ni W, ni chiffres pairs et ne se terminent ni par 5, ni par 9 ?

474 e10 D19

Un enfant dispose d'un « squelette » de cube en fil de fer. Il décide de tendre une ficelle entre les milieux de chaque paire d'arêtes parallèles. Combien de morceaux de ficelle placera-t-il ?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18 (E) 21

475 e10 D23

Sans réponse préformulée — Pour mon voyage en Italie, l'agence propose une formule *Combiné trois villes*, ce qui signifie que je peux choisir trois villes parmi les cinq suivantes : Florence, Milan, Naples, Rome, Venise, et choisir l'ordre dans lequel je visite ces villes. Combien de circuits sont possibles ?

476 d09 D18

Sans réponse préformulée — On appelle *octet* une suite de huit chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01011100 ou 00000111 sont des octets. Combien existe-t-il d'octets contenant au moins 4 fois le chiffre 0 ?

477 e09 D28

Mon tiroir contient 8 chaussettes rouges et 2 chaussettes jaunes. Je retire une chaussette au hasard et c'est une jaune. Je retire à nouveau une chaussette au hasard, combien de chances ai-je d'obtenir la paire jaune complète ?

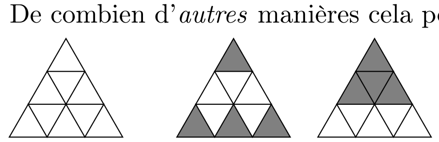
(A) Une chance sur 4
(B) Une chance sur 5
(C) Une chance sur 8
(D) Une chance sur 9
(E) Une chance sur 10

478 d07 D21

Sans réponse préformulée — Un train est formé de cinq wagons numérotés de 1 à 5. Combien existe-t-il de dispositions de ces cinq wagons si le wagon 2 doit être avant le wagon 3, le 1 avant le 2 et le 4 avant le 3 ?

479 e07 D30

Dans le triangle équilatéral représenté ci-dessous, voici deux manières d'ombrer quatre petits triangles en sorte que la figure garde son axe de symétrie vertical. De combien d'*autres* manières cela peut-il se réaliser ?



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

480 d10 D24 *Sans réponse préformulée* — La surface d'un ballon de football est composée de pentagones réguliers noirs et d'hexagones réguliers blancs. Chaque pentagone est entouré de 5 hexagones ; chaque hexagone est entouré d'autant de pentagones que d'hexagones. Le ballon compte en tout 12 polygones noirs. Combien compte-t-il de polygones blancs ?

3.7 Table des réponses

D	07		08		09		10	
	e	d	e	d	e	d	e	d
1	C	4	C	D	B	C	E	B
2	B	A	D	C	D	90	C	504
3	D	20	A	D	D	C	120	750
4	B	B	D	252	E	B	E	D
5	E	15	13	6	256	C	A	B
6	D	D	E	0	C	314	B	D
7	D	C	C	A	B	A	A	E
8	D	D	72	B	B	6	D	54
9	B	B	C	B	E	A	A	495
10	C	0	B	D	C	B	C	9
11	B	A	20	D	D	828	D	A
12	E	96	D	D	D	180	A	C
13	A	4	48	E	E	A	D	6
14	D	B	D	A	D	24	E	C
15	B	C	D	B	90	B	B	C
16	52	E	E	E	C	C	B	45
17	168	36	D	A	C	16	D	D
18	671	D	B	1	B	163	E	A
19	C	A	A	9	C	24	D	D
20	C	24	E	9	D	15	180	A
21	A	15	C	E	D	1	D	C
22	E	17	C	62	C	C	45	E
23	44	B	C	12	22	A	60	77
24	C	40	A	D	A	D	C	20
25	D	A	B	1	E	E	B	383
26	D	D	A	21	D	E	B	B
27	C	D	D	40	A	22	A	31
28	B	D	C	C	D	A	B	A
29	D	63	D	D	84	D	B	E
30	D	B	A	2	E	C	D	8

Chapitre 4

Éliminatoires et demi-finales maXi

4.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

X	07		08		09		10	
	e	d	e	d	e	d	e	d
1	677	694	481	666	482	657	483	484
2	485	573	667	659	486	487	658	488
3	489	493	660	574	661	575	490	494
4	491	498	492	499	695	500	678	577
5	495	504	576	669	496	580	497	505
6	668	681	578	581	679	582	501	508
7	579	586	502	662	503	509	680	670
8	696	590	506	672	507	514	697	663
9	698	518	583	519	584	682	585	592
10	587	521	510	595	511	702	588	596
11	671	599	512	685	589	664	513	600
12	515	603	516	604	517	686	591	605
13	699	610	700	525	683	611	684	526
14	701	528	593	615	520	616	594	617
15	522	687	597	622	598	623	703	531
16	601	534	523	535	602	689	673	536
17	704	541	606	626	607	627	608	542
18	609	711	674	712	524	544	705	545
19	612	630	613	631	527	549	614	550
20	618	553	529	636	619	637	706	554
21	530	715	620	557	707	639	621	665
22	624	562	532	640	533	641	688	563
23	708	642	537	643	538	644	539	564
24	709	645	540	646	675	716	625	717
25	710	647	628	565	629	648	543	692
26	546	566	547	567	548	568	713	718
27	632	719	690	569	633	676	634	649
28	691	650	551	651	552	652	635	570
29	555	653	638	571	714	654	556	572
30	558	655	559	720	560	656	561	693

4.2 Arithmétique & algèbre

481 e08 X01

Pour tous réels non nuls a, b, l'opération $\star$ est définie par $a \star b = -\dfrac{a}{b} + b$. Que vaut $(10 \star 5) \star 3$?

(A) 0 (B) 2 (C) $-\dfrac{5}{2}$ (D) $\dfrac{16}{3}$ (E) $-\dfrac{37}{6}$

482 e09 X01

$9 + 19 + 29 + \cdots + 2009 =$

(A) 204 809
(B) 202 809
(C) 202 800
(D) 200 809
(E) 201 800

483 e10 X01

Lequel de ces nombres admet un nombre impair de diviseurs positifs ?

(A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 48 (E) 49

484 d10 X01

Sans réponse préformulée — Un carré a un périmètre de 120 cm ; quelle est son aire, en centimètres carrés ?

485 e07 X02

$(-1)^{1-2+3-4+5-\cdots+2007} =$

(A) -2007 (B) -1 (C) 1004 (D) 1 (E) 2007

486 e09 X02

Si $2a^{2b} = 8$, que vaut $3a^{4b}$?

(A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 42 (E) 48

487 d09 X02

Dans un village où vivent 1 600 familles, 3 % d'entre elles possèdent un seul lecteur DVD. Parmi les autres familles, une moitié possède exactement deux lecteurs DVD et l'autre moitié n'en possède aucun. Combien y a-t-il de lecteurs DVD dans ce village ?

(A) 824 (B) 1 552 (C) 1 600 (D) 1 648 (E) 3 152

488 d10 X02

Sans réponse préformulée — Quand on ajoute 7 au naturel non nul n, on obtient un nombre multiple de 7 ; quand on ajoute 8 à n, on obtient un nombre multiple de 8 ; quand on ajoute 9 à n, on obtient un nombre multiple de 9. Quelle est la plus petite valeur possible de n ?

489 e07 X03

Les nombres réels x et y sont tels que $x - y > x$ et $x + y < y$. On a certainement

- **A** $x < y < 0$;
- **B** $x < 0$ et $y > 0$;
- **C** $y < x < 0$;
- **D** $x > y > 0$;
- **E** $x < 0$ et $y < 0$.

490 e10 X03

Trois nombres distincts sont choisis parmi -9, -8, -7, -6, 2, 3, 4, 5. Les deux premiers sont multipliés entre eux, puis le troisième est soustrait du produit. Quel est le plus petit résultat possible ?

A -49 **B** -48 **C** -45 **D** -19 **E** 1

491 e07 X04

Pascal pense à trois nombres entiers. En additionnant ces nombres deux à deux, il obtient les sommes 38, 44 et 52. Quel est le plus petit des trois nombres ?

A 13 **B** 15 **C** 21 **D** 23 **E** 29

492 e08 X04

Les trois nombres naturels a, b et c sont consécutifs et tels que $a < b < c$.

- **A** Leur produit est toujours strictement inférieur à b^3.
- **B** Leur produit est toujours égal à b^3.
- **C** Leur produit est toujours strictement supérieur à b^3.
- **D** Leur produit est toujours égal à $3a + 3$.
- **E** Aucune des propositions précédentes n'est valable.

493 d07 X03

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit naturel qui, divisé par 6, donne un reste égal à 1, et, divisé par 11, donne un reste égal à 6 ?

494 d10 X04

Sur la droite joignant les points de coordonnées $(6,12)$ et $(0,-6)$ se trouve aussi le point de coordonnées :

(A) $(-3,-8)$; (B) $(-1,-4)$; (C) $(2,\frac{1}{2})$; (D) $(3,3)$; (E) $(7,14)$.

495 e07 X05

Le nombre naturel n tel que $2007 = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$

(A) Vaut 1004 ;
(B) Vaut 87 ;
(C) Vaut 63 ;
(D) Vaut 64 ;
(E) N'existe pas.

496 e09 X05

Quel est le chiffre des unités du nombre $2^{2009} \cdot 3^{2009} \cdot 6^{2009}$?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

497 e10 X05

Un professeur augmente de 2 points la note de chacun de ses 26 élèves. La moyenne de la classe

(A) Augmente de 52 points ;
(B) Reste inchangée ;
(C) Augmente de 2 points ;
(D) Augmente de 2/26 point ;
(E) Diminue de 2 points.

498 d07 X04

Pour tous réels non nuls a, b, on a $a \star b = b^{-a}$. Que vaut $(1 \star 3) \star 8$?

(A) 1 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) -2

499 d08 X04

Le nombre $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} \times \dfrac{5}{6} \times \dfrac{8}{7} \times \dfrac{9}{10} \times \dfrac{12}{11} \times \cdots \times \dfrac{2008}{2007}$ est

(A) Égal à 0 ;
(B) Strictement compris entre 0 et 1 ;
(C) Égal à 1 ;
(D) Strictement supérieur à 1 ;
(E) Infini.

500 d09 X04

Sans réponse préformulée — On appelle nombres premiers jumeaux deux nombres premiers dont la différence vaut 2, par exemple 3 et 5, 11 et 13. Combien existe-t-il de paires de nombres premiers jumeaux inférieurs à 100 ?

501 e10 X06

Dans une école de 1000 élèves, il y a 550 filles. Le repas chaud de midi est fréquenté par 30 % des filles et par 40 % des garçons. Quelle est la proportion de l'ensemble des élèves qui prennent un repas chaud ?

(A) 30 % (B) 34,5 % (C) 35 % (D) 35,5 % (E) 40 %

502 e08 X07

Quel est le reste par défaut de la division de $2^{13} \cdot 7^{11} - 3$ par 14 ?

(A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9 (E) 11

503 e09 X07

Que vaut $\dfrac{x + x^{-1/2}}{x^{1/3}}$ pour $x = 64$?

(A) 2 (B) 17 (C) $\dfrac{513}{32}$ (D) $\dfrac{32}{513}$ (E) 18

504 d07 X05

Le baril de pétrole coûtait 60 dollars il y a un mois. Depuis, ce prix a augmenté de 20 % alors que la valeur du dollar a chuté de 20 % par rapport à l'euro. Pendant le mois dernier, le prix en euros du baril

(A) A baissé de 40 % ;
(B) A baissé de 4 % ;
(C) Est inchangé ;
(D) A augmenté de 4 % ;
(E) A augmenté de 44 %.

505 d10 X05

Sans réponse préformulée — Un nombre de 6 chiffres de la forme $\overline{133ab5}$ est divisible par 7 et par 9. Quelle est la plus grande valeur possible pour le nombre $\overline{ab}$?

506 e08 X08

Dans la somme $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \cdots + n$, chaque terme vaut le précédent augmenté de 4. Quel est le nombre total de termes sachant que cette somme vaut 1540 ?

(A) 23 (B) 28 (C) 32 (D) 55 (E) 56

507 e09 X08

Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de couples (x, y) de nombres entiers tels que $x^2 \leqslant 49$ et $0 < y^3 \leqslant 216$?

508 d10 X06

Que vaut $\dfrac{x+y}{x-y}$ si $0 < y < x$ et $x^2 + y^2 = 6xy$?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) Une autre valeur

509 d09 X07

Sans réponse préformulée — Le nombre entier k est différent de 1 et de -1. Pour quelle valeur entière de a l'égalité

$$\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} - \frac{(1+k)^2}{(1-k)^2} = \frac{-ak(1+k^2)}{(1-k^2)^2}$$

est-elle correcte ?

510 e08 X10

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit nombre naturel possédant exactement 10 diviseurs naturels ?

511 e09 X10

Si $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[4]{3}$ et $c = \sqrt[12]{6}$, alors

(A) $a < b < c$;

(B) $a < c < b$;

(C) $b < a < c$;

(D) $c < a < b$;

(E) $c < b < a$.

512 e08 X11

Dans une assemblée, 60 % sont des femmes. Une femme sur trois est sportive et un homme sur deux est sportif. Parmi les sportifs de cette assemblée, quelle est, exprimée en %, la proportion de femmes ?

(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 55

513 e10 X11

Si les solutions de l'équation $x^2 + px + q = 0$, d'inconnue réelle x, sont -1 et 3, alors

(A) $p = 2$ et $q = -3$;

(B) $p = -2$ et $q = -3$;

(C) $p = 2$ et $q = 3$;

(D) $p = 3$ et $q = -2$;

(E) $p = -3$ et $q = -2$.

514 d09 X08

Quel est le plus grand des nombres suivants ?

(A) $50^{1/24}$ (B) $20^{1/16}$ (C) $10^{1/12}$ (D) $5^{1/8}$ (E) $2^{1/6}$

515 e07 X12

Quel est le nombre de couples d'entiers strictement positifs (x, y) solutions de l'équation $3x + 5y = 501$?

(A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

516 e08 X12

Pour combien de valeurs entières de n la fraction $\dfrac{n+3}{n+1}$ est-elle entière ?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) Une infinité

517 e09 X12

Si $a + b = p$ et $ab = q$, alors $a^3 + b^3 + a^2b^2 =$

(A) $p^3 + q^2 - pq$; (D) $p^3 - q^3$;

(B) $p^3 + q^2 + 3pq$; (E) $p^3 + q^2 - 3pq$.

(C) $p^3 + q^3$;

518 d07 X09

Sans réponse préformulée — Parmi les propositions suivantes, combien sont correctes ?

$(\forall\, x, y \in \mathbf{R})\ x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$;

$(\forall\, x, y \in \mathbf{R})\ x \cdot y = 0 \Leftarrow x = 0$;

$(\forall\, x, y \in \mathbf{R})\ x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$;

$(\forall\, x, y \in \mathbf{R})\ x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$;

$(\forall\, x, y \in \mathbf{R})\ x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.

519 d08 X09

Une fraction est strictement supérieure à $\dfrac{5}{9}$ et strictement inférieure à $\dfrac{4}{7}$. Ses deux termes sont des entiers dont la différence vaut 16. Quelle est cette fraction ?

(A) $\dfrac{13}{29}$ (B) $\dfrac{17}{33}$ (C) $\dfrac{19}{35}$ (D) $\dfrac{21}{37}$ (E) $\dfrac{29}{45}$

520 e09 X14

Sans réponse préformulée — Une suite de sept nombres forme une progression arithmétique. La somme de ces sept nombres vaut 224 et la somme des deux derniers vaut 379. Que vaut la différence du cinquième et du deuxième terme de cette suite ?

521 d07 X10

Sans réponse préformulée — Une feuille de papier rectangulaire a un périmètre de 108 cm. Je la plie en deux dans un sens, en quatre dans l'autre et j'obtiens ainsi un carré. Quel est, en centimètres, le périmètre de ce carré ?

522 e07 X15

Sans réponse préformulée — Pour tout nombre naturel non nul n, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Quelle est la somme des diviseurs premiers de $20!$?

523 e08 X16

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de solutions réelles distinctes de l'équation $(x^2-1)^{2008} \cdot (x^2-3x+2) \cdot (x^2-4x+4)^4 = 0$?

524 e09 X18

Si $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, alors $\dfrac{747!}{746!+745!}$ vaut

(A) $\dfrac{747}{746}$; (B) $\dfrac{1}{3}$; (C) 746 ; (D) $\dfrac{744}{3}$; (E) 744.

525 d08 X13

La formule $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'}$ utilisée au cours d'optique s'écrit aussi

(A) $d = f - d'$;
(B) $d = \dfrac{f-d'}{fd'}$;
(C) $d = \dfrac{1}{f-d'}$;
(D) $d = \dfrac{d'-f}{fd'}$;
(E) $d = \dfrac{fd'}{d'-f}$.

526 d10 X13

Combien de couples (x, y) d'entiers vérifient l'équation $\sqrt{x} - \sqrt{17} = \sqrt{y}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 17 (E) Une infinité

527 e09 X19

Les nombres entiers a, b, c sont tels que $(a-2009)(b-2009)(c-2009) = 1$. Quelle est la plus petite valeur que peut prendre l'expression $a + b + c$?

(A) 1 (B) 6024 (C) 6026 (D) 6028 (E) 6030

528
d07
X14

On sait que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$. Pour tout entier n supérieur à 2007, le nombre de nombres premiers strictement supérieurs à $(n!+1)$ et strictement inférieurs à $(n!+n)$ vaut

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{n}{2}$ (D) $n-2$ (E) n^2

529
e08
X20

Pour réussir cet examen, il faut obtenir une note d'au moins 50 sur 100. La moyenne de ceux qui ont réussi est de 65 sur 100, la moyenne de ceux qui ont échoué est de 35 sur 100 et la moyenne de tous les participants est de 53 sur 100. Quel est le pourcentage d'élèves qui ont réussi ?

(A) 66,6 % (B) 60 % (C) 48 % (D) 45 % (E) 20 %

530
e07
X21

L'erreur sur la mesure du côté d'un carré est au plus de 10 % ; dans ce cas, l'erreur sur l'aire du carré est au plus de

(A) 5 % ; (B) 10 % ; (C) 19 % ; (D) 20 % ; (E) 21 %.

531
d10
X15

Combien de réels existe-t-il dont les racines carrée et cubique sont égales ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

532
e08
X22

$(2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 2008^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 2007^2) =$

(A) $2\,017\,036$ (B) $1\,015^2$ (C) $\frac{1}{5} \cdot 4\,015^2$ (D) $2 \cdot 10^6$

(E) Aucune des valeurs précédentes

533
e09
X22

Le polynôme p est tel que $p(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 1$ et $p(-2009) = -41$. Que vaut $p(2009)$?

(A) 43 (B) 42 (C) 41 (D) 40 (E) -40

534 d07 X16

Alex et Bernard courent à vitesse constante, mais Bernard court x fois plus vite qu'Alex ($x > 1$). Bernard donne à Alex une avance de y mètres. Au signal, ils s'élancent tous deux dans la même direction. Combien de mètres Bernard doit-il parcourir pour rattraper Alex ?

(A) $\dfrac{xy}{x-1}$ (B) xy (C) $\dfrac{y}{x-1}$ (D) $\dfrac{1}{xy}$

(E) Les données sont insuffisantes pour le dire.

535 d08 X16

Sans réponse préformulée — Les nombres naturels a, b, c, d, e sont, dans cet ordre, consécutifs et leur produit vaut 55 440. Que vaut c ?

536 d10 X16

Si a est un entier, $36^{\sqrt{9a^2}} =$

(A) 6^{3a} ; (B) $6^{3|a|}$; (C) 36^{3a} ; (D) $36^{|3a|}$; (E) 6^{9a^2}.

537 e08 X23

Sans réponse préformulée — Trois nombres naturels sont tels qu'en les considérant deux à deux, leurs plus petits communs multiples valent 126, 140 et 180. Que vaut le plus grand des trois nombres ?

538 e09 X23

Si $a^\star = \left(1 - a^{-1}\right)^{-1}$, que vaut $\left(\left((a^\star)^\star\right)^\star\right)^\star$?

(A) $-a$ (B) $\dfrac{-a^2}{3a+1}$ (C) a (D) 0 (E) $-4-a$

539 e10 X23

Paul s'est marié le samedi 6 janvier 2007 et a offert, ce jour-là, un bouquet de 12 fleurs à son épouse. Depuis, il lui offre un nouveau bouquet chaque samedi, en augmentant chaque fois de 3 le nombre de fleurs. Combien a-t-il offert de fleurs à son épouse en 2007 ? (Il y a eu 52 samedis cette année-là.)

(A) 168 (B) 624 (C) 1872 (D) 4602 (E) 4770

540
e08
X24

Parmi les relations suivantes, une seule est correcte pour tous x, y réels. Laquelle ?

(A) $\sqrt{x^2} = x$
(B) $|x+y| = |x| + |y|$
(C) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
(D) $(x+y)^{2008} = x^{2008} + y^{2008}$
(E) $\sqrt{x^2+y^2} = |x| + |y|$

541
d07
X17

Deux des racines du polynôme $x^3 + bx^2 + cx + d$ sont 3 et 5. Laquelle des expressions suivantes donne toujours une autre racine ?

(A) $\frac{b}{8}$ (B) $\frac{b}{15}$ (C) $-8-b$ (D) $8+b$
(E) Aucune de ces expressions

542
d10
X17

Sans réponse préformulée — Voici le début d'un tableau triangulaire de nombres, qui comporte 2010 lignes :

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ 1 & -1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ & \dots & & \end{array}$$

Quelle est la somme des chiffres de la somme de tous les nombres de ce tableau ?

543
e10
X25

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de naturels inférieurs à 2010 dont l'écriture décimale contient exactement trois chiffres identiques ?

544
d09
X18

Sans réponse préformulée — Quelle est la solution de l'équation

$$\frac{\sqrt{5u+8}+\sqrt{5u-8}}{\sqrt{5u+8}-\sqrt{5u-8}} = 2,$$

d'inconnue réelle u ?

545
d10
X18

$(\cos 15° + \sin 15°)^2 - 3\cos 15° \sin 15° =$

(A) 0 (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) 1

546 e07 X26

$\sqrt{9-2\sqrt{14}} =$

(A) $3-\sqrt{2}\sqrt[4]{14}$
(B) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{7}-2\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$
(E) $\sqrt{2}-\sqrt{7}$

547 e08 X26

$$\left(\frac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{3}\right)^{2008} \cdot \left(\frac{\sqrt{11}+\sqrt{2}}{3}\right)^{2008} =$$

(A) 1 (B) 3^{2008} (C) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2008}$ (D) 2008

(E) Aucune des réponses précédentes.

548 e09 X26

Les nombres réels non nuls a, b et c sont tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 6$ et $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc} = 2$. Que vaut $\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}$?

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 12 (D) $\frac{1}{12}$

(E) Cela dépend des valeurs de a, b, c.

549 d09 X19

Quel est le nombre de solutions de l'équation $\left(\sqrt{x}\right)^3 = 3\sqrt{x}$ d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

550 d10 X19

Sans réponse préformulée — Quel est le coefficient de a^8b^2 dans le développement de $(a+b)^{10}$?

551 e08 X28

Combien de couples d'entiers (x, y) vérifient l'équation $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \sqrt{3}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 9 (E) Une infinité

552 e09 X28

Si $|xy^2| = |x^2y|$ avec $x < 0$ et $y > 0$, laquelle des affirmations suivantes est *fausse* ?

(A) $x^2y > 0$

(B) $x + y = 0$

(C) $xy < 0$

(D) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 0$

(E) $\dfrac{x}{y} + 1 = 0$

553 d07 X20

Une balle lâchée verticalement à 1 m du sol rebondit au tiers de cette hauteur, puis à nouveau au tiers de la hauteur qu'elle vient d'atteindre et ainsi de suite. Après combien de rebonds aura-t-elle parcouru au moins 2 m ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) Jamais.

554 d10 X20

Sans réponse préformulée — Que vaut x si $\sqrt[6]{8} + \sqrt[3]{x} = \dfrac{7}{3 - \sqrt{2}}$?

555 e07 X29

Si $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$, alors

(A) $x^2 - x - 1 = 0$;

(B) $x^2 + x - 1 = 0$;

(C) $x^2 - x + 1 = 0$;

(D) $x^2 + x + 1 = 0$;

(E) $x^2 - 1 = 0$.

556 e10 X29

Dans la suite géométrique $(x, 2x + 2, 3x + 3, \ldots)$, le quatrième terme est non nul. Que vaut-il ?

(A) $4x + 4$ (B) $6x + 6$ (C) 12 (D) $3/2$ (E) $-27/2$

557 d08 X21

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$?

558 e07 X30

Les trois solutions de l'équation $64x^3 - 144x^2 + 92x - 15 = 0$ forment une progression arithmétique. Que vaut la différence entre la plus grande et la plus petite des trois solutions ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) 2 (E) $\frac{5}{4}$

559 e08 X30

Pour combien d'entiers n l'expression $n^4 + 4n^3 - 3n^2 + 4n + 1$ est-elle un nombre premier ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Une infinité

560 e09 X30

Quel est le reste de la division par 7 du nombre $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2009^3$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 6

561 e10 X30

Soit p un nombre premier impair. Combien de couples (x, y) d'entiers vérifient $x^2 - y^2 = p^2$?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) p (E) Une infinité

562 d07 X22

Sans réponse préformulée — Les nombres naturels non nuls sont écrits en tableau de la manière suivante :

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
2 & 3 & & & & \\
4 & 5 & 6 & & & \\
7 & 8 & 9 & 10 & & \\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \\
16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\
22 & 23 & \cdots & \cdots & & \quad \ddots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

La ligne n° 6 comporte le nombre 19. Quel est le numéro de la ligne comportant 2007 ?

563 d10 X22

Pour combien de naturels n l'expression $n^4 + n^2 + 1$ est-elle un nombre premier ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) Une infinité

564 d10 X23

Sans réponse préformulée — Pour combien de valeurs entières de n la fraction $\dfrac{n^2+5n+6}{n^2+3n+2}$ est-elle entière ?

565 d08 X25

Sans réponse préformulée — Soient m et n des nombres naturels non nuls. Une des égalités suivantes est vérifiée par m et n :

$$\sqrt{m+n} = \sqrt{m} + \sqrt{n}, \qquad m+n = \frac{m}{n},$$
$$m-n = m \cdot n, \qquad m+n = m-n,$$
$$m-n = \frac{m}{n}.$$

Que vaut $m+n$?

566 d07 X26

Sans réponse préformulée — On a interrogé 100 élèves à la sortie de leur école : 78 possèdent une TV, 88 une radio et 70 un enregistreur. Combien d'entre eux, au minimum, ont les trois appareils ?

567 d08 X26

Le nombre naturel N possède n facteurs premiers distincts. De combien de manières peut-on décomposer N en un produit de deux facteurs a, b premiers entre eux et tels que $1 < a < b$?

A $2n-1$ **B** $(n-1)^2$ **C** n^{n-1} **D** 2^n **E** $2^{n-1}-1$

568 d09 X26

Quel est le nombre de solutions de l'équation

$$\Big|1+x-\big|x-|1-x|\big|\Big| = \big|-x-|x-1|\big|$$

où l'inconnue x est réelle ?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

569 d08 X27

Sans réponse préformulée — Les nombres réels a, b, c sont strictement positifs et tels que

$$\begin{cases} a^2-c^2 = ac-3a \\ c^2-b^2 = bc-3b \\ b^2-9^2 = ab-bc. \end{cases}$$

Le nombre b est entier. Que vaut-il ?

570 d10 X28

Soit a, b et c trois réels non nuls. Si p et q sont les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$, d'inconnue réelle x, quelle est la valeur de $\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}$?

(A) $\dfrac{1}{b^2-4ac}$ **(B)** $\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ **(C)** $\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$ **(D)** $\dfrac{b^2-4ac}{c^2}$ **(E)** b^2-4ac

571 d08 X29

Sans réponse préformulée — Déterminer le nombre de couples (m,n) d'entiers positifs solutions de l'équation $3\cdot 2^m+1=n^2$.

572 d10 X29

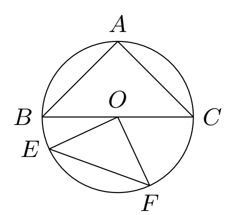
Quel est le nombre de solutions de l'équation $3\times 2^m+3=n^2$, d'inconnue $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** Un nombre fini >2 **(E)** Une infinité

4.3 Géométrie

573 d07 X02

Dans le cercle de centre O, le triangle isocèle BAC est rectangle en A et le triangle EOF est rectangle en O. Quel est le rapport de l'aire de BAC à celle de EOF ?



(A) $\sqrt{2}-1$ **(B)** 1,5 **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 2 **(E)** $\sqrt{2}+1$

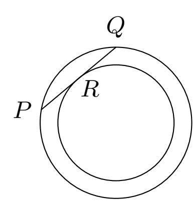
574 d08 X03

Que vaut, en radians, la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe à 2008 côtés ?

(A) 1003π **(B)** 1004π **(C)** 2006π **(D)** 2007π **(E)** 2008π

575 d09 X03

Sans réponse préformulée — Une piste de course a la forme d'une couronne circulaire. Le grand cercle admet une corde $[PQ]$ de longueur 20 mètres tangente en R au petit cercle. Que vaut, en mètres carrés, l'aire de la piste arrondie à l'unité la plus proche ?



576 e08 X05

Une diagonale d'un polygone est une droite joignant deux sommets non consécutifs. Quel polygone convexe possède exactement 20 diagonales ?

- **(A)** Le carré ;
- **(B)** Le pentagone ;
- **(C)** L'hexagone ;
- **(D)** L'octogone ;
- **(E)** Le dodécagone.

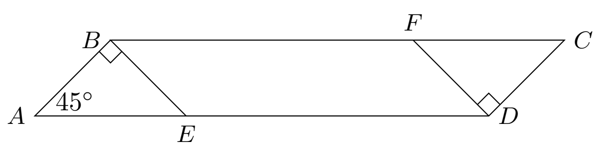
577 d10 X04

Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle. Quel est le rapport de la longueur d'un de ses côtés à celle de l'arc qu'il sous-tend ?

(A) $\frac{3}{\pi}$ **(B)** $\frac{6}{\pi}$ **(C)** $\frac{3}{2\pi}$ **(D)** $\frac{2}{3\pi}$ **(E)** $\frac{1}{6}$

578 e08 X06

Dans le parallélogramme $ABCD$ représenté ci-dessous, $|AB| = \sqrt{2}$, $|AD| = 10$, l'amplitude de l'angle $\widehat{A}$ vaut 45° et les droites BE et DF sont perpendiculaires à AB. Quelle est la distance entre les droites BE et DF ?



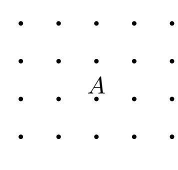
(A) $\sqrt{2}$ **(B)** 5,6 **(C)** $4\sqrt{2}$ **(D)** $10 - 2\sqrt{2}$ **(E)** 8

579 e07 X07

Sans réponse préformulée — La grande base d'un trapèze non aplati mesure 100, la petite base mesure 40, un des côtés obliques mesure 50 et le quatrième côté a pour mesure un nombre naturel. Combien existe-t-il de tels nombres ?

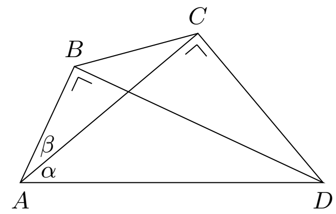
580 d09 X05

Sans réponse préformulée — Le point A est le centre du quadrillage régulier représenté entièrement ci-contre. Quel est le nombre de carrés dont les sommets se trouvent parmi les 25 sommets de ce quadrillage et qui admettent A comme centre de symétrie ?



581 d08 X06

Sans réponse préformulée — Dans le quadrilatère $ABCD$, chacune des diagonales est perpendiculaire à un côté, $|AB| = |BC|$, $\alpha = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \widehat{CAB} = \frac{\pi}{n}$. Que vaut n ?



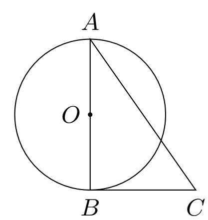
582 d09 X06

Deux sphères distinctes de rayon r sont sécantes, non tangentes. Dans quel intervalle varie la longueur de leur cercle d'intersection ?

(A) $]\,0; 2\pi r\,[$
(B) $[\,0; 2\pi r\,]$
(C) $]\,0; \pi r\,[$
(D) $]\,\pi r; 2\pi r\,[$
(E) $\left]\dfrac{-\pi r}{2}; \dfrac{\pi r}{2}\right[$

583 e08 X09

Le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O et la droite BC est tangente au cercle en B. Que vaut l'aire du cercle sachant que $|AC| = 12$ et $|BC| = 8$?



(A) 12π (B) $8\sqrt{3}\pi$ (C) 16π (D) 20π (E) 80π

584 e09 X09

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est de longueur h et un côté de l'angle droit est de longueur c. Sachant que la différence entre h et c vaut 1, quelle est la longueur de l'autre côté de l'angle droit ?

(A) $h - c$
(B) $\sqrt{h - c}$
(C) $\sqrt{h + c}$
(D) $\sqrt{h^2 + c^2}$
(E) $\dfrac{1}{h} + \dfrac{1}{c}$

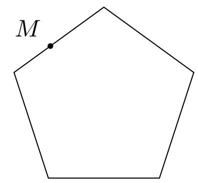
585 e10 X09

Quel est le nombre de solutions de l'équation $\cos^5 x + \sin^5 x = 2$, d'inconnue $x \in\,]-\pi; \pi\,]$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 5

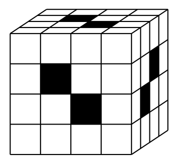
586
d07
X07

Sans réponse préformulée — Partant du point M, une mouche avance le long des côtés d'un pentagone régulier jusqu'à revenir exactement à son point de départ. À chaque sommet, elle tourne au plus court pour passer d'un côté au suivant. À la fin de son périple, quelle est, en degrés, la somme des amplitudes des angles des rotations qu'elle a effectuées ?



587
e07
X10

Sans réponse préformulée — Ce solide est un grand cube formé de petits cubes et traversé par six tunnels. Chaque tunnel va d'une face du grand cube à la face opposée. Combien de petits cubes composent ce solide ?



588
e10
X10

Dans un repère orthonormé, le triangle dont les sommets ont pour coordonnées $(0, -1)$, $(-3, 2)$ et $(3, 2)$ est

- **A** Équilatéral ;
- **B** Isocèle non rectangle ;
- **C** Rectangle non isocèle ;
- **D** Rectangle et isocèle ;
- **E** Ni rectangle ni isocèle.

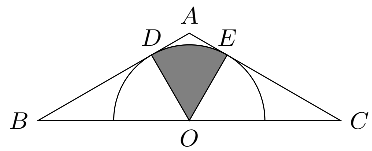
589
e09
X11

Un professeur veut montrer à ses élèves que certains sommets d'un cube sont les sommets de triangles équilatéraux. Pour cela, dans son cube de 30 cm de côté, il relie ces sommets par des fils de couleurs différentes pour chacun de ces triangles. En centimètres, quelle longueur de fil lui sera nécessaire pour délimiter tous les triangles équilatéraux possibles ?

A 24 **B** $24\sqrt{2}$ **C** $240\sqrt{2}$ **D** $720\sqrt{2}$ **E** $720\sqrt{3}$

590 d07 X08

Le triangle isocèle ABC est tel que $|BC| = 12$, $|AB| = |AC|$ et $\widehat{BAC} = 120°$. Le demi-cercle de centre O, milieu de $[BC]$, est tangent à AB en D et à AC en E. Que vaut l'aire du secteur circulaire d'angle $\widehat{DOE}$?



(A) $\frac{9\pi}{4}$ (B) 2π (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$ (E) $\pi\sqrt{3}$

591 e10 X12

Les aires de trois des faces d'un parallélépipède rectangle valent 24, 32 et 48 centimètres carrés. Quel est le volume de ce parallélépipède ?

(A) $128\,\text{cm}^3$ (B) $192\,\text{cm}^3$ (C) $384\,\text{cm}^3$ (D) $1024\,\text{cm}^3$ (E) $36\,864\,\text{cm}^3$

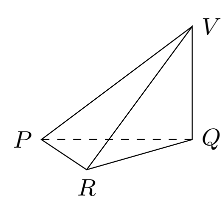
592 d10 X09

Les faces triangulaires d'une pyramide à base carrée sont équilatérales. Une seconde pyramide à base carrée a pour sommets les centres des faces de la première. Quel est le rapport du volume de la grande pyramide à celui de la petite ?

(A) $\frac{27}{2}$ (B) $\frac{27}{4}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) 27 (E) 8

593 e08 X14

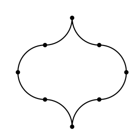
Dans le tétraèdre $VPQR$, la droite VQ est perpendiculaire au plan PQR, $\widehat{PQR} = 60°$, $|VP| = |VR| = 10$ et $|VQ| = 8$. Que vaut la longueur de $[PR]$?



(A) 6 (B) $6\sqrt{2}$ (C) 9 (D) 10 (E) $8\sqrt{3}$

594 e10 X14

Dans la figure ci-contre, une partie du plan est délimitée par huit quarts de cercle de même rayon R. Quelle est son aire ?



(A) $(\pi + 4)R^2$ (B) $2(\pi + 1)R^2$ (C) $6R^2$ (D) $2\pi R^2$ (E) $8R^2$

595 d08 X10

Le périmètre d'un secteur circulaire est égal à 12. Pour quelle valeur du rayon du cercle l'aire de ce secteur est-elle maximale ?

(A) 1,5 (B) 2 (C) 2,5 (D) 3 (E) 3,5

596 d10 X10

Dans le triangle ABC, $|AB| = |AC|$. Les points P et Q appartiennent respectivement à $[AC]$ et à $[AB]$ et sont tels que $|BP| = |BC| = |PQ| = = |QA|$. Que vaut, en degrés, l'amplitude de $\widehat{BAC}$?

(A) $\frac{360}{11}$ (B) $\frac{180}{7}$ (C) $\frac{51}{5}$ (D) 36 (E) 72

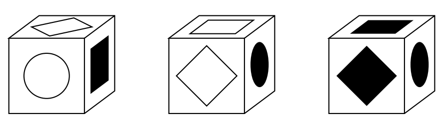
597 e08 X15

Si $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{5}{4}$, que vaut $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$?

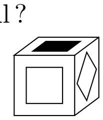
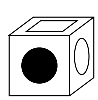
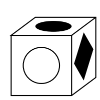
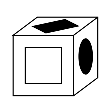
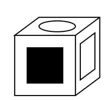
(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{5}{16}$ (D) $\frac{9}{32}$ (E) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

598 e09 X15

Paul a collé des étiquettes sur un dé à six faces. Voici trois vues de ce dé.

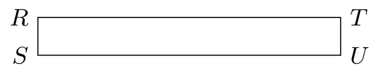


Parmi les cinq vues suivantes, laquelle représente également le dé de Paul ?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

599 d07 X11

La bande de papier représentée ci-dessous est incurvée dans l'espace de sorte que le point T se confonde avec le point S et le point U avec le point R, le segment $[TU]$ s'appliquant sur le segment $[SR]$. Cette opération s'effecture sans déchirure ni autre superposition de points.



La surface obtenue

(A) A deux faces ;

(B) Contient une droite ;

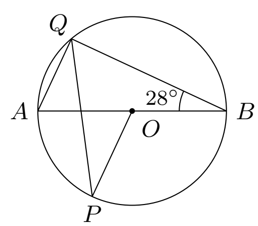
(C) A un seul bord ;

(D) Enclôt une région de l'espace ;

(E) N'admet aucune des propriétés précédentes.

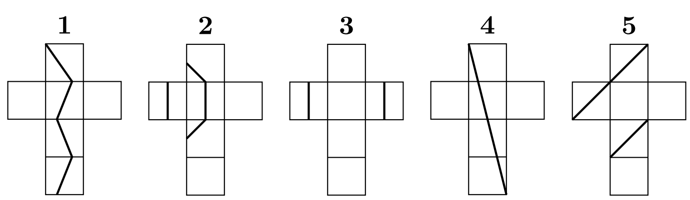
600 d10 X11

Sans réponse préformulée — Dans la figure (imprécise) ci-contre, O est le centre du cercle. Quelle est, en degrés, l'amplitude de $\widehat{AQP}$, sachant que $\widehat{ABQ} = 28°$ et que QA et OP sont parallèles ?



601 e07 X16

Un des développements suivants est celui d'un cube C sur lequel a été dessinée l'intersection de C avec un plan. Quel est le numéro de ce développement ?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

602 e09 X16

La Terre étant assimilée à une sphère dont l'équateur mesure 40 000 km, que vaut la longueur, en kilomètres, du parallèle de 60° de latitude Nord ?

(A) 10 000
(B) 20 000
(C) $10\,000\sqrt{2}$
(D) $10\,000\sqrt{3}$
(E) $10\,000\pi$

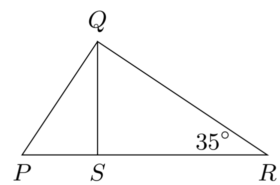
603 d07 X12

Le triangle isocèle ABC est tel que $|AB| = |AC|$ et $|BC| = \sqrt{2}$. Les médianes issues de B et de C sont perpendiculaires. Que vaut l'aire du triangle ABC ?

(A) 1,5 (B) 2 (C) 2,5 (D) 3 (E) 3,5

604 d08 X12

Le triangle PQR est rectangle en Q, $|QR| = 5$, $[QS]$ est la hauteur abaissée sur l'hypoténuse et $\widehat{PRQ} = 35°$. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle qui *n'est pas* égale à $|PS|$?



(A) $5 \operatorname{tg} 35° \cos 55°$
(B) $5 \sin 35° \operatorname{tg} 35°$
(C) $\dfrac{5}{\cos 35°} - 5\cos 35°$
(D) $\dfrac{5}{\operatorname{tg} 55°} \cos 55°$
(E) $5 \operatorname{tg} 35° \cos 35°$

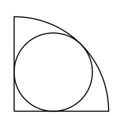
605 d10 X12

Dans le triangle ABC, rectangle en A, soit $a = |BC|$, $b = |AC|$ et $c = |AB|$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Le cercle de diamètre $[AH]$ coupe AB en P et AC en Q. Quel est le rapport de l'aire du triangle ABC à celle du triangle APQ ?

(A) $\dfrac{a^4}{b^2 \cdot c^2}$ (B) $\dfrac{a^2}{b \cdot c}$ (C) $\dfrac{a^2}{b^2 + c^2}$ (D) $\dfrac{1 + b \cdot c}{1 - b \cdot c}$ (E) $\dfrac{1}{4}$

606 e08 X17

Dans un quart de cercle de rayon 1, on inscrit un cercle comme indiqué par la figure. Que vaut le rayon du cercle inscrit ?



(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$ (E) $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{6}$

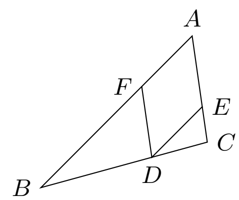
607 e09 X17

La longueur des côtés de l'hexagone régulier $ABCDEF$ vaut 1. À l'intérieur de cet hexagone, on construit le carré $ABMN$. Quelle est la distance séparant les droites MN et DE ?

(A) $\sqrt{3}-1$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) 2

608 e10 X17

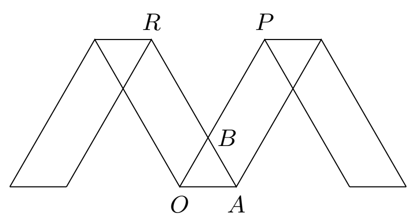
Le losange $AFDE$ est inscrit dans le triangle ABC. (Voir la figure imprécise ci-contre.) Quelle est la longueur de son côté sachant que $|AB| = 15$, $|BC| = 12$, $|AC| = 7$?



(A) $\frac{105}{22}$ (B) $\frac{54}{11}$ (C) $\frac{24}{5}$ (D) $\frac{19}{4}$ (E) 5

609 e07 X18

Quatre parallélogrammes isométriques forment la lettre "M". Les droites OA et RP sont parallèles. Dans le repère (O, A, B), les coordonnées de P sont (0,3). Quelles sont les coordonnées de R ?



(A) $(-2, 3)$ (B) $(-3, -3)$ (C) $(-3, 3)$ (D) $(3, -3)$ (E) $(3, -2)$

610 d07 X13

Sans réponse préformulée — Une salle de bal de plan rectangulaire mesure 30 m sur 90 m. Un danseur tourne sur lui-même et examine la salle en regardant horizontalement. De combien de points de cette salle peut-il voir chacun des deux petits côtés de la salle sous le même angle de 46° ?

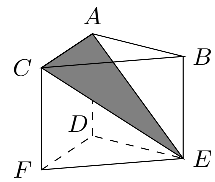
611 d09 X13

Soient un pentagone régulier $ABCDE$ et un cercle de centre O. Ce cercle est tangent en A au côté $[AB]$ et tangent en D au côté $[CD]$ du pentagone. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{AOD}$?

(A) 108 (B) 144 (C) 153 (D) 172 (E) 198

612 e07 X19

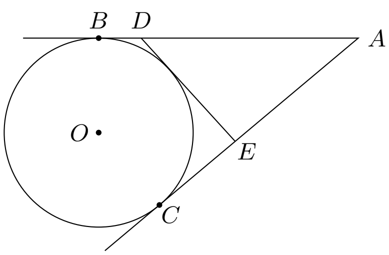
Le prisme droit ci-contre a pour base le triangle ABC rectangle en A. Quelle est la distance du point B au plan ACE, sachant que $|AB| = |AD| = 4$ et $|AC| = 3$?



(A) 4 (B) 5 (C) $20\sqrt{41}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

613 e08 X19

Les droites AB, AC et DE sont tangentes au cercle de centre O, les points D et E appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, $|AB| = l$ et $|OB| = |OC| = r$. Que vaut le périmètre du triangle ADE ?

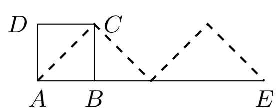


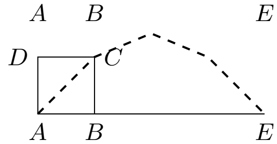
(A) $2l$ (B) $2r + l$ (C) $2l - r$ (D) $3r$

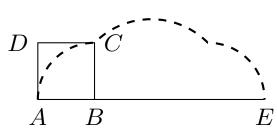
(E) Le périmètre dépend de la position de D sur $[AB]$.

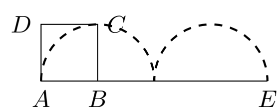
614 e10 X19

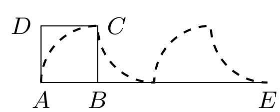
Le carré $ABCD$ roule sans glisser sur la droite AB. La trajectoire du point A est indiquée par le trait interrompu. Quelle est la figure correcte ?

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


615 d08 X14

Sans réponse préformulée — Le triangle PQR est équilatéral. Les points S et T appartiennent respectivement à $[QR]$ et $[PR]$ et I est le point d'intersection de PS et QT. Que vaut, en degrés, l'angle $\widehat{SIT}$ si $\widehat{QPS} = \widehat{RQT}$?

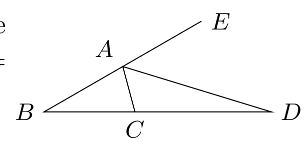
616 d09 X14

Que vaut le rayon de la plus grande sphère contenue dans un cône droit dont le rayon de la base est de longueur r et dont la hauteur mesure $\frac{4r}{3}$?

(A) $\dfrac{r}{2}$ (B) $\dfrac{2r}{3}$ (C) $\dfrac{3r}{2}$ (D) $r\sqrt{3}$ (E) $\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$

617 d10 X14

Sans réponse préformulée — Dans la figure (imprécise) ci-contre, $\widehat{EAD} = \widehat{CAD}$, $|BA| = |BC| = 8$ et $|AC| = 4$. Que vaut $|CD|$?



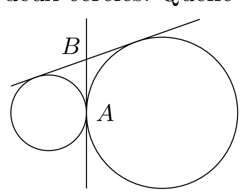
618 e07 X20

La pyramide de Bhlops repose sur une base carrée. Toutes ses arêtes mesurent 20 m. Pour se rendre d'un sommet de la base au sommet opposé, un scarabée se déplace sur les faces triangulaires et parcourt le chemin le plus court. Quelle est, en mètres, la longueur de ce chemin ?

(A) $10\sqrt{2}$ (B) $20\sqrt{2}$ (C) $10\sqrt{3}$ (D) $20\sqrt{3}$ (E) 40

619 e09 X20

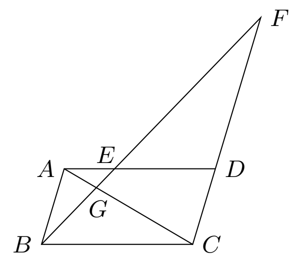
Deux cercles de rayons 1 et 2 sont tangents extérieurement au point A. Le point B est à l'intersection d'une tangente extérieure et de la tangente intérieure communes aux deux cercles. Quelle est la longueur de $[AB]$?



(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{3}$ (E) 1,6

620 e08 X21

Dans le parallélogramme $ABCD$, une droite issue de B coupe AC en G, AD en E et CD en F. Que vaut $|EF|$ sachant que $|BG| = 4$ et $|GE| = 1$?



(A) $7\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{214}$ (C) 11 (D) 15

(E) Les données sont insuffisantes.

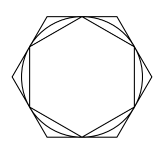
621 e10 X21

Soit $ABCD$ un parallélogramme, P le point de $[AB]$ situé au quart à partir de A et Q le milieu de $[BC]$. La droite PQ coupe AD en E et DC en F. Quel est le rapport de l'aire du triangle DEF à celle du parallélogramme ?

(A) 25/24 (B) 49/48 (C) 1 (D) 48/49 (E) 24/25

622 d08 X15

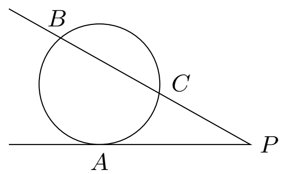
Un hexagone régulier I est inscrit dans un cercle et un hexagone régulier C est circonscrit au même cercle. L'aire de l'hexagone C vaut 420. Que vaut l'aire de l'hexagone I ?



(A) 315 (B) $200\sqrt{3}$ (C) 280 (D) $210\sqrt{3}$ (E) 210

623 d09 X15

D'un point P extérieur à un cercle, on mène une droite tangente au cercle en A et une droite sécante au cercle en B et C. Sachant que $|PA| = 6$ et $|PB| = 9$, que vaut $|BC|$?

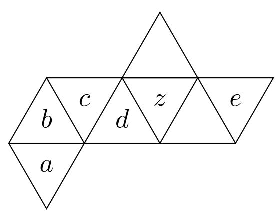


A $2\sqrt{6}$ **B** 5 **C** $\dfrac{16}{3}$ **D** 6

E Les données sont insuffisantes pour répondre.

624 e07 X22

Voici le développement d'un octaèdre.

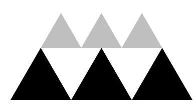


Quelle est la face opposée à la face z ?

A a **B** b **C** c **D** d **E** e

625 e10 X24

Sans réponse préformulée — Dans la figure ci-contre, tous les triangles sont équilatéraux. L'aire de la zone grise est 36. Quelle est celle de la zone noire ?



626 d08 X17

Sans réponse préformulée — Des pentagones réguliers sont disposés côte à côte de façon que deux pentagones voisins aient une arête commune et que leurs centres soient disposés sur un cercle. Ils forment ainsi un anneau fermé. Quel est le nombre de pentagones ?

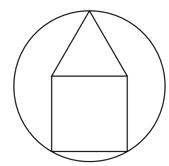
627 d09 X17

Soit E un point intérieur au rectangle $ABCD$ et soient a, b, c, d les distances respectives du point E aux sommets A, B, C, D du rectangle. La valeur de d est

(A) $a+b-c$
(B) $a-b+c$
(C) $b+c-a$
(D) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$
(E) $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$

628 e08 X25

Un carré est surmonté par un triangle équilatéral. Ils ont un côté commun de longueur 10 et sont inscrits dans un cercle de sorte que le carré a deux de ses sommets sur le cercle et que le triangle a un seul de ses sommets sur le cercle. Que vaut le rayon du cercle ?



(A) 10 (B) 9 (C) $3\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{3}$ (E) $5\sqrt{3}$

629 e09 X25

Deux droites parallèles découpent des segments de 20 cm et 15 cm sur deux droites perpendiculaires. Quelle est, en centimètres, la distance des deux droites parallèles ?

(A) $6\sqrt{5}$ (B) $5\sqrt{6}$ (C) 12 (D) 15
(E) Cela dépend des positions relatives des quatre droites.

630 d07 X19

Un vase cylindrique de hauteur H est rempli à moitié d'eau. Dans le fond du vase, on pose une bougie cylindrique dont le diamètre vaut la moitié de celui de la base du vase et dont la hauteur est double de celle du vase. À quelle hauteur va se situer le nouveau niveau de l'eau ?

(A) $\frac{2}{3}H$ (B) $\frac{3}{4}H$ (C) $\frac{4}{5}H$ (D) H (E) Le vase va déborder.

631 d08 X19

En chaque sommet d'un tétraèdre régulier de côté 3, on découpe une pyramide de façon que la surface de la découpe soit un triangle équilatéral. Les quatre triangles équilatéraux ainsi obtenus ont tous des dimensions différentes. Quelle est la longueur totale des arêtes du solide ainsi tronqué ?

(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 21
(E) Il est impossible de la calculer.

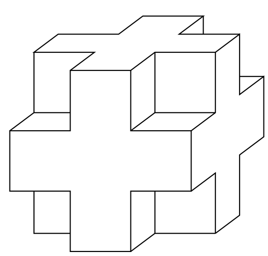
632 e07 X27

Sachant que x est un réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et que tg $x = a$, que vaut $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$?

(A) $\sqrt{1+a^2}$
(B) $\dfrac{-1}{\sqrt{1+a^2}}$
(C) $\dfrac{-a}{\sqrt{1+a^2}}$
(D) $\dfrac{-\sqrt{1+a^2}}{a}$
(E) $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

633 e09 X27

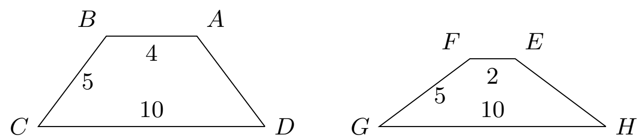
Sans réponse préformulée — En chacun des sommets d'un cube, on a enlevé un petit cube de manière à obtenir le solide que voici :



Quel est le nombre total d'arêtes de ce solide ?

634 e10 X27

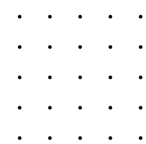
Les deux trapèzes $ABCD$ et $EFGH$ sont isocèles. Que vaut le rapport de l'aire du premier à celle du second ?



(A) 2 (B) 7/4 (C) 14/9 (D) 3/2 (E) 8/5

635 e10 X28

Sans réponse préformulée — Le quadrillage régulier ci-contre comprend 25 points. La distance de deux points voisins, horizontalement ou verticalement, est toujours 1. Combien de valeurs distinctes prend la distance de deux points différents parmi ces 25 ?



636 d08 X20

Dans le plan muni d'un repère (O, x, y), le premier quadrant est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x > 0$ et $y > 0$ et il est dit fermé lorsque $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. On définit de même les deuxième, troisième et quatrième quadrants par $x < 0$ et $y > 0$, $x < 0$ et $y < 0$, $x > 0$ et $y < 0$. Dans $\mathbf{R}^2$, l'ensemble des solutions de l'équation $|xy| = xy$ est

(A) $\mathbf{R}^2$;

(B) Le 1$^{\text{er}}$ et le 3$^{\text{e}}$ quadrants fermés ;

(C) Le 1$^{\text{er}}$ quadrant fermé et le 3$^{\text{e}}$ quadrant ;

(D) Le 1$^{\text{er}}$ quadrant ;

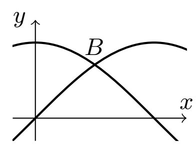
(E) Le 1$^{\text{er}}$ quadrant et le 3$^{\text{e}}$ quadrant fermé.

637 d09 X20

Dans un repère orthonormé, la droite d'équation $y = 5x$ coupe la parabole d'équation $y = x^2$ en A. La perpendiculaire à OA en O coupe la parabole en B. Que vaut l'aire du triangle AOB ?

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{17}{8}$ (E) $\frac{13}{5}$

638 e08 X29 Le graphique ci-dessous représente les fonctions définies par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.



L'abscisse du point B vérifie l'équation

- **A** $\sin x + \cos x = 0$;
- **B** $\sin x + \cos x = \dfrac{\pi}{4}$;
- **C** $\sin x \cdot \cos x = 1$;
- **D** $\sin x + \cos x = \dfrac{\pi}{2}$;
- **E** $\operatorname{tg} x = 1$.

639 d09 X21 *Sans réponse préformulée* — Soit E l'ensemble des réels x pour lesquels les deux membres de l'égalité

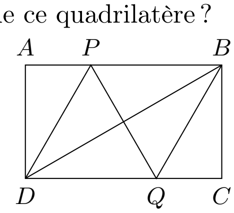
$$\operatorname{ctg} 8x - \operatorname{ctg} 27x = \frac{\sin kx}{\sin 8x \cdot \sin 27x}$$

sont définis. Si cette égalité est vérifiée pour tout x appartenant à E, que vaut k ?

640 d08 X22 Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse vaut 9 et la longueur de la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit vaut 3. Que vaut la somme des longueurs des côtés de l'angle droit ?

A $3\sqrt{15} + 3\sqrt{6}$ **B** 9 **C** $3\sqrt{15}$ **D** $5\sqrt{6}$ **E** 13

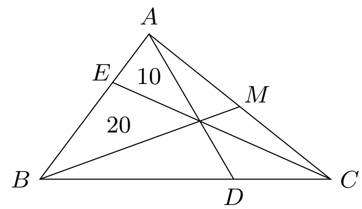
641 d09 X22 La largeur et la longueur du rectangle $ABCD$ mesurent respectivement 3 et $3\sqrt{3}$. La médiatrice de la diagonale $[BD]$ détermine le quadrilatère $DPBQ$. Que vaut l'aire de ce quadrilatère ?



A 9 **B** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ **C** $3 + 3\sqrt{3}$ **D** 10 **E** $6\sqrt{3}$

642 d07 X23

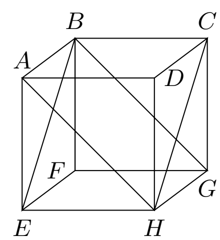
Dans la figure ci-dessous, M est le milieu de $[AC]$ et les droites AD, BM et CE sont concourantes. Deux des petits triangles déterminés par AD, BM et CE ont pour aires 10 et 20. Quelle est l'aire du triangle ABC ?



(A) 60 (B) 75 (C) 85 (D) 90 (E) Il manque des données.

643 d08 X23

Sans réponse préformulée — Quelle est, en degrés, la mesure de l'angle obtus formé par les plans $ABGH$ et $BCHE$ dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre ?



644 d09 X23

Sans réponse préformulée — L'amplitude de chaque angle intérieur d'un polygone régulier est comprise entre 163° et 164°. Combien de côtés possède ce polygone ?

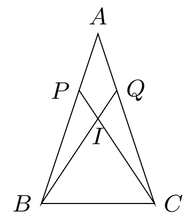
645 d07 X24

L'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm vaut X cm^2. L'aire d'un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 1 cm vaut Y cm^2. L'aire d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure 1 cm vaut Z cm^2. Une seule des relations ci-dessous est correcte ; laquelle ?

(A) $X < Y < Z$
(B) $Z < X < Y$
(C) $Y < Z < X$
(D) $X < Z < Y$
(E) $Z < Y < X$

646 d08 X24

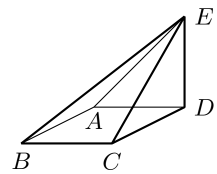
Le triangle ABC est isocèle avec $|AB| = |AC|$. Les points P et Q se trouvent respectivement au tiers de $|AB|$ et au tiers de $|AC|$ à partir de A. Les droites CP et BQ se coupent en I. Quel est le rapport de l'aire du quadrilatère $APIQ$ à celle du triangle ABC ?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

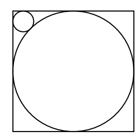
647 d07 X25

Sans réponse préformulée — Dans la pyramide $ABCDE$, $ABCD$ est un carré, DE est perpendiculaire au plan de ce carré et $|DE| = |AD|$. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle aigu des plans BEC et EAB ?



648 d09 X25

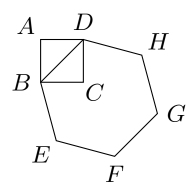
Dans la figure ci-dessous, le grand cercle est inscrit dans le carré, le petit cercle est tangent à deux des côtés du carré et au grand cercle. Que vaut le rapport du rayon du grand cercle à celui du petit cercle ?



(A) 6 (B) $4\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{5}+2$ (D) $3+2\sqrt{2}$ (E) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

649 d10 X27

Dans la figure ci-contre, l'aire du carré $ABCD$ est d'un centimètre carré et l'hexagone $BEFGHD$ est régulier. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire du quadrilatère $BCHD$?



(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ (C) $\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2}$ (D) $(2-\sqrt{2})\sqrt{3}$ (E) $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

650 d07 X28

Sans réponse préformulée — Un trapèze isocèle est circonscrit à un cercle de rayon 6 cm. Sachant que la grande base mesure 10 cm de plus que la petite base, quel est, en centimètres, le périmètre de ce trapèze ?

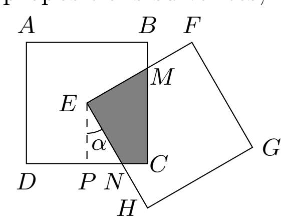
651 d08 X28

Un triangle de côtés 3, 4 et 5 est inscrit dans un carré. Le sommet du triangle qui est l'extrémité des deux côtés les plus longs coïncide avec un sommet du carré. Que vaut la longueur du côté du carré ?

(A) $\sqrt{15}$ **(B)** $3\sqrt{2}$ **(C)** $\dfrac{16}{\sqrt{17}}$ **(D)** $2\sqrt{5}$ **(E)** 4

652 d09 X28

Le carré $ABCD$ de centre E et le carré $EFGH$ sont isométriques. La droite EP est perpendiculaire à CD et l'angle $\alpha = \widehat{PEN}$ est tel que $0 < \alpha \leqslant 45°$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?



(A) Le périmètre du quadrilatère $EMCN$ ne dépend pas de α.

(B) Le périmètre de $EMCN$ n'est pas constant et est maximal si $\alpha =$ 30°.

(C) L'aire de $EMCN$ ne dépend pas de α.

(D) L'aire de $EMCN$ n'est pas constante et est maximale si $\alpha = 45°$.

(E) Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

653 d07 X29

Sans réponse préformulée — Un point intérieur à un rectangle est à une distance de 22 cm d'un des sommets et à une distance de 24 cm du sommet opposé. Sa distance à un troisième sommet est 6 cm. Quelle est, en centimètres, sa distance au quatrième sommet ?

654 d09 X29

Les côtés parallèles $[AB]$ et $[DC]$ du trapèze $ABCD$ mesurent respectivement 2 et 4. Le milieu du côté $[AD]$ est M et le milieu du côté $[BC]$ est N. Les droites AN et BM se coupent en P, les droites CM et DN se coupent en Q. Que vaut le rapport de l'aire du quadrilatère $MPNQ$ à celle du trapèze $ABCD$?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{9}{35}$ (C) $\frac{5}{18}$ (D) $\frac{3}{7}$

(E) Les données sont insuffisantes pour répondre.

655 d07 X30

Sans réponse préformulée — Neuf points sont les sommets, les milieux des côtés et le centre d'un carré. Combien d'ensembles de quatre de ces points ne contiennent pas trois points colinéaires ?

656 d09 X30

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de solutions de l'équation $\frac{\sin x}{x} = 0{,}005$ d'inconnue x réelle ?

4.4 Logique

657 d09 X01

Si un certain professeur se trompe au moins une fois, que peut-on en déduire logiquement ?

(A) Tous les professeurs se trompent toujours.

(B) Celui qui se trompe parfois est un professeur.

(C) Aucun professeur ne dit jamais la vérité.

(D) Il existe au moins une personne qui s'est trompée au moins une fois.

(E) Quiconque ne se trompe jamais est un professeur.

658 e10 X02

La phrase « Tous les chats sont des animaux mignons. » a pour négation logique :

(A) « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal mignon. » ;
(B) « Tous les animaux mignons sont des chats. » ;
(C) « Aucun chat n'est un animal mignon. » ;
(D) « Il existe un animal mignon qui n'est pas un chat. » ;
(E) « Tous les chiens sont des animaux terrifiants. ».

659 d08 X02

Une seule des propositions suivantes est vraie ; laquelle ? ($\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, &c.)

(A) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a > b \Rightarrow a \cdot b > 0$;
(B) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}_-^*$, $a \geqslant b \Rightarrow a \cdot b \geqslant b^2$;
(C) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}^*$, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$;
(D) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}$, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;
(E) Quels que soient $a, b \in \mathbf{R}$, $a \geqslant b \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2$.

660 e08 X03

Depuis que Jean et Marie travaillent dans le même bureau, ils n'ont jamais été absents le même jour. Ainsi, jusqu'à aujourd'hui, il est vrai que

(A) Si Jean est présent, alors Marie est absente ;
(B) Si Jean est présent, alors Marie n'est pas absente ;
(C) Si Jean n'est pas présent, alors Marie est absente ;
(D) Si Jean est absent, alors Marie ne l'est pas ;
(E) Si Marie est présente, alors Jean ne l'est pas.

661 e09 X03

Dans une rue, André habite à côté de Bernard, Henri en face de Claude, Éric à côté de François, Daniel à côté d'André, François en face de Daniel et à côté de Henri, Gérard à côté d'Éric. Ces huit personnes habitent dans des maisons différentes. Tu peux en déduire que

(A) Claude habite à côté de François ;

(B) Henri habite en face d'André ;

(C) Éric habite en face de Bernard ;

(D) Claude habite à côté de Daniel ;

(E) Gérard habite à côté d'Henri.

662 d08 X07

Sans réponse préformulée — Soit f une fonction impaire de domaine $\mathbf{R}$. Parmi les huit propositions suivantes, combien sont nécessairement vraies ? Les symboles $\forall$ et $\exists$ signifient respectivement « pour tout » et « il existe ».

$(\forall\, x \in \mathbf{R})\ f(x) = f(x)$	$(\exists\, x \in \mathbf{R})\ f(x) = f(x)$
$(\forall\, x \in \mathbf{R})\ f(x) = -f(x)$	$(\exists\, x \in \mathbf{R})\ f(x) = -f(x)$
$(\forall\, x \in \mathbf{R})\ f(x) = f(-x)$	$(\exists\, x \in \mathbf{R})\ f(x) = f(-x)$
$(\forall\, x \in \mathbf{R})\ f(x) = -f(-x)$	$(\exists\, x \in \mathbf{R})\ f(x) = -f(-x)$

663 d10 X08

Arthur, Bernard et Claude sont soupçonnés d'un vol. L'enquête a établi que :
• Si Arthur n'est pas coupable, alors Bernard et Claude sont tous deux coupables ;
• Arthur n'est pas coupable ou Bernard est coupable ;
• Bernard n'est pas coupable ou Claude n'est pas coupable.
Qui a commis le vol ?
N.B. : Le « ou » n'est pas exclusif !

(A) Arthur et Bernard

(B) Arthur et lui seul

(C) Bernard et Claude

(D) Claude et lui seul

(E) Les informations ne suffisent pas pour le déterminer.

664
d09
X11

Les trois médailles (or, argent et bronze) ont été gagnées par Eddy, Fabian et Guy. Selon un spectateur, Fabian a gagné la médaille d'or et Eddy celle d'argent. Selon un autre, c'est Guy qui a obtenu la médaille d'or et Fabian celle d'argent. Dans chacune de ces affirmations, l'attribution d'une médaille est correcte et l'autre est fausse. Dès lors

A Guy a obtenu la médaille d'or.

B Fabian a obtenu la médaille d'argent.

C Eddy a obtenu la médaille de bronze.

D Il est impossible de déterminer qui a gagné la médaille de bronze.

E Les informations ne permettent pas de savoir si la médaille d'or a été gagnée par Guy ou par Fabian.

665
d10
X21

Les cinq expressions

$$2a+9, \quad 3a+10, \quad 4a+11, \quad 5a+12 \quad \text{et} \quad 6a+13$$

dépendent de la variable a. L'une des affirmations suivantes est vraie. Laquelle ?

A Il existe un naturel a pour lequel les cinq expressions sont paires.

B Il existe un naturel a pour lequel les cinq expressions sont impaires.

C Quel que soit le naturel a, les cinq expressions sont paires.

D Quel que soit le naturel a, les cinq expressions sont impaires.

E Il existe un naturel a pour lequel les cinq expressions sont multiples de 5.

4.5 Problèmes — Divers

666 d08 X02

L'opération $\star$ est une opération entre deux couleurs dont le résultat est une couleur. Sachant que

$$\begin{aligned}&\text{bleu} \star \text{vert} = \text{vert},\\ &\text{vert} \star \text{bleu} = \text{bleu},\\ &\text{rouge} \star \text{vert} = \text{bleu},\\ &(\text{rouge} \star \text{vert}) \star \text{rouge} = (\text{bleu} \star \text{vert}) \star \text{bleu},\end{aligned}$$

quel est le résultat de : (bleu $\star$ rouge) $\star$ rouge ?

(A) Rouge
(B) Vert
(C) Bleu
(D) Une autre couleur
(E) Impossible à déterminer

667 e08 X02

Huit ouvriers agricoles labourent un champ de 8 ha en huit jours. Dans les mêmes conditions, combien d'ouvriers sont nécessaires pour labourer un champ de 12 ha en six jours ?

(A) 4 (B) 9 (C) 16 (D) 18 (E) 32

668 e07 X06

Un coureur à pied fait un premier tour du stade à la vitesse de 15 km/h et le tour suivant à la vitesse de 10 km/h. Quelle est, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne sur le parcours total ?

(A) 11,5 (B) 12 (C) 12,5 (D) 13 (E) 13,5

669 d08 X05

Pour payer un montant de 14,5 €, on utilise 17 pièces, les unes de 2 €, les autres de 0,50 €. Combien de pièces de 0,50 € a-t-on utilisées ?

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11 (E) 13

670 d10 X07

Sans réponse préformulée — Je roule à vélomoteur, à vitesse constante, sur une route bordée de bornes kilométriques. Je viens de passer devant une borne indiquant un nombre de kilomètres à deux chiffres. Une heure plus tard, je passe devant une autre borne qui porte les deux mêmes chiffres dans l'ordre inverse. Encore une heure plus tard, je lis sur une troisième borne les deux mêmes chiffres que sur la première, dans le même ordre, mais avec un zéro intercalé. Quelle est ma vitesse, en kilomètres par heure ?

671 e07 X11

Un train d'un kilomètre de long doit rouler à la vitesse de 1 km/h pour traverser un tunnel long lui aussi d'un kilomètre. Combien de temps s'écoulera-t-il entre l'entrée de l'avant du train dans le tunnel et la sortie du dernier wagon ?

A 30 min **B** 1 h **C** 1 h 30 min **D** 2 h **E** 3 h

672 d08 X08

Tous les jours, un cycliste effectue un circuit de 60 km. Le premier jour, il roule à la vitesse de 20 km/h, le deuxième jour, à la vitesse de 15 km/h et le troisième jour, à la vitesse de 12 km/h. Quelle est, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne pour les trois jours ?

A 16,66 **B** 16 **C** 15,66 **D** 15 **E** 14,33

673 e10 X16

La première moitié d'une citerne est vidée par un robinet qui débite 1000 L/h. Ce robinet est alors partiellement fermé, et la deuxième moitié est vidée avec un débit de 600 L/h. L'opération a duré 20 h en tout. Quelle est, en litres, la contenance de cette citerne ?

A 20 000 **B** 18 000 **C** 16 000 **D** 15 000 **E** 12 000

674 e08 X18

Dans cette école internationale, un quart des élèves ne parle pas l'anglais, un tiers ne parle pas l'espagnol et un douzième ne parle aucune de ces deux langues. Combien y a-t-il d'élèves dans l'école si 300 élèves parlent l'anglais et l'espagnol ?

A 400 **B** 480 **C** 600 **D** 650 **E** 720

675 e09 X24 Lorsque le verger compte 20 arbres fruitiers, chaque arbre produit 300 fruits. Chaque fois que l'on plante un arbre supplémentaire, le rendement par arbre diminue de 10 fruits. Combien d'arbres supplémentaires faudra-t-il planter pour que la production du verger soit la plus grande possible ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

676 d09 X27 *Sans réponse préformulée* — Les producteurs d'un film ont établi que la recette hebdomadaire (en millions d'euros), t semaines après la sortie en salle, pouvait se calculer grâce à la formule $R(t) = \dfrac{50t}{36+t^2}$. Combien de semaines devront-ils attendre pour que cette recette soit maximale ?

4.6 Combinatoire & probabilités

677 e07 X01 Des mouchoirs bleus sont disponibles en quantité illimitée, de même que des jaunes, des rouges et des verts. Combien, au minimum, faut-il placer de ces mouchoirs dans un tiroir pour être certain que le tiroir contienne au moins trois mouchoirs ayant la même couleur ?

(A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 13
(E) Une telle valeur n'existe pas.

678 e10 X04 Dans un groupe de 150 adolescents, 98 pratiquent le tennis, 53 font du ski et 39 s'adonnent au ski et au tennis. Combien de ces adolescents ne pratiquent aucun des deux sports ?

(A) 112 (B) 58 (C) 52 (D) 38 (E) 13

679 e09 X06 Sur une table, on jette trois dés bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité que les faces supérieures des trois dés indiquent le même nombre de points ?

(A) $\frac{1}{216}$ (B) $\frac{5}{216}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{36}$ (E) $\frac{1}{18}$

680 e10 X07

Dans une classe, il y a 12 garçons et 8 filles. L'un des garçons et l'une des filles sont frère et sœur (et ce sont les seuls dans ce cas). Si l'on choisit un garçon et une fille au hasard dans la classe, quelle est la probabilité que le frère et la sœur soient choisis ?

(A) 1/96 (B) 1/48 (C) 1/20 (D) 1/10 (E) 5/24

681 d07 X06

Quel est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes d'un cube de sorte que chaque arête soit entièrement peinte dans une de ces couleurs et que les arêtes issues d'un même sommet reçoivent des couleurs différentes ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 12

682 d09 X09

Sans réponse préformulée — On appelle « 2-3-code » un code composé de deux lettres suivies de trois chiffres. Par exemple, ZE117 et ZZ999 sont des 2-3-codes. Combien existe-t-il de dizaines de 2-3-codes qui commencent par L, ne contiennent ni J, ni W, ni chiffres pairs et ne se terminent ni par 5, ni par 9 ?

683 e09 X13

Sans réponse préformulée — Dans une librairie, sont disponibles sept livres de Molière, cinq d'Agatha Christie et trois de Shakespeare. De combien de manières puis-je en acheter deux de chaque auteur ?

684 e10 X13

Sans réponse préformulée — Au poker, un joueur reçoit une « main » de 5 cartes tirées d'un jeu de 52. Un *carré* est constitué de 4 cartes de même valeur (4 rois, 4 dix, 4 as, ...) et d'une cinquième carte. Combien de « mains » différentes contiennent un carré ?

685 d08 X11

Sans réponse préformulée — Un sac contient 5 balles rouges, 9 balles vertes, 12 balles blanches, 20 balles bleues et 25 balles jaunes. On tire au hasard des balles du sac sans regarder le résultat après chaque tirage. Après quel nombre minimum de tirages est-on sûr de disposer de 15 balles de la même couleur ?

686 d09 X12

Sans réponse préformulée — Sachant que $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$, que $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et que $A_9^p = 504$, que vaut p ?

687 d07 X15

Deux polygones convexes P et Q ont respectivement 2007 et 2008 côtés. Leurs côtés n'ont aucun segment en commun. Quel est le nombre maximal de points où les côtés de P et de Q se coupent ?

(A) 2×2007
(B) 2×2008
(C) $2007 + 2008$
(D) 2007×2008
(E) $2 \times 2007 - 2008$

688 e10 X22

Parmi toutes les familles de trois enfants dont l'un au moins est un garçon, quelle est la probabilité que les trois enfants soient des garçons ? (Il est supposé que garçons et filles naissent avec la même probabilité.)

(A) 1/2 (B) 2/7 (C) 1/4 (D) 1/7 (E) 1/8

689 d09 X16

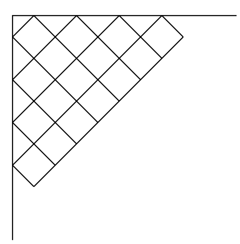
Sans réponse préformulée — On appelle *octet* une suite de huit chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01011100 ou 00000111 sont des octets. Combien existe-t-il d'octets contenant au moins 4 fois le chiffre 0 ?

690 e08 X27

Sans réponse préformulée — Un tiroir contient des chaussettes blanches, bleues et noires. Il y a le même nombre de chaussettes de chaque couleur et en tirant du tiroir deux chaussettes au hasard, il y a une chance sur quatre qu'elles soient de même couleur. Combien y a-t-il de chaussettes dans le tiroir ?

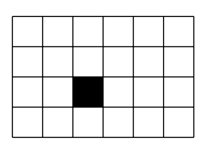
691 e07 X28

Sans réponse préformulée — Dans une pièce carrée de 5 m de côté, est posé un carrelage formé de dalles carrées de 50 cm de côté. La première dalle est posée dans le coin supérieur gauche et les diagonales des dalles sont parallèles aux côtés de la pièce comme indiqué sur la figure. Combien de dalles entières sont posées ?



692 d10 X25

Sans réponse préformulée — Combien de rectangles contenant la case noire y a-t-il dans la figure ci-contre ?



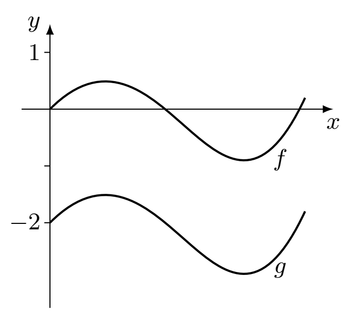
693 d10 X30

Sans réponse préformulée — Soit ABC un triangle non dégénéré. On choisit 3 points distincts A_1, A_2, A_3 sur $]BC[$, 5 points distincts B_1, …, B_5 sur $]CA[$ et 7 points distincts C_1, …, C_7 sur $]AB[$. Combien de triangles non dégénérés ont leurs trois sommets dans $\{A, A_1, A_2, A_3, B, B_1, \ldots, B_5, C, C_1, \ldots, C_7\}$?

4.7 Analyse

694 d07 X01

Voici les graphiques de deux fonctions f et g. Le graphique de g a été obtenu par translation à partir de celui de f. Comment s'exprime la fonction g ?



(A) $x \mapsto f(x+2)$

(B) $x \mapsto f(x)+2$

(C) $x \mapsto f(x-2)$

(D) $x \mapsto f(x)-2$

(E) $x \mapsto 2f(x)$

695 e09 X04

Parmi les équations suivantes, quelle est celle qui *n'est pas* l'équation d'un cercle de centre (0,0) et de rayon 1 dans un repère orthonormé ?

(A) $x^2 + y^2 = 1$

(B) $|x^2 + y^2| = 1$

(C) $|x|^2 + |y|^2 = 1$

(D) $y = \sqrt{1 - x^2}$

(E) $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$

696 e07 X22

Il existe des alphas, des bétas et des gammas. On sait que certains alphas ne sont pas des bétas et qu'aucun béta n'est un gamma. On peut en conclure que

(A) Certains alphas sont des gammas ;
(B) Aucun alpha n'est un gamma ;
(C) Certains gammas sont des alphas ;
(D) Certains alphas ne sont pas des gammas ;
(E) Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

697 e10 X08

Si la courbe $\mathcal{C}$ est le graphe de la fonction $x \mapsto x^3$, alors l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $(0,4)$ est le graphe de la fonction $x \mapsto$

(A) $(x+4)^3$; (B) $(x-4)^3$; (C) x^3-4 ; (D) x^3+4 ; (E) $4x^3$.

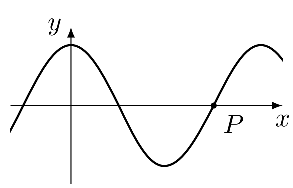
698 e07 X09

L'une des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies ci-dessous admet, en $x=-2$, un maximum égal à 4. Laquelle ?

(A) $f : x \mapsto |x-4|-2$
(B) $f : x \mapsto |x-2|+4$
(C) $f : x \mapsto |x+2|-4$
(D) $f : x \mapsto 4-|x+2|$
(E) $f : x \mapsto 4-|x-2|$

699 e07 X13

Ce graphe est celui de la fonction f définie par $f(x) = \cos 2x$. Quelle est l'abscisse du point P ?



(A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{2}$ (E) 2π

700 e08 X13

Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(x) = 1 - f(x-1)$, alors $f(x+1) =$

(A) $2 - f(x-1)$;

(B) $f(x-1)$;

(C) $f(x) + 1$;

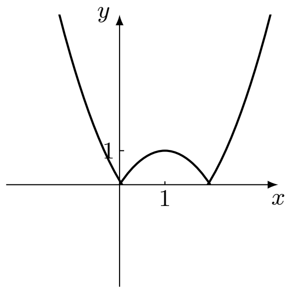
(D) $f(x-1) + 2$;

(E) $f(x) - 1$.

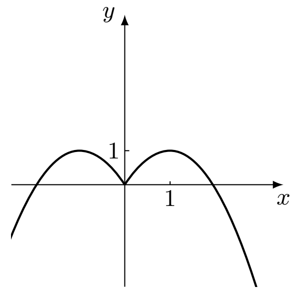
701 e07 X14

Lequel des cinq graphes représentés ci-dessous est celui de la fonction définie par $x \mapsto 1 - |x-1|^2$?

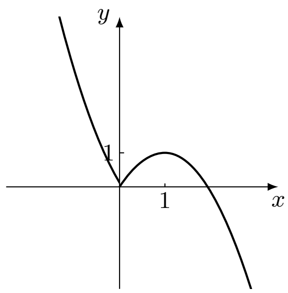
(A)



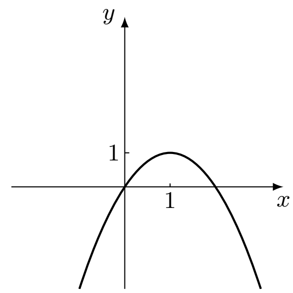
(B)



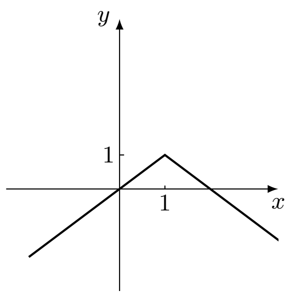
(C)



(D)



(E)



702 d09 X10

La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est définie par $f(x) = \left(1 + x^{-1}\right)^{-1}$. Que vaut $(\underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2009})(1)$?

(A) -2010 (B) -2009 (C) 1 (D) $\dfrac{1}{2009}$ (E) $\dfrac{1}{2010}$

703 e10 X15

Si $f : x \mapsto |x-2| + |x+3|$, combien des affirmations suivantes sont vraies ?

- La fonction f est strictement positive sur $\mathbf{R}$.
- La fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.
- La fonction f est décroissante sur $\mathbf{R}_-$.
- La fonction f est constante sur un intervalle.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

704 e07 X17

Parmi les fonctions f, g, h, i, j définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos(x+\pi), \\ g(x) &= \sin(\tfrac{\pi}{2} - x), \\ h(x) &= \cos(x+\pi), \\ i(x) &= \cos(-x), \\ j(x) &= -\cos x, \end{aligned}$$

quelles sont celles qui sont égales ?

(A) On a uniquement $f = g$ et $h = i = j$.
(B) On a uniquement $f = g = h$.
(C) On a uniquement $f = g$.
(D) On a uniquement $h = j$.
(E) On a uniquement $f = g = i$ et $h = j$.

705 e10 X18

Si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, que vaut $f(f(|f(x)|))$?

(A) $1 - |1-x|$ (B) $\dfrac{1}{|1-x|-1}$ (C) $\dfrac{1}{|1-x|}$ (D) $\dfrac{|1-x|}{x}$ (E) $|1-x|$

706 e10 X20

La fonction $x \mapsto \sin x + \cos(\pi x)$

(A) Est périodique de période 2 ;
(B) Est périodique de période 2π ;
(C) Est périodique de période $2+\pi$;
(D) Est périodique de période $2/\pi$;
(E) N'est pas périodique.

707 e09 X21

Dans un système d'axes orthonormés, les fonctions f et g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ ont des graphiques symétriques par rapport à la droite d'équation $y = 1$. Laquelle des égalités ci-dessous est correcte pour tout x réel ?

(A) $f(x) - g(x) = 1$
(B) $f(x) - g(x) = 2$
(C) $|f(x) - g(x)| = 2$
(D) $f(x) + g(x) = 1$
(E) $f(x) + g(x) = 2$

708 e07 X23

Dans $\mathbf{R^2}$, l'équation $(x - y)^2 + (y - x) = 0$ est celle

(A) D'un cercle ;
(B) D'une parabole ;
(C) De la réunion de deux droites sécantes non perpendiculaires ;
(D) De la réunion de deux droites perpendiculaires ;
(E) De la réunion de deux droites parallèles.

709 e07 X24

Pour $x \neq 1$, la fonction f est définie par $y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Dans ce cas, $x =$

(A) $f(y)$; (B) $-f(y)$; (C) $f(1/y)$; (D) $f(-y)$; (E) $-f(-y)$.

710 e07 X25

Quelle est, parmi les suivantes, la fonction dont le graphe admet l'axe Ox pour asymptote ?

(A) $x \mapsto x\sin(1/x)$
(B) $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$
(C) $x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$
(D) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$
(E) $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(1/x)}$

711 d07 X18

Le graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-1}{x^2-1}$ admet

(A) L'origine comme centre de symétrie ;

(B) L'axe des ordonnées comme axe de symétrie ;

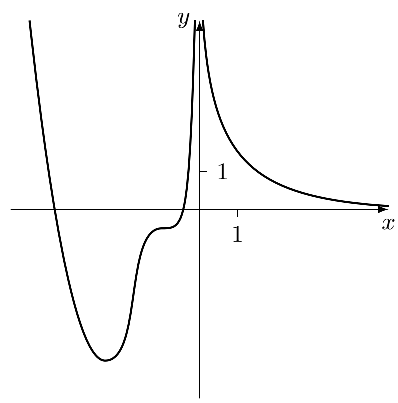
(C) L'axe des abscisses comme axe de symétrie ;

(D) Le point $A = (0, 1)$ comme centre de symétrie ;

(E) La droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ comme axe de symétrie.

712 d08 X18

Sans réponse préformulée — D'après le graphique de la fonction f représenté ci-contre, quel est le nombre minimum de solutions de l'équation $f(x-1) - 3 = 0$?



713 e10 X26

Quelle est la valeur minimale de $\sqrt{x^2+y^2}$ si x et y sont deux réels tels que $5x + 12y = 60$?

(A) 144 (B) 13 (C) 60/13 (D) 1 (E) 13/17

714 e09 X29

Si f et g sont deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(x) = 3x - 2$ et $g(f(x)) = 3x^2 - 3$, que vaut $g(x)$?

(A) $\dfrac{x^2+4x-5}{3}$

(B) $3 + \sqrt{\dfrac{x}{3}}$

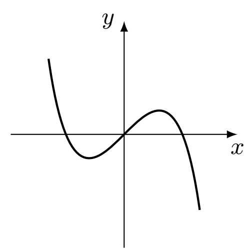
(C) $3x + 2$

(D) $2 + \sqrt{\dfrac{x}{3}}$

(E) $3 + \sqrt{\dfrac{x}{2}}$

715 d07 X21

Sans réponse préformulée — Le graphe représenté ci-dessous est celui de la dérivée f' d'une fonction f. Il est défini pour tout réel, est symétrique par rapport à l'origine des axes et ne coupe l'axe des x qu'en trois points. Combien de réels a sont tels que $\forall x \in \mathbf{R} : f(a) \geqslant f(x)$?



716 d09 X24

La fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est telle que $f(a \cdot b) = f(a) - f(b)$ pour tous réels a, b. Que vaut $f(2009)$?

(A) -2009 (B) 0 (C) 2008 (D) 2009

(E) Sa valeur dépend de a et de b.

717 d10 X24

Soit $k \neq 0$. La fonction $x \mapsto 5 \sin kx - 3 \cos kx$

(A) Est périodique de période $\dfrac{k\pi}{2}$;

(B) Est périodique de période $\dfrac{2\pi}{k}$;

(C) Est périodique de période $k\pi$;

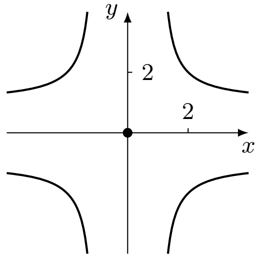
(D) Est périodique de période $\dfrac{2}{k\pi}$;

(E) N'est pas périodique.

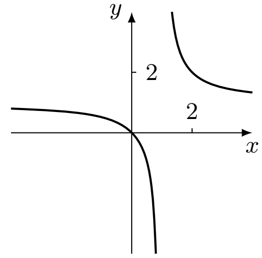
718 d10 X26

L'un des diagrammes suivants représente l'ensemble des solutions de l'équation $|x+y| = |xy|$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Lequel ?

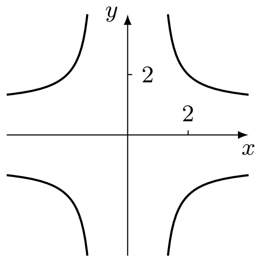
(A)



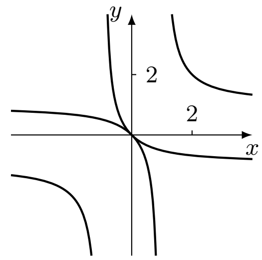
(D)



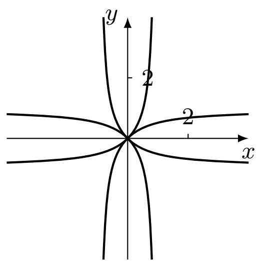
(B)



(E)



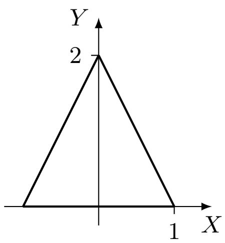
(C)

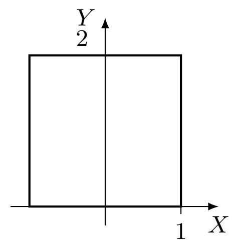


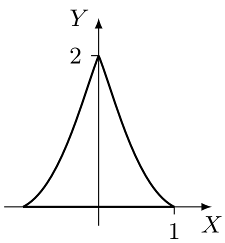
719 d07 X27 Dans le plan d'axes (Ox, Oy), on considère le carré $ABCD$ tel que $A =$ $= (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ et $D = (0,1)$. On effectue la transformation $(x,y) \mapsto (X,Y)$, avec

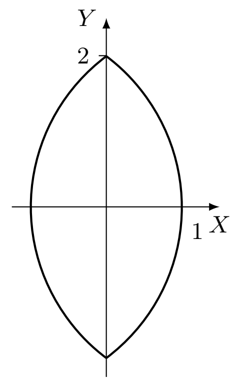
$$\begin{cases} X = x^2 - y^2 \\ Y = 2xy. \end{cases}$$

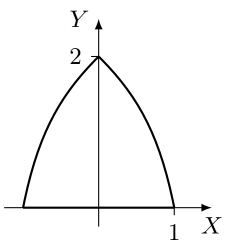
Quelle est l'image du carré dans le plan d'axes (OX, OY) ?

(A) 

(D) 

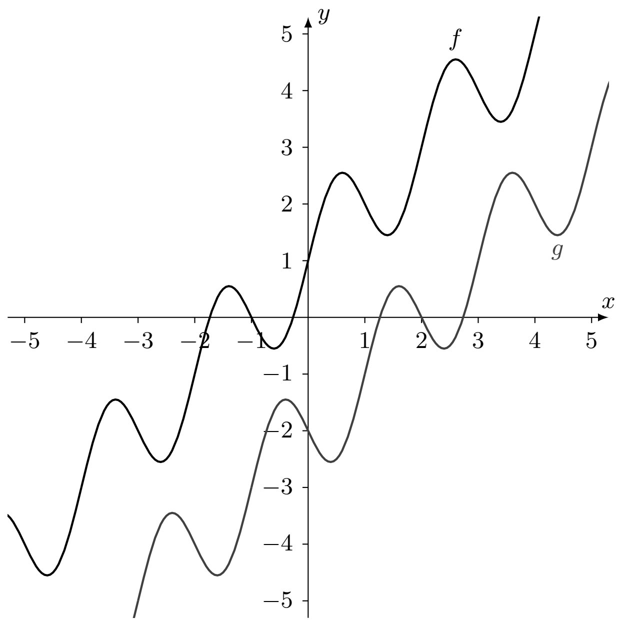
(B) 

(E) 

(C) 

720 d08 X30

La fonction f est définie par $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto f(x) = x + \sin \pi x + 1$.
Quelle est la valeur de $g(x)$?



(A) $-x + \sin \pi x + 2$

(B) $-x + \sin \pi x - 2$

(C) $x + \sin(\pi x - 1) - 2$

(D) $-x + \sin(\pi x - 1) - 2$

(E) $x - \sin \pi x - 2$

4.8 Table des réponses

X	07		08		09		10	
	e	d	e	d	e	d	e	d
1	B	D	B	C	B	D	E	900
2	D	D	C	D	E	C	A	504
3	E	61	D	C	D	314	A	D
4	B	D	A	B	D	8	D	A
5	E	B	D	E	D	6	C	87
6	B	A	C	8	D	A	B	C
7	99	360	E	6	C	8	A	45
8	E	C	B	D	90	D	D	A
9	D	2	D	D	C	180	A	A
10	44	36	48	D	D	E	D	B
11	D	C	D	55	D	A	B	31
12	C	A	C	E	E	3	B	A
13	A	0	B	E	630	B	624	E
14	D	A	A	120	189	A	E	8
15	77	A	D	A	D	B	D	C
16	B	A	3	9	B	163	D	D
17	E	C	B	10	A	E	A	6
18	A	D	C	3	C	2	A	D
19	D	A	A	C	C	C	C	45
20	D	E	B	B	B	E	E	27
21	E	2	D	1	E	19	B	B
22	B	63	A	C	A	E	D	A
23	E	B	20	120	C	22	D	3
24	A	E	C	D	C	B	81	B
25	D	60	A	6	C	D	46	72
26	D	36	A	E	B	D	C	E
27	C	C	9	27	84	6	C	E
28	85	52	E	C	D	C	14	C
29	A	32	E	3	A	B	E	C
30	C	78	C	E	A	126	C	687

Chapitre 5

Finales miNi

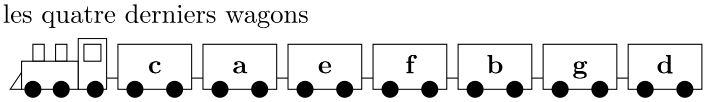
5.1 Finale 2007

1. Dans ma classe, toutes les interrogations de mathématique sont notées sur 20. Ma moyenne jusqu'à présent était 12, mais avec le 17 que je viens d'obtenir, elle est passée à 13.

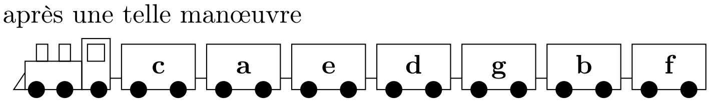
a) Quelle doit être ma note à la prochaine interrogation pour que ma nouvelle moyenne soit 14 ?

b) Cette moyenne de 14 peut-elle passer à 17 si j'obtiens 20 à toutes les interrogations suivantes ? Si oui, combien d'interrogations parfaites dois-je faire ?

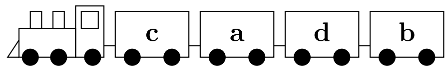
2. Dans un centre ferroviaire, les installations permettent de détacher deux ou plusieurs des derniers wagons du train puis de les rattacher aux premiers wagons (ou à la locomotive, si aucun wagon n'a été laissé) après avoir inversé l'ordre des wagons détachés. Par exemple, le train représenté ci-dessous où on détache les quatre derniers wagons



devient après une telle manœuvre



a) Trier les wagons d'un train consiste à replacer ces wagons dans un ordre bien déterminé après un certain nombre de manœuvres. Est-il possible de trier les wagons du train figuré ci-dessous pour obtenir l'ordre « a-b-c-d » ?



Si oui, quel est le nombre minimum de manœuvres nécessaires ?

b) Est-il toujours possible de trier tous les wagons d'un train ? Expliquer votre réponse.

c) Est-il toujours possible de trier un train de trois wagons en au plus une manœuvre ? En au plus deux manœuvres ? En au plus trois manœuvres ?

3. On désigne par $\overline{ab}$ un nombre où a est le chiffre des dizaines et b celui des unités. Il existe des nombres naturels $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ tels que a, b, c, d sont non nuls, tous différents et $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$, par exemple $21 \times 36 = 12 \times 63$.

a) Trouver au moins deux autres exemples.

b) Déterminer une relation générale qui lie a, b, c et d lorsque $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$ et montrer qu'elle fournit toutes les solutions (a, b, c, d).

c) Combien y a-t-il de solutions ?

4. Le triangle ABC est rectangle avec $\widehat{ABC}$ mesurant $90°$. Le segment $[CP]$ est perpendiculaire à la droite AC et tel que $|CP| = |CB|$.

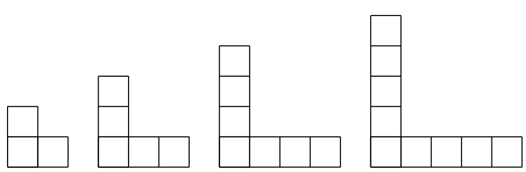
a) Si l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $26°$, est-il vrai que la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est soit parallèle, soit perpendiculaire à la droite BP ?

b) Cette propriété reste-t-elle vraie si l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$ ne vaut pas $26°$?

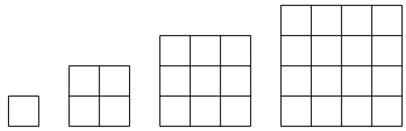
c) La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est-elle toujours parallèle à BP ? est-elle toujours perpendiculaire à BP ?

5.2 Finale 2008

1. Un enfant possède 2008 allumettes toutes de longueur 1. Il s'amuse à construire des gnomons



ou des carrés

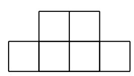


a) Avec ses 2008 allumettes, il construit le plus grand gnomon possible. Combien lui faut-il d'allumettes et combien ce gnomon comporte-t-il de petits carrés 1×1 ?

b) Avec ses 2008 allumettes, il construit le plus grand carré possible. Combien lui faut-il d'allumettes et combien ce carré comporte-t-il de petits carrés 1×1 ?

c) Avec ses 2008 allumettes, il souhaite construire d'abord un carré, puis le démonter et ensuite construire un gnomon comportant exactement le même nombre d'allumettes que le carré. Est-ce possible ? Si oui, quel est, parmi ces 2008 allumettes, le plus grand nombre d'allumettes utilisables pour chacune de ces deux constructions successives ?

2. La figure ci-dessous représente une dalle formée de six petits carrés dont le côté mesure 1.



On dispose de nombreuses dalles toutes semblables qui ne peuvent ni être découpées ni se chevaucher. Avec ces dalles,

a) Est-il possible de construire un carré de côté 10 ?

b) Est-il possible de construire un carré de côté 6 ?

c) Quel est le plus petit carré qu'il est possible de construire ?

3. Sur le côté $[CD]$ du carré $ABCD$, on construit vers l'extérieur le triangle équilatéral CDE, puis le triangle équilatéral CEF, le triangle isocèle CFG rectangle en F et le triangle équilatéral CGH.

a) Fais un dessin précis de la figure décrite ci-dessus.

b) Les points A, B et H sont-ils alignés ? Justifie ta réponse par une démonstration.

4. Dans sa caverne, Ali a trouvé un sac de n pépites d'or qui pèsent 1 gramme, 2 grammes, 3 grammes, 4 grammes, ..., n grammes. Sa femme veut exactement la moitié du poids total de l'or. Sans couper aucune pépite, Ali doit donc effectuer un partage en deux parts de même poids.

a) Ce partage est-il possible si $n = 12$?

b) Ce partage est-il possible si $n = 5$?

c) Ce partage est-il possible si $n = 11$?

d) Pour quelles valeurs de n le partage est-il possible ?

5.3 Finale 2009

1. $ABCD$ est un trapèze dont la base $[DC]$ a une longueur triple de la base $[AB]$. Si M est le milieu de $[AD]$, à quelle fraction de l'aire du trapèze est égale l'aire du triangle BDM ?

2. La suite des entiers naturels non nuls est écrite dans le tableau triangulaire

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 2 & & 3 & & & \\ & & 4 & & 5 & & 6 & & \\ & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & \\ 11 & & 12 & & \dots & & & & \end{array}$$

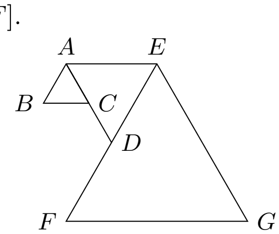
Que vaut

a) Le premier terme de la 2009^e ligne du tableau ?

b) Le dernier terme de la 2009^e ligne du tableau ?

c) La somme des termes de la 2009^e ligne du tableau ?

3. Les triangles ABC, ADE et EFG sont équilatéraux. Le point C est le milieu de $[AD]$ et D celui de $[EF]$.



a) Que vaut le rapport de l'aire du triangle ABC à celle du triangle EFG ?

b) Soit H le point d'intersection de AB et GE et I celui de AB et FG. Prouver que les triangles AEH et IGH sont équilatéraux.

c) Justifier que les points B, D et G sont alignés.

4. Les chiffres d'un nombre naturel n sont permutés de toutes les manières possibles. La moyenne arithmétique de tous les nombres ainsi obtenus (y compris n lui-même) est égale à n. Quelles sont les valeurs possibles de n

a) Si n est un nombre de 2 chiffres ?

b) Si n est un nombre de 3 chiffres ?

5.4 Finale 2010

1. Dans le parallélogramme $RSTU$, la longueur du côté $[RS]$ est double de celle du côté $[RU]$. Le point P est le milieu du côté $[RS]$.

a) Démontrer que la droite UP est la bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$ et que la droite TP est la bissectrice de l'angle $\widehat{STU}$.

b) Le triangle TUP est-il acutangle, rectangle ou obtusangle ?

2. Une calculatrice étrange possède deux touches inhabituelles : la touche $\boxed{f}$ et la touche $\boxed{g}$. Lorsqu'on presse la touche $\boxed{f}$, le nombre affiché est doublé. Lorsqu'on presse la touche $\boxed{g}$, le nombre affiché est diminué de trois.

a) Si l'affichage initial est 5, indiquer une suite de pressions de ces deux touches spéciales qui provoque l'affichage de 17 ou montrer qu'il n'existe pas de telle suite.

b) Si l'affichage initial est 5, indiquer une suite de pressions de ces deux touches spéciales qui provoque l'affichage de 85 ou montrer qu'il n'existe pas de telle suite.

c) Si l'affichage initial est 5, indiquer une suite de pressions de ces deux touches spéciales qui provoque l'affichage de 36 ou montrer qu'il n'existe pas de telle suite.

d) Quels sont tous les nombres naturels qui peuvent être affichés, en partant de 5, par une telle suite de pressions, et pourquoi ?

3. Soit ABC un triangle d'aire 1.

a) Sur la demi-droite $[AB$, soit B' tel que $|AB'| = 2|AB|$. Sur la demi-droite $[BC$, soit C' tel que $|BC'| = 3|BC|$. Sur la demi-droite $[CA$, soit A' tel que $|CA'| = 5|CA|$. Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$?

b) Soit m, n et p trois nombres naturels supérieurs à 2. Sur la demi-droite $[AB$, soit B'' tel que $|AB''| = m|AB|$. Sur la demi-droite $[BC$, soit C'' tel que $|BC''| = n|BC|$. Sur la demi-droite $[CA$, soit A'' tel que $|CA''| = p|CA|$. Quelle est l'aire du triangle $A''B''C''$?

4. Deux carrés se disputent.

— *Moi, Monsieur, mon côté est un nombre entier de centimètres !* déclare fièrement le grand carré.

— *Mais, moi aussi !* répond rageusement le petit carré avant de poursuivre : *Qu'on augmente mon aire de* 2100 cm^2 *et je serai votre égal !*

a) Donner une longueur possible du côté du grand carré.

b) Le problème admet-il une solution si 2100 est remplacé par 2010 ? Si oui, indiquer toutes les solutions.

Chapitre 6

Finales miDi

6.1 Finale 2007

1. Le chiffre des unités du nombre naturel N est x. On effectue successivement les opérations suivantes :
• Supprimer le chiffre des unités x du nombre N ;
• Retrancher $2x$ du nombre obtenu.
Par exemple, le nombre 203 devient 20, puis 14.
Est-il toujours vrai que le nombre final est un multiple de 7 si et seulement si le nombre initial N est un multiple de 7 ?

2. a) Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs dont la somme est égale au produit. Prouver qu'il n'en existe pas d'autres.

b) Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs formant une suite arithmétique dont la somme est égale au produit. Prouver qu'il n'en existe pas d'autres.
(La suite (a, b, c) est appelée suite arithmétique lorsqu'il existe un entier r tel que $(a, b, c) = (a, a + r, a + 2r)$.)

c) Que devient la réponse au point (b) si la suite arithmétique est formée d'entiers quelconques (positifs, négatifs ou nuls) ?

3. Le triangle ABC est rectangle avec $\widehat{ABC}$ mesurant $90°$. Le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse est D et les pieds des perpendiculaires abaissées de D respectivement sur $[BA]$ et $[BC]$ sont E et F. Soient r_1, r_2 et r_3 les rayons des cercles inscrits aux triangles AED, EDF et FDC respectivement. La formule $r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}$ est-elle toujours correcte ?

4. Déterminer tous les nombres entiers a, b tels que

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$

a) Pour $n = 2$;

b) Pour $n = 3$;

c) Pour $n > 3$.

6.2 Finale 2008

1. Dans le plan, combien existe-t-il de triangles équilatéraux distincts dont au moins deux sommets sont aussi des sommets

a) D'un carré donné ?

b) D'un hexagone régulier donné ?

c) D'un dodécagone (polygone à 12 sommets) régulier donné ?

2. On considère 2008 fractions

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_{2008}}{b_{2008}}$$

dont les numérateurs sont des nombres naturels et les dénominateurs des nombres naturels non nuls. Démontrer que si α et β sont respectivement la plus petite et la plus grande de ces fractions, on a

$$\alpha \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2008}}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2008}} \leqslant \beta.$$

3. Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O. La hauteur issue de A coupe BC en H. Le cercle de diamètre $[AH]$ coupe AB en D et coupe AC en E. Démontrer que OA est perpendiculaire à DE.

4. Les dimensions d'un terrain rectangulaire sont exprimées par deux nombres naturels x et y. Le propriétaire a la possibilité d'agrandir son terrain de sorte qu'il reste rectangulaire, mais que ses dimensions soient à présent $x+5$ et $y+6$. Il s'aperçoit qu'après cet agrandissement, la superficie de son terrain a triplé. Quelles sont toutes les valeurs possibles de x et de y ?

6.3 Finale 2009

1. Soit n un nombre naturel. Notons P_n la propriété « $n^2 - 1$ est multiple de 12 ».

a) Montrer que P_n est vraie si n est un nombre premier autre que 2 ou 3.

b) Donner un exemple de nombre composé n pour lequel P_n est vraie et un autre pour lequel P_n est fausse.

c) Si n est composé, à quelle condition sur n la propriété P_n est-elle vraie ?

2. Deux triangles rectangles ABC et ABD sont situés du même côté de leur hypoténuse commune $[AB]$. Leurs côtés AC et BD se coupent en I. Soit H la projection orthogonale de I sur AB. Montrer que IH est la bissectrice de $\widehat{CHD}$.

3. Mathilde dispose de n bougies identiques. Chaque dimanche, elle allume une ou plusieurs bougies durant une heure exactement : le premier dimanche, une bougie ; le second, deux bougies ; et ainsi de suite jusqu'au n^{e} dimanche, où elle allume les n bougies. Ce dimanche-là, à la fin de l'heure, les n bougies sont entièrement consumées.

a) Ceci est-il possible lorsque $n = 9$ (si les durées de combustion des bougies conviennent) ?

b) Ceci est-il possible lorsque $n = 10$ (si les durées de combustion des bougies conviennent) ?

c) Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles ceci est possible (si les durées de combustion des bougies conviennent). Expliquer comment procéder.

4. Un fermier possède un pré carré de 30 m de côté, clôturé sur tout son périmètre. Il désire le partager en trois parcelles de même aire. Il dispose pour cela de 50 m de clôture (qu'il n'est pas obligé d'utiliser entièrement).

a) Un tel partage est-il possible ?

b) Est-il possible de plusieurs manières non isométriques ?

6.4 Finale 2010

1. Soit $ABCD$ un carré. Sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, on construit les points A', B', C' et D' de manière que $|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'|$. Montrer que, quel que soit le point P choisi à l'intérieur du carré,

$$\mathcal{A}(AA'PD') + \mathcal{A}(CC'PB') = \mathcal{A}(BB'PA') + \mathcal{A}(DD'PC').$$

($\mathcal{A}(F)$ désigne l'aire de la figure F.)

2. Déterminer tous les nombres naturels n, carrés parfaits, tels que $n = 7p + 4$, où p est un nombre premier.

3. Soit m et n deux nombres naturels tels que l'écriture décimale de n s'obtient en permutant les chiffres de l'écriture décimale de m.

a) La somme des chiffres de $2m$ est-elle la même que celle de $2n$?

b) La somme des chiffres de $3m$ est-elle la même que celle de $3n$?

c) La somme des chiffres de $5m$ est-elle la même que celle de $5n$?

d) Si n et m sont pairs, la somme des chiffres de $m/2$ est-elle la même que celle de $n/2$?

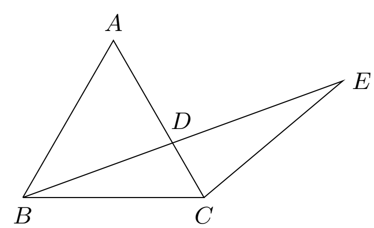
4. Soit un carré $ABCD$ de centre E. La droite CF est tangente au cercle de diamètre AB, en $F \neq B$. Quel est le rapport des aires du triangle BEF et du carré $ABCD$?

Chapitre 7

Finales maXi

7.1 Finale 2007

1. Le triangle ABC est équilatéral. La demi-droite $[BE$ coupe le segment $[AC]$ en D et est telle que $\widehat{CBE}$ mesure 20° et $|DE| = |AB|$. Que vaut l'amplitude de l'angle $\widehat{BEC}$?



2. Autour d'un cercle, on dispose successivement n chiffres a_1, a_2, …, a_n (chacun valant de 0 à 9). Partant de a_1 et tournant autour du cercle, on forme le nombre $A_1 = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$ (dont les chiffres successifs sont a_1, a_2, a_3, …, a_n) ; partant de a_2 et tournant dans le même sens, on forme le nombre $A_2 = \overline{a_2 a_3 a_4 \ldots a_n a_1}$ et ainsi de suite. La proposition « si d est un diviseur de A_1, alors d est aussi un diviseur de chacun des A_i pour $i \in \{2, 3, 4, \ldots, n\}$ » est-elle vraie

a) Pour $d = 9$?

b) Pour $d = 27$ et $n = 2007$?

c) Pour $d = 27$ et pour tout n ?

3. Considérons les ensembles de n points dont trois quelconques ne sont pas alignés. Pour un tel ensemble, formons tous les triangles dont les sommets sont dans cet ensemble.

a) Si les n points sont toujours pris dans le plan et si $n = 7$, quel est le nombre maximal de triangles qu'une droite de ce plan ne comprenant aucun des 7 points peut couper ?

b) Si les n points sont toujours pris dans l'espace et si $n = 7$, quel est le nombre maximal de triangles qu'un plan ne comprenant aucun des 7 points peut couper ?

c) Généraliser au cas où n est quelconque.

4. Soit f une fonction de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que

$$f(n+1) > f(n) \text{ et } f(f(n)) = 3n.$$

Que vaut $f(2007)$?

7.2 Finale 2008

1. Soit r le rayon du cercle inscrit, R le rayon du cercle circonscrit, p le périmètre et c la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

a) Démontrer que

$$\frac{p}{c} - \frac{r}{R} = 2.$$

b) Parmi tous les triangles rectangles, quelle est la plus grande valeur que peut prendre le rapport r/R ? Pour quels triangles rectangles ce maximum est-il atteint ?

2. Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ satisfaisant les deux conditions :

(1) Quel que soit le réel x, on a $f(x) \leqslant x$;

(2) Quels que soient les réels x et y, on a $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

3. Soient r un nombre réel strictement positif et n un nombre naturel supérieur ou égal à 3. Dans le plan, n points sont donnés et, quel que soit le choix de trois de ces points, il y en a au moins deux dont la distance est inférieure ou égale à r. Montrer qu'il existe alors deux disques de rayon r dont la réunion contient les n points considérés.

4. Sachant que les nombres entiers $X + Y + Z$ et $X^2 + Y^2 + Z^2$ sont multiples de 6, démontrer que

a) Si X, Y et Z sont des nombres entiers, $X^n + Y^n + Z^n$ est un nombre entier multiple de 6 pour tout n naturel non nul ;

b) Si X, Y et Z sont des nombres réels et si le produit XYZ est un nombre entier pair, $X^3 + Y^3 + Z^3$ est un nombre entier multiple de 6 ;

c) Si X, Y et Z sont des nombres réels et si le produit XYZ est un nombre entier pair, $X^n + Y^n + Z^n$ est un nombre entier multiple de 6 pour tout n naturel non nul.

7.3 Finale 2009

1. Soit M et N, respectivement, des points des côtés $[AB]$ et $[BC]$ d'un rectangle $ABCD$. Soit a l'aire du triangle AMD, b celle de MBN et c celle de NCD. Exprimer en fonction de a, b et c l'aire du triangle DMN.

2. Déterminer tous les triplets de nombres naturels (x, y, z) tels que

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} + \frac{z}{13} = 0{,}946\,053\,946\,053\ldots$$

(le membre de droite est un nombre décimal illimité périodique, de période 6).

3. Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que pour tous réels x et y,

$$f\big(x + f(y^3)\big) = y + f(x^3).$$

4. Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points distincts P et Q. Soit R sur $\mathcal{C}_1$ et S sur $\mathcal{C}_2$ tels que R, Q et S soient alignés. Les droites RP et SP recoupent $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1$ respectivement en N et M. Soit T l'intersection de RM et SN. Montrer que le triangle TMN est équilatéral si et seulement si MN est tangente aux deux cercles.

7.4 Finale 2010

1. a) Déterminer tous les nombres naturels multiples de 6 et possédant exactement 6 diviseurs naturels.

b) Combien y a-t-il de nombres naturels multiples de 2010 et possédant exactement 2010 diviseurs naturels ?

2. a) Démontrer que si, dans un triangle ABC, l'amplitude de l'angle en A est double de celle de l'angle en B, alors

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AC| \cdot |AB|.$$

b) La réciproque est-elle vraie ?

3. a) Pour quelle(s) valeur(s) du naturel n l'expression n^2+n+14 est-elle le carré d'un nombre naturel ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) du naturel k existe-t-il au moins un naturel n pour lequel l'expression n^2+n+k est le carré d'un nombre naturel ?

4. Dans le triangle ABC, soit H le pied de la hauteur issue de A. Soit E le point d'intersection de la bissectrice issue de B avec le côté AC. Sachant que $\widehat{BEA} = 45°$, déterminer $\widehat{EHC}$.