Olympiades Mathématiques Belges

Recueil de questions 2011 – 2014

collationné par P. Dupont & M. Sebille

Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française
(ASBL)

Table des matières

Chapitre 1

Présentation

Depuis la fondation de l'Olympiade mathématique belge, en 1976, ses questions sont consciencieusement recueillies en volumes publiés par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, ASBL.

Leur objectif est double : d'une part, enseignants et élèves peuvent y puiser une importante collection d'exercices plus ou moins « décalés » par rapport à l'habituel drill scolaire (qui conserve son importance : nous ne prônons pas son abolition !), aux énoncés parfois plus ludiques.

D'autre part, les quelque 27 000 participants à l'Olympiade y trouvent la matière d'une préparation aux épreuves, préparation certes indispensable pour ceux qui visent un classement du meilleur niveau.

C'est donc le succès de ses sept prédécesseurs qui nous a encouragés à préparer ce nouveau volume, consacré aux années 2011 à 2014. Toutes les questions d'éliminatoire et de demi-finale posées ces quatre dernières années y sont classées par niveau et par thème. Les questions de finale sont ensuite regroupées en fin de volume.

Pascal Dupont
Michel Sebille

1.1 L'Olympiade mathématique belge

L'Olympiade mathématique belge ou O.M.B. est née en 1976. Elle a traversé sans interruption toutes ses éditions annuelles successives. Les dernières de celles-ci ont permis d'enregistrer plus de 28 000 inscriptions et environ 22 000 participants effectifs en Communauté française et au Grand-Duché de Luxembourg.

De quoi remplir un stade important si on les réunissait ! Ils furent au travail durant les mêmes 90 minutes au cours d'un même après-midi de janvier.

Je reconnais la paternité de cette belle organisation mais il importe de souligner que son pouvoir organisateur est la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française ou SBPMef qui compte environ 800 membres. Il convient de souligner davantage encore que le succès de l'épreuve repose entièrement sur une foule structurée de bénévoles. Selon mon estimation prudente il s'agit d'environ 400 personnes. Des professeurs qui se chargent d'organiser et de faire passer le concours à la base c'est-à-dire dans les écoles.

Cette observation nuance modestement la célèbre et réelle démotivation des enseignants. Au sommet de cette hiérarchie ou plutôt au centre, figurent des responsables divers au nombre d'une dizaine qui réalisent l'organisation et le fonctionnement par un travail opiniâtre et quasi quotidien. Dans ces cas-là, on préfère souvent ne pas citer de noms sous prétexte des oublis mais je veux m'avancer ici en citant dans le désordre des personnes qui se sont longuement illustrées : Marianne Potvliege, Claudine Hamoir-Festraets, Jean-Paul Doignon, Pascal Dupont, Christian Van Hooste, Claude Villers, Willy Vanhamme, Lucien Kieffer, Marc De Neef, Georges Delande, Roger Bex, Alfred Warbecq, Christiane Vandeputte, Pierre Van Elsuwé, Monique Wilmet, Henri Stéphenne...

Le concours évolue en trois tours comme on dit en tennis. D'abord l'éliminatoire, puis la demi-finale et enfin la finale. La demi-finale est organisée dans 10 centres régionaux qui ont leurs équipes de responsables propres. Les responsables régionaux jouent un rôle crucial et difficile en liaison avec les écoles et avec le Secrétariat National. Quelques-uns figurent au nombre des personnes citées ci--dessus. Les demi-finales et les Centres Régionaux furent mis en place en 1982. Ces dernières années, les demi-finales ont regroupé environ 2500 participants durant les mêmes 90 minutes d'un mercredi après-midi en février.

Quels furent et quels sont les principes directeurs de l'O.M.B. ?

Le premier gouverne les autres. C'est l'importance des problèmes dans l'activité mathématique de tout niveau et de toute époque en tout lieu. Cette importance déborde du cadre mathématique. Je cite G. Polya (*Mathematical Discovery*, 1962).

Résoudre un problème, c'est chercher un chemin au travers *d'une difficulté, un chemin pour contourner un obstacle ou qui permette d'atteindre un but qui n'est pas directement accessible. Résoudre des problèmes est le propre de l'intelligence, et l'intelligence est l'attribut propre de la nature humaine : résoudre des problèmes est l'activité la plus spécifiquement humaine.*

Une parenthèse s'impose ici. Le grand public y compris ses couches les plus cultivées continuent à répandre fièrement le stéréotype selon lequel les mathématiques sont une science achevée. Rien n'est plus faux. Des centaines de milliers de résultats nouveaux sont publiés chaque année et ce rythme de production a connu une croissance accélérée depuis la Renaissance. Ce gigantesque chaos que nul ne peut dominer, est fondé sur des problèmes. Le traitement mathématique d'informations consiste notamment en observations de ces informations par le cerveau, avec ou sans échanges entre des individus. L'observation se fait en formulant des questions et en tentant d'y répondre. La réponse peut exiger de nouvelles questions et ainsi de suite. Certaines questions peuvent devenir plus significatives par leur persistance, la simplicité de leur énoncé en vue de mémorisation et de transmission, par les liens qu'elles évoquent entre des domaines plutôt séparés, etc. Ainsi naissent des problèmes. Il a été écrit que les problèmes sont le pain quotidien du mathématicien. C'est un fait commun à toute production mathématique et à toute époque. Une question pourrait être un problème pour l'enfant de 7 ans et devenir trop facile, immédiate un an plus tard. Lire 33 dans la rue est un problème à 5 ans. Peu après, il devient banal. Peu avant, il est inaccessible. Chacun est confronté constamment à la résolution de problèmes mathématiques soit modestement dans la vie quotidienne, soit pour la détente sous forme de jeux. Nombreux sont les mathématiciens convaincus que les problèmes mathématiques peuvent et doivent jouer un rôle essentiel dans toute formation. Nous étions quelques-uns à partager cette conviction en 1976 et encore à présent. Mais pourquoi faut-il insister si c'est tellement évident ? Ce ne l'est pas pour le grand public. Malheur au professeur qui poserait trop de problèmes et surtout qui voudrait que chacun en fasse. Il irait à l'encontre du courant égalitaire dominant de plus en plus.

Un deuxième principe à la base de l'O.M.B. est la conviction que l'éducation se doit d'être ludique. Pour qu'un individu de 8 ans ou de 65 ans progresse dans un problème intéressant, il est préférable de stimuler son enthousiasme. Ainsi, l'O.M.B. est un jeu !

Un troisième principe découlant pour nous du deuxième est l'intérêt de la compétition. L'expérience éducative sur le terrain montre que l'enthousiasme peut être stimulé de manière importante par l'idée de compétition. On ose à peine l'écrire à notre époque où l'idée de compétition est devenue abusivement exorbitante dans tant de domaines de nos existences et à l'opposé extirpée dans le domaine scolaire au nom de l'égalitarisme auquel j'ai déjà fait allusion. Si j'osais un sarcasme, on peut craindre qu'un jour on ne fasse plus de mathématiques dans nos classes sous prétexte que certains sont avantagés. Collègues, ce n'est pas un sarcasme ! Sous couvert de mathématique, on n'offre guère de problèmes dans nos classes. Les bénévoles qui font fonctionner l'O.M.B. et les jeunes participants doivent le saisir plus ou moins consciemment. L'O.M.B. répond à un besoin trop peu ou pas satisfait.

Un quatrième principe qui rejoint les précédents et qui les développe est de penser non pas à quelques « anormaux » aimant les maths mais à tous les enfants et adolescents, eh oui. Si la mathématique consiste dans sa quintessence en traitement d'informations par le cerveau, on peut croire que cette activité constitue un bon entraînement pour ce cerveau, on peut croire que cette activité est ainsi favorable à la résolution d'autres problèmes et on peut avoir la faiblesse de croire que cette activité est bénéfique pour tous. Quand on demande à quoi servent les maths ou qu'on doute de leur utilité il faut répondre par leur efficacité à poser des problèmes et à les résoudre. Encore convient-il que l'enseignement aborde vraiment des problèmes.

À l'O.M.B. en 1976, nous allions donc tenter d'offrir la joie du jeu-compétition à tous sans forcer personne.

Un cinquième principe à mes yeux essentiel est d'échapper au terrorisme des examens. L'O.M.B. évalue. Et de quelle manière prestigieuse pour ceux qui sortent du lot : élèves, parents, professeurs, écoles. Et de quelle manière prestigieuse pour tous ! Le cinquième principe est basé sur le réalisme. Comment faire ? S'adresser à des inscriptions individuelles ? Pas pour une compétition de masse. Trop difficile à gérer. Nous avons opté pour un contact avec les écoles de tous réseaux. Un pluralisme réussi dans le pouvoir organisateur qu'est la SBPM, dans les structures de l'O.M.B., dans son fonctionnement et surtout dans l'adhésion de la base. S'adresser à toutes les écoles ? Mais encore ? Nous ne pensions qu'aux écoles secondaires de toutes les filières ! Pas aux écoles primaires. On peut certes concevoir une version de l'O.M.B. destinée aux écoles primaires mais nous n'étions pas armé pour cette tâche et à l'heure actuelle la SBPMef et son « armée » de l'O.M.B. ne me semblent toujours pas armés pour franchir ce pas. Il le sera probablement par une autre instance. Soit. Mais comment toucher toutes les écoles secondaires ? Il fallait une liste d'adresses. Elle était disponible dans une publication du Ministère de l'Éducation Nationale. Il faut que chaque école participant au jeu ait un professeur responsable volontaire. Il est chargé de l'inscription des concurrents, en nombre quelconque, de réceptionner les questionnaires, de faire passer le premier tour, de nous communiquer un histogramme des résultats. Telle école peut avoir 400 concurrents. Telle autre peut en avoir un seul. Il n'y a pas de classement officiel des écoles ni même de classement officieux que je sache mais des observations sont possibles. Tous les élèves de la 1re à la 6^{e} étaient invités et le sont encore. Le Secrétariat National, une appellation qui s'est maintenue malgré son caractère communautaire et l'impressionnante présence luxembourgeoise, dresse un histogramme global reprenant les résultats de toutes les écoles et le communique à celles-ci. Ainsi, chacun peut se situer. Mon classement serait par exemple 152^{e} sur 760. Pas mal. Et si j'étais 639^{e} ? Ce n'est qu'un jeu et l'important vous le savez est de participer. Une autre fois, je ferai mieux. Je vois d'ici votre sourire méfiant. Et si tricherie il y a ? Réponse : si elle existe, elle ne peut guère permettre de profits. Nous n'avons pas longtemps envisagé de faire permuter entre eux les professeurs responsables, de désigner des arbitres voire des inspecteurs. L'O.M.B. se base sur la confiance. En outre, la tricherie ne pourrait obtenir aucun bénéfice si ce n'est de participer à la demi-finale. Il n'empêche que ce genre de considération agite encore de nombreuses discussions. Certains sont plus méfiants que d'autres mais la naïveté domine. Il n'est pas exclu que la confiance si souvent refusée aux professeurs et aux écoles soit un facteur de réussite de l'O.M.B.. J'aime à le croire. Les meilleurs résultats individuels en demi-finale, environ une centaine, sont convoqués à une finale. On m'a souvent demandé si je suis élitiste et parfois on ne me l'a pas envoyé dire. J'ai fini par comprendre que c'est mal vu. J'ignore encore ce qu'est le contraire d'élitiste. On veut parfois me persuader que c'est « démocratique » mais la démarche est à vrai dire démagogique. Nous voulions nous adresser à tous et pensions à eux avant tout mais nous voulions souligner les meilleurs. N'est-ce pas la véritable démocratie ? Les meilleurs en finale sont classés. Il y a une proclamation et un palmarès.

Le sixième principe consistait à cerner la forme du questionnaire. Un correcteur allait-il passer trois mois à évaluer les copies de 760 participants ? La solution ? Un questionnaire à choix multiple. Il demeure très discuté parmi nous. Sa correction est ultrarapide. Le participant introduit ses réponses sur une seule feuille et celle-ci est corrigée à l'aide d'une grille. Ultrarapide. Proche de l'informatisation à laquelle nous avons toujours rêvé. C'est la pertinence des choix multiples qui est souvent contestée. On peut répondre au hasard et horreur, obtenir la bonne réponse ! Notre dissuasion ? Il y a toujours 5 réponses proposées. Ni trois, ni sept ! Un bon équilibre. Autre dissuasion ? « Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse ». Ce système nous plaît depuis longtemps. Vous direz : il n'empêche que le concurrent peut procéder par éliminations successives et déterminer ainsi la bonne réponse sans maîtriser entièrement la question. Dissuasion : introduire dans la 5^{e} réponse une possibilité d'ouverture du style « Aucune des 4 réponses précédentes ». Bref, je n'ai pas l'intention de vous convaincre sinon du fait que les choix multiples font l'objet dans les discussions pédagogiques de certains arguments inexacts. Force est de reconnaître cependant que les « têtes » de l'O.M.B. n'aiment pas uniformément les choix multiples. Nous avons « inventé » aussi les questions dont la réponse est nécessairement un nombre entier compris entre 0 et 999. C'est un choix multiple déguisé : on offre le choix parmi 1000 réponses ! Ce n'est pas tout ! Il convient que chaque question soit suffisamment brève, qu'elle puisse être résolue en quelques minutes, du moins en principe, qu'elle soit dépourvue de toute ambiguïté, inattaquable dans sa forme, dans sa réponse et qu'elle soit si possible originale... Très très difficile et très très long à élaborer. La substance même du concours. Une des tâches les plus délicates, conduite par le jury constitué d'une vingtaine de personnes. Un jury qui est lui-même chapeauté par un président et un secrétaire dont le travail est immensément difficile. La demi-finale fonctionne selon le même schéma. Chaque année exige ainsi la production de six questionnaires de 30 questions chacun. Pour certains, la tentation de réduire le nombre de questions est très grande. Le plus simple serait qu'il n'y ait pas de questions. Et en finale ? Nous donnons quatre problèmes à traiter en quatre heures. Il est demandé d'en rédiger une solution complète avec la démonstration obéissant aux impératifs de logique et de rigueur largement communs aux mathématiciens de notre temps. Très exigeant pour les concurrents soumis à des standards qu'ils ignorent le plus souvent. Parmi les plus forts, la densité de surdoués est élevée au fil des années. Une belle récompense pour tous ! Les surdoués ne sont pas le centre de nos préoccupations mais ils nous font grand plaisir. Ils montrent que notre travail a un sens. Il convient de se rappeler que la science mathématique millénaire s'est élaborée et s'élabore plus que jamais par des surdoués. Bien entendu, on voudrait savoir aussi ce qu'est le sens de l'O.M.B. pour la masse. La seule réponse que nous possédons est la fidélité des élèves, des professeurs et des écoles au fil des années et un engouement reconnu.

Le septième principe est constitué par les trois niveaux de l'épreuve qualifiés de miNi, miDi et maXi et destinés respectivement aux élèves de 1$^{\text{re}}$–2$^{\text{e}}$, de 3$^{\text{e}}$–4$^{\text{e}}$ et de 5$^{\text{e}}$–6$^{\text{e}}$. En 1976, l'idée était de traiter tous les élèves pareillement. Une grande audace rompant avec le célèbre « saucissonnage » horizontal de notre éducation. Une audace qui nous paraissait nécessaire : certains problèmes mathématiques requièrent peu de connaissances. L'imagination est essentielle. Il n'empêche que c'était trop. Les connaissances acquises et l'expérience dans une science cumulative comme les mathématiques jouent un très grand rôle. Dès 1977, nous avons instauré la division en miNi/maXi récoltant 893 et 1130 participants. La confrontation verticale nous a valu de nombreuses satisfactions. Il n'empêche que les discussions sur l'injustice du système ont survécu. En 1996, nous passions au détriplement. Pas facile à gérer. Désormais, il y a trois olympiades dans l'O.M.B.. La catégorie la plus peuplée est la miNi avec 13 219 participants en 2014, ce qui représente près de la moitié du total. À mon sens, un bon signe pour les mathématiques mais déconcertant pour bien des personnes qui se figurent que le goût des maths vient après 17 ans. Si j'étais professeur dans une école ou directeur, j'aimerais me positionner par rapport à d'autres grâce à l'O.M.B.. Il est permis de croire que je ne suis pas le seul à penser dans ces termes.

Et les coûts ? L'O.M.B. est autofinancée et bénéficiaire. Chaque participant paye un droit d'inscription de 1,20 €. Le bénévolat représente évidemment une clé marquante de l'équation financière. L'O.M.B. mériterait néanmoins le financement d'un emploi administratif à temps plein. En résumé, l'Olympiade mathématique belge est un grand succès dû en partie à l'efficacité, la rigueur, la disponibilité et l'enthousiasme de ses nombreux dirigeants. Elle a servi de modèle à bon nombre d'autres disciplines. Elle offre un stock considérable de problèmes intéressants pour les professeurs et le grand public.

Francis Buekenhout, ULB

1.2 Tableau des nombres de participants

Année	miNi		miDi		maXi	
1976	—		—		760	
1977	893		—		1130	
1978	1012		—		1271	
1979	1204		—		1447	
1980	1390		—		1778	
1981	1482		—		1849	
1982	3021	(570)	—		3164	(693)
1983	3010	(664)	—		3292	(689)
1984	4424	(871)	—		3933	(782)
1985	5563	(926)	—		4621	(836)
1986	6339	(981)	—		5146	(871)
1987	7779	(1249)	—		6285	(1088)
1988	8149	(1125)	—		6834	(1086)
1989	9140	(1250)	—		7632	(1140)
1990	10 488	(1195)	—		8236	(1154)
1991	7517	(1074)	—		5568	(973)
1992	9967	(1266)	—		6715	(984)
1993	11 020	(1215)	—		7941	(1006)
1994	10 498	(1314)	—		7288	(1065)
1995	11 082	(1373)	—		7423	(1082)
1996	8909	(959)	7129	(919)	4937	(730)
1997	8993	(954)	6838	(972)	5038	(765)
1998	9805	(979)	6786	(842)	5376	(730)
1999	9934	(925)	6365	(719)	4995	(654)
2000	10 306	(980)	6603	(770)	4811	(662)
2001	10 576	(1022)	6598	(825)	4592	(650)
2002	10 758	(1030)	6675	(786)	4463	(637)
2003	10 912	(1022)	6604	(814)	4589	(652)
2004	12 987	(1024)	8062	(765)	5697	(598)
2005	13 289	(1073)	8833	(798)	5968	(669)
2006	13 332	(1073)	8026	(795)	5819	(691)
2007	12 991	(977)	8524	(748)	5881	(620)
2008	13 849	(1115)	8258	(808)	6134	(698)
2009	13 604	(1108)	8019	(758)	5860	(667)
2010	13 416	(1060)	7507	(705)	5922	(658)
2011	13 436	(1038)	7421	(679)	6008	(688)
2012	13 285	(998)	7408	(666)	5961	(681)
2013	13 532	(998)	7062	(558)	6346	(617)
2014	13 219	(1021)	7171	(654)	6394	(722)

Entre parenthèses, figurent les nombres de demi-finalistes.

1.3 L'Olympiade mathématique internationale

Qu'elles soient nationales ou internationales, les Olympiades mathématiques s'inscrivent dans l'évolution actuelle de la pédagogie des mathématiques vers un enseignement faisant une plus grande part à l'activité personnelle des élèves. Privilégiant la réflexion à la mémorisation encyclopédique, elles proposent aux élèves des questions nécessitant une bonne compréhension des concepts, ainsi que des capacités d'analyse, de synthèse et d'imagination. L'O.M.I. constitue l'aboutissement logique du processus qui, pour l'élève belge, commence avec la participation à l'O.M.B.. L'Olympiade mathématique internationale a été organisée pour la première fois en 1959. Pendant plusieurs années, seuls les pays du bloc soviétique y participaient. Elle s'est élargie progressivement. L'O.M.I. est organisée par un Comité désigné par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Celle-ci est la section pédagogique de l'Union Mathématique Internationale, organisme lié à l'UNESCO. La Belgique est représentée au sein de cette Union via son Comité National de Mathématiques, lequel émane de l'Académie Royale des Arts, Sciences et Lettres. Lorsqu'un pays désire organiser l'O.M.I., son gouvernement fait (plusieurs années à l'avance) acte de candidature. Le moment venu, le pays organisateur adresse des invitations officielles aux pays susceptibles de participer. En Belgique, l'invitation est reçue par le Ministère des Affaires Étrangères, qui la transmet aux deux Ministères Communautaires de l'Enseignement. Chaque pays peut présenter un maximum de 6 élèves, n'ayant pas encore entamé l'enseignement supérieur. Chaque élève est invité à résoudre 6 problèmes. La moitié, au plus, des concurrents sont récompensés par des médailles d'or, d'argent ou de bronze. La Belgique a participé pour la première fois à l'O.M.I. en 1969, sans aucune préparation. Les résultats ne furent guère brillants. À la suite de la création de l'O.M.B., une seconde tentative eut lieu en 1977. Les résultats furent meilleurs mais néanmoins décevants. La SBPMef proposa alors à la Direction Générale de l'Organisation des Études d'assurer la préparation et la sélection des concurrents belges, ce qui fut fait à partir de 1979. Quelques années plus tard, la Communauté flamande exprima le désir de participer également à l'O.M.I. Depuis, la délégation belge est composée en parts égales d'élèves francophones et néerlandophones.

En 36 participations, les concurrents belges ont obtenu une médaille d'or, 14 médailles d'argent et 53 médailles de bronze. Ces résultats placent la Belgique au milieu d'un classement dominé par les grands pays : Chine, Russie, É.-U. d'A., Allemagne. En moyenne, la Belgique se classe honorablement parmi les petits pays. La SBPMef agit avec l'accord et pour le compte du Ministère de l'enseignement obligatoire de la fédération Wallonie-Bruxelles. Elle repère des élèves brillants parmi les participants à l'Olympiade mathématique belge. Elle les invite à prendre part à des week-ends de préparation, qui se déroulent au domaine de la Marlagne à Wépion. Les séances de travail sont assurées par des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et de l'enseignement universitaire.

1.4 La SBPMef

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française est née en 1975 à la suite d'une restructuration de la « Société Belge des Professeurs de Mathématique » créée elle-même en 1953. Son but principal est de contribuer à la promotion et à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique.

La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde.

La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un moyen d'expression et un art de raisonner. Les grandes étapes de son développement ont toujours correspondu à celles de l'évolution de la pensée humaine. Ainsi, elle a joué et continue de jouer un rôle de premier plan dans le développement culturel de l'humanité. D'où l'importance de l'objectif que s'est fixé la SBPMef.

La SBPMef est une association sans but lucratif qui se veut représentative de l'ensemble des professeurs de mathématique de la partie francophone du pays. Elle rassemble des enseignants de tous les réseaux (Communauté française, Enseignement catholique, Enseignement officiel neutre subventionné, Enseignement libre subventionné indépendant) et de tous les niveaux d'enseignement (instituteurs, régents, licenciés, professeurs d'écoles supérieures, universitaires ou non universitaires). Sa réflexion porte sur toutes les facettes de l'enseignement des mathématiques. Elle a ainsi été amenée à consacrer une grande partie de son activité à des sujets tels que l'impact sur l'enseignement des moyens modernes de traitement de l'information, les idées pédagogiques nouvelles, l'évaluation, les socles de compétence...

Le contenu des programmes de cours et les questions d'organisation de l'enseignement des mathématiques retiennent également son attention.

Pour nourrir sa réflexion et diffuser un maximum d'information, la SBPMef s'est dotée de moyens qui ont fait la preuve de leur efficacité. Chaque année, elle organise un congrès de trois jours où plus de deux cents professeurs échangent leurs expériences. La revue *Losanges* et le bulletin d'informations *SBPM-Infor*, ainsi que diverses brochures, constituent des supports d'information à la disposition des membres. Des commissions permanentes, auxquelles peuvent participer tous les membres, réfléchissent plus particulièrement à l'évolution de l'enseignement de la mathématique au niveau secondaire et préparent les prises de position de la Société.

La SBPMef s'adresse aussi directement aux élèves, par le canal de l'Olympiade mathématique belge. Elle les incite ainsi à s'intéresser à l'activité de base du mathématicien, à savoir la résolution de problèmes. C'est elle également qui assure la préparation des jeunes qui représentent la Communauté française de Belgique à l'Olympiade mathématique internationale.

Enfin, la SBPMef tient sa place au sein de la communauté mathématique nationale et internationale et plus particulièrement au sein des groupes qui se préoccupent de l'enseignement des mathématiques. Une convention l'associe aux activités du CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques).

Au niveau institutionnel, de nombreux contacts lient la SBPMef à diverses sociétés étrangères, avec qui elle échange des informations et des publications. Au niveau individuel, nombreux sont les membres de la SBPMef qui participent aux congrès internationaux qui ont lieu chaque année.

Enfin, la SBPMef figure parmi les membres fondateurs de la Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques créée le 12 mai 1999.

Renseignements pratiques :

Siège administratif :	Rue du Onze Novembre 24 B-7000 MONS
Téléphone & fax :	065.31.91.80
Courriel :	`sbpm@sbpm.be`
Adresse Internet :	`http://www.sbpm.be`

En consultant les pages de ce site, vous pourrez trouver tous les renseignements utiles concernant les activités et les publications de la SBPMef.

1.5 Conventions utilisées

Les notations chiffrées qui figurent en regard de chacune des questions permettent de déterminer s'il s'agit d'une question d'éliminatoire ou d'une question de demi-finale, la catégorie concernée et le numéro de la question dans le questionnaire original.

- `E`a : Éliminatoire de l'année a,
  `D`a : Demi-finale de l'année a ;
- `N`q : Catégorie miNi, question q,
  `D`q : Catégorie miDi, question q,
  `X`q : Catégorie maXi, question q.

Exemple :
Le cartouche

230
E12
N07

signifie que la 230e question de ce recueil n'est autre que la question 07 de l'éliminatoire 2012 de la miNi Olympiade.

Chapitre 2

Éliminatoires et demi-finales miNi

2.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

N	11		12		13		14	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	1	13	26	39	55	165	85	100
2	2	14	27	146	156	70	172	183
3	3	15	205	40	56	166	86	101
4	4	16	28	41	57	217	87	102
5	5	17	29	42	157	71	88	103
6	198	128	30	43	58	167	173	104
7	115	18	230	210	59	72	89	184
8	6	19	31	147	60	73	90	105
9	7	20	32	44	61	74	91	238
10	116	227	137	148	62	75	174	239
11	117	129	33	149	158	76	92	197
12	8	200	231	45	159	234	93	185
13	9	130	138	211	63	77	175	106
14	118	21	206	46	213	78	221	107
15	10	201	139	47	160	79	94	186
16	11	131	34	48	161	235	176	108
17	119	22	140	150	214	80	95	187
18	120	228	141	232	215	168	177	109
19	121	132	207	49	64	81	96	188
20	122	133	35	50	233	196	178	110
21	12	202	208	151	162	169	97	189
22	224	23	36	152	65	170	179	111
23	123	134	209	51	66	82	222	190
24	199	135	142	153	163	218	180	112
25	124	229	143	52	67	171	237	191
26	225	136	144	212	68	219	223	113
27	125	203	37	154	216	83	181	192
28	126	204	38	53	164	84	98	193
29	127	24	145	155	195	220	182	114
30	226	25	194	54	69	236	99	240

2.2 Algèbre & arithmétique

001
E11
N01

$996 + 1015 =$

(A) 2011 (B) 2012 (C) 2013 (D) 2014 (E) 2015

002
E11
N02

$15 + 7 \times 4 - 3 =$

(A) 22 (B) 40 (C) 76 (D) 85 (E) 91

003
E11
N03

Une publicité annonce « $-30\,\%$ sur tous les articles » ; quel est le prix réduit d'un article initialement vendu à 95 € ?

(A) 5 € (B) 28,50 € (C) 65 € (D) 66,50 € (E) 92 €

004
E11
N04

Quel nombre faut-il soustraire à -12 pour obtenir -34 ?

(A) -46 (B) -22 (C) 22 (D) 26 (E) 46

005
E11
N05

Combien valent les $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{6}$?

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{6}{9}$ (E) $\frac{8}{9}$

006
E11
N08

Une seule des affirmations suivantes est correcte. Laquelle ?

(A) Le cube du cube d'un nombre naturel est toujours impair.
(B) Le cube du cube d'un nombre naturel est toujours multiple de 3.
(C) Le cube du cube d'un nombre naturel est toujours multiple de 9.
(D) Le cube du cube d'un nombre naturel est toujours multiple de 27.
(E) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

007
E11
N09

$$-\frac{7}{18} + \frac{6}{27} =$$

(A) $-\dfrac{1}{45}$ (B) $-\dfrac{13}{45}$ (C) $\dfrac{1}{9}$ (D) $-\dfrac{1}{9}$ (E) $-\dfrac{1}{6}$

008 E11 N12

Sandrine achète des chaussures en solde dont le prix est diminué de 20 % ; elle obtient encore une remise supplémentaire de 10 % du prix soldé. Quel est le pourcentage total de la réduction obtenue ?

(A) 30 % (B) 28 % (C) 26 % (D) 25 % (E) 24 %

009 E11 N13

Une seule des affirmations suivantes est correcte. Laquelle ?

(A) L'inverse d'un produit vaut la somme des inverses.
(B) L'opposé d'un produit vaut le produit des opposés.
(C) Le carré d'une somme vaut la somme des carrés.
(D) L'inverse d'une somme vaut la somme des inverses.
(E) L'opposé d'une somme vaut la somme des opposés.

010 E11 N15

Sans réponse préformulée — La moyenne de 12 et de deux autres nombres égaux entre eux est de 16. Quelle est la valeur de ces deux autres nombres ?

011 E11 N16

Le produit de deux quelconques des nombres se terminant par le chiffre c est un nombre qui se termine encore par le chiffre c. Quel est l'ensemble des chiffres c pour lesquels ceci est vrai ?

(A) $\{0, 1\}$
(B) $\{0, 1, 5\}$
(C) $\{0, 1, 5, 6\}$
(D) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
(E) $\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

012 E11 N21

Si deux nombres sont tels que leur somme est inférieure à leur différence, alors nécessairement :

(A) Leur différence est positive ;
(B) Leur somme est négative ;
(C) Les deux nombres sont opposés ;
(D) Les deux nombres sont négatifs ;
(E) L'un des nombres est négatif.

013 D11 N01

$(1+2+3)\times 4-(5+6+7)=$

(A) 0 (B) 3 (C) -3 (D) 6 (E) -6

014 D11 N02

L'opposé de $35-80$ est :

(A) $-35-80$
(B) $35+80$
(C) $80-35$
(D) $\dfrac{1}{35-80}$
(E) $\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{80}$

015 D11 N03

$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)=$

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) -7 (E) Une autre réponse

016 D11 N04

$3^2\times 2^3=$

(A) 5^5 (B) 5^6 (C) 6^5 (D) 6^6 (E) Une autre réponse

017 D11 N05

Quelle est la forme irréductible de la fraction $\dfrac{-84}{70}$?

(A) $-\dfrac{42}{35}$ (B) $-\dfrac{12}{10}$ (C) $\dfrac{42}{-35}$ (D) $-\dfrac{5}{6}$ (E) $-\dfrac{6}{5}$

018 D11 N07

Sans réponse préformulée — Que vaut le naturel a, si

$$3^2+4^2+6^2+8^2=5^2+a^2\ ?$$

019 D11 N08

Un livre compte 320 pages. Arthur le lira en 4 jours. Aujourd'hui, il a lu 20 pages de plus qu'avant-hier et 5 pages de moins qu'hier ; il lui reste encore 50 pages pour demain. Combien de pages Arthur a-t-il lues aujourd'hui ?

(A) 35 (B) 50 (C) 80 (D) 95 (E) 100

020 D11 N09

Sans réponse préformulée — Trois nombres a, b et c sont tels que $a-b=$ $=60$ et $b=25+c$. Que vaut $a-c$?

021 D11 N14

Quelle est la forme développée de $2(x-1)^2$?

(A) $2x^2 - 2$
(B) $4x^2 - 8x + 4$
(C) $2x^2 - 4x + 2$
(D) $4x^2 - 4$
(E) $2x^2 - 4x + 4$

022 D11 N17

Que vaut le produit $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)$?

(A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{99}{100}$ (C) $\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times 99}{100}$ (D) $\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times 100}$

(E) Une autre réponse

023 D11 N22

Le plus grand commun diviseur de a et b est 12 et celui de b et c est 35. Quel est le plus grand commun diviseur de a et c ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7

(E) Il n'est pas déterminé par les données.

024 D11 N29

Sur une facture, les 2/3 du montant hors TVA doivent être majorés d'une TVA de 20 %, tandis que le taux de la TVA sur le reste n'est que de 5 %. Si le montant total de cette facture, TVA comprise, est de 207 €, quel est le montant en euros de la TVA payée ?

(A) 27 (B) 40,14 (C) 51,75 (D) 160,56 (E) 180

025 D11 N30

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre d'entiers à trois chiffres qui ont au plus deux chiffres égaux ?

026 E12 N01

$(2+0\times 1+2)-(2\times 0+1\times 2) =$

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 2012 (E) Une autre réponse

027 E12 N02

Combien y a-t-il de dixièmes dans une dizaine ?

(A) 10 (B) 20 (C) 100 (D) 200 (E) 1000

028 E12 N04

Que vaut $13 - 2 \times (9 - 3 \times (6 - 4))$?

(A) 132 (B) 7 (C) 5 (D) 0 (E) -11

029 E12 N05

Sans réponse préformulée — Que vaut le tiers du carré du quart de soixante ?

030 E12 N06

Un limonadier lance une campagne promotionnelle « 21+3 gratuites » sur le casier de 24 bouteilles. À quelle réduction de prix cela correspond-il ?

(A) 3 % (B) 10 % (C) 12,5 % (D) 14,28 . . . % (E) 15 %

031 E12 N08

Si 64 représente les deux tiers d'un nombre, que valent les trois quarts de ce nombre ?

(A) 24 (B) 48 (C) 72 (D) 96 (E) 128

032 E12 N09

Sans réponse préformulée — Lorsque je vais de chez moi à la boulangerie, ma roue de vélo accomplit exactement 212 tours. Si je prends un autre vélo dont la roue a un rayon moitié moins grand, combien de tours seront accomplis ?

033 E12 N11

Parmi les cinq nombres 123 456, 123 465, 123 654, 126 543 et 165 432, combien sont multiples de 6 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

034 E12 N16

Policarpe veut carreler un hall rectangulaire de 2,4 m × 1,5 m avec des dalles carrées d'au moins 9 cm de côté. Combien y a-t-il de grandeurs de dalles qui permettent de carreler le sol sans découpage de dalle, si en outre leur côté commun doit mesurer un nombre entier de centimètres ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

035 E12 N20

Lequel des nombres suivants ne divise pas le produit de tous les nombres naturels non nuls qui lui sont strictement inférieurs ?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

036 E12 N22

Alice doit envoyer 200 invitations de mariage. Sachant qu'il faut vingt minutes à dix personnes pour écrire l'adresse et mettre sous enveloppe cent invitations, combien de temps faudra-t-il à Alice et à ses quatre amis pour préparer les 200 invitations ?

(A) 20 min (B) 1 h 20 (C) 1 h 40 (D) 2 h (E) 3 h 20

037 E12 N27

Quelle est la 2012ᵉ décimale de 22/7 ?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 7

038 E12 N28

Sans réponse préformulée — La somme des âges de Benoit et de Jean-Paul est de 64 ans ; celle de Benoit et de Sylvain, 72 ans ; celle de Jean-Paul et de Sylvain, 78 ans. Quel est, en années, l'âge de Benoit ?

039 D12 N01

Que vaut $(1-2+3-4+5-6+7-8+9-10)(10-9+8-7+6-5+4-3+2-1)$?

(A) -25 (B) -16 (C) 0 (D) 16 (E) 25

040 D12 N03

Sans réponse préformulée — Que vaut $24/2 \times 3 + 42/7 \times 3$?

041 D12 N04

$(62-36)(62-36)(62-36)+(36-62)(36-62)(36-62) =$

(A) 52^3 (B) 2×26^3 (C) 26^3 (D) 0 (E) -2×26^3

042 D12 N05

Combien d'entiers compris entre 32 et 395 sont divisibles par 6 ?

(A) 57 (B) 58 (C) 59 (D) 60 (E) 61

043 D12 N06

Sans réponse préformulée — Que vaut $\dfrac{22}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{5}}}$?

044 D12 N09

Laquelle des cinq affirmations suivantes est *fausse* ?

(A) La différence de deux nombres entiers est toujours un nombre entier.
(B) La somme de deux nombres naturels est toujours un nombre naturel.
(C) La somme de deux nombres entiers est toujours un nombre entier.
(D) La somme de deux nombres premiers est toujours un nombre premier.
(E) Le produit de deux nombres naturels est toujours un nombre naturel.

045 D12 N12

Je viens de terminer le premier quart du troisième tiers de mon travail. Quelle fraction de mon travail ai-je effectuée ?

(A) 1/4 (B) 5/12 (C) 3/4 (D) 5/6 (E) 1

046 D12 N14

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit naturel supérieur à 100 qui est le produit de deux nombres premiers consécutifs ?

047 D12 N15

Certains nombres entiers naturels peuvent être décomposés en une somme de deux carrés d'entiers naturels. Par exemple 5 se décompose en $1^2 + 2^2$, mais 7 n'admet pas une telle décomposition. Parmi les nombres suivants, un seul *ne* peut *pas* être décomposé en une somme de deux carrés. Lequel ?

(A) 37 (B) 43 (C) 61 (D) 89 (E) 97

048 D12 N16

Deux entiers ont une somme de 48. Que vaut la somme de leurs carrés ?

(A) 2304 (B) 1152 (C) 1664 (D) Une autre valeur
(E) Les données ne permettent pas de le déterminer.

049 D12 N19

Le produit des diviseurs de l'un des nombres suivants est égal au carré de ce nombre. Lequel ?

(A) 11 (B) 11^2 (C) 11^3 (D) 11^4 (E) 11^5

050 D12 N20

Parmi les cinq nombres

$$\frac{12\,345\,678\,900\,987\,654\,321}{9}, \frac{234\,567\,890\,098\,765\,432}{4},$$
$$\frac{3\,456\,789\,009\,876\,543}{3}, \frac{6\,789\,009\,876}{6} \text{ et } \frac{34\,567\,890\,098}{8},$$

combien sont des entiers ?

(A) Aucun (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

051 D12 N23

Sans réponse préformulée — Quel est le plus grand nombre naturel inférieur à 1000 admettant exactement trois diviseurs naturels ?

052 D12 N25

Sans réponse préformulée — Un *nombre palindrome* est un nombre naturel qui conserve la même valeur lorsqu'il est lu de droite à gauche, comme par exemple 66 ou 2442. Combien existe-t-il de nombres palindromes dans l'intervalle $[\,17; 1000\,]$?

053 D12 N28

Sans réponse préformulée — Sachant que 101, 103 et 107 sont premiers, quel est le nombre de diviseurs de $101 \times 103 \times 107$?

054 D12 N30

La plus grande puissance de 2 divisant x est 2^{14} ; la plus grande puissance de 2 divisant y est 2^{16}. Quelle est la plus grande puissance de 2 divisant $\mathrm{PGCD}(x, y) \cdot \mathrm{PPCM}(x, y)$?

(A) 2^0 (B) 2^{14} (C) 2^{15} (D) 2^{16} (E) 2^{30}

055 E13 N01

Parmi ces nombres, un seul n'est pas multiple de 3. Lequel ?

(A) 399 (B) 663 (C) 929 (D) 999 (E) 36912

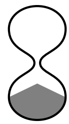
056 E13 N03

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots + 2013 =$

(A) -1008 (B) 1007 (C) 1006 (D) -19 (E) 1008

057 E13 N04

Un sablier permet de mesurer une durée de trois minutes. Combien de fois faut-il le retourner pour mesurer 2013 minutes ? (La mesure commence avec le sablier au repos, le sable en bas.)



(A) 2014 (B) 2013 (C) 672 (D) 671 (E) 670

058 E13 N06

$4 + 12 : 4 - 2 \times 3 =$

(A) -2 (B) 1 (C) 6 (D) 15 (E) 24

059 E13 N07

Marion doit ranger 100 œufs dans des boites de six. Combien de boites lui faudra-t-il au minimum ?

(A) 160 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

060 E13 N08

Le nombre $2^2 \times 3 \times 5$ n'est pas divisible par

(A) 30 ; (B) 15 ; (C) 12 ; (D) 9 ; (E) 6.

061 E13 N09

Parmi les nombres suivants, lequel est premier ?

(A) 69 (B) 169 (C) 269 (D) 369 (E) 469

062 E13 N10

Dans l'expression « Un tiers de quart de poil de mollet de fourmi », de quelle fraction de poil de mollet de fourmi est-il question ?

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{4}{3}$

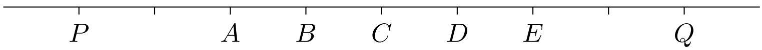
063 E13 N13

Un paquet de 8 biscuits est vendu d'ordinaire à 3 €. Une promotion propose ce paquet au même prix, mais augmenté de 2 biscuits gratuits. Un client veut acheter 40 biscuits ; quelle économie réalise-t-il ?

(A) 2,5 € (B) 3 € (C) 3,75 € (D) 5 € (E) 6,25 €

064
E13
N19

Sur la droite graduée ci-dessous, si à P correspond la graduation $-1/5$ et à Q la graduation $1/3$, à quel point correspond la graduation 0 ?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

065
E13
N22

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de trois chiffres dont le chiffre des dizaines est le triple de celui des unités et la moitié de celui des centaines ?

066
E13
N23

Albert a deux petits-fils. En 2013, lors de l'anniversaire du plus jeune, il remarque que le produit de leurs âges et du sien vaut 2013. Sachant qu'aucun des deux n'a encore atteint la majorité à ce moment-là, en quelle année le plus jeune petit-fils fêtera-t-il ses 18 ans ?

(A) 2020 (B) 2025 (C) 2027 (D) 2028 (E) 2031

067
E13
N25

Sans réponse préformulée — Quel est le plus grand naturel inférieur à 1000 et à la fois multiple de 4 et de 9 ?

068
E13
N26

Parmi les expressions suivantes, où n est un nombre naturel, combien représentent toujours un multiple de 3 ?

$$3n, \quad 2n+1, \quad 9n, \quad 3n+1, \quad 3n+3, \quad 12n+6, \quad n+3$$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

069
E13
N30

Les nombres naturels A, B, C, D et E satisfont :
- B est le double de A,
- C est le triple de B,
- D est le quadruple de C,
- E est le quintuple de D,
- La différence de E et A vaut 833.

Combien de ces cinq nombres sont pairs ?

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5
(E) Les informations données ne suffisent pas pour déterminer la réponse.

070
D13
N02

Sans réponse préformulée — Que vaut $(1^2+2^2)(3^2+4^2)-(1\times 3+2\times 4)^2$?

071
D13
N05

Sans réponse préformulée — La somme de deux nombres naturels est 266 et leur quotient est 13. Quel est le plus grand de ces deux nombres ?

072
D13
N07

Dans une assemblée d'hommes (à deux yeux) et de cyclopes (à un œil), on compte 15 yeux. Si le nombre de cyclopes est un multiple de 7, combien y a-t-il d'hommes ?

(A) 0 (B) 4 (C) 8 (D) 14 (E) 15

073
D13
N08

Sans réponse préformulée — Un nombre de deux chiffres diminue de 27 quand on renverse l'ordre de ses chiffres. Si la somme de ses chiffres est 13, quel est le nombre de départ ?

074
D13
N09

Sans réponse préformulée — Chacun des naturels de 1 à 10 est multiplié par chacun des naturels de 1 à 10. Parmi les 100 produits obtenus, combien sont impairs ?

075
D13
N10

$10^{180}/10^{30} =$

(A) 10^6 (B) 10^{18} (C) 10^{30} (D) 10^{150} (E) 10^{210}

076
D13
N11

Sachant qu'un nombre est un multiple de 10, augmenté de 7, quel est le reste de sa division par 5 ?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 7 (E) Cela dépend du nombre.

077
D13
N13

Sans réponse préformulée — Si $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{x}{16}$, que vaut x ?

078 D13 N14

Si le prix d'une marchandise A est supérieur de 50 % à celui d'une marchandise B, de quel pourcentage le prix de la marchandise B est-il inférieur à celui de A ?

(A) 75 % (B) 50 % (C) 33,33... % (D) 25 %
(E) Les données sont insuffisantes pour déterminer la réponse.

079 D13 N15

Un grand seigneur voulut, avant de mourir, partager son vaste territoire de 2280 hectares entre ses trois fils, chacun recevant une part dont l'aire est proportionnelle à son âge : 13, 20 et 24 ans. Combien d'hectares reçut le plus jeune des frères ?

(A) 520 (B) 760 (C) 800 (D) 960 (E) Une autre réponse

080 D13 N17

Sans réponse préformulée — Quel est le plus grand nombre naturel par lequel diviser 1268 et 1802 pour que les restes respectifs soient 8 et 17 ?

081 D13 N19

Solange a 22 bouteilles identiques de jus. Avec 14 de ces bouteilles, elle remplit exactement 35 petits verres et avec les 8 bouteilles restantes, elle remplit exactement 12 grands verres. Quel est le rapport du volume d'un grand verre à celui d'un petit ?

(A) 1 (B) 5/3 (C) 3/2 (D) 7/4 (E) 4/7

082 D13 N23

Sans réponse préformulée — Les nombres entiers a, b, c et d sont tels que $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$ et $d < 40$. Quelle est la valeur maximale de a ?

083 D13 N27

Quel est le nombre de chiffres du plus petit multiple non nul de 175 formé uniquement des chiffres 0 et 1 ?

(A) 6 (B) 7 (C) 11 (D) 12
(E) Un nombre strictement supérieur à 12

084 D13 N28

Quel est le plus petit nombre naturel ayant exactement 18 diviseurs ?

(A) 120 (B) 288 (C) 300 (D) 450 (E) Une autre réponse

085 E14 N01

Lequel de ces nombres est le plus petit ?

(A) $\dfrac{1}{1024}$ (B) $\dfrac{1}{1042}$ (C) $\dfrac{1}{1204}$ (D) $\dfrac{1}{1420}$ (E) $\dfrac{1}{2014}$

086 E14 N03

Que vaut $\dfrac{2}{10} + \dfrac{4}{100} + \dfrac{6}{1000}$?

(A) 0,012 (B) 0,0246 (C) 0,246 (D) 0,642 (E) 2,46

087 E14 N04

Une voiture roule à 130 km/h. Quelle distance parcourt-elle en 1 heure et 45 minutes ?

(A) 162,5 km (B) 200,5 km (C) 217 km (D) 227,5 km

(E) Une autre réponse

088 E14 N05

Parti du 4^e étage, l'ascenseur d'un bâtiment descend de 6 étages, remonte de 2, puis encore de 3 pour redescendre de 4 et monter de 7. À quel étage se trouve-t-il ?

(A) -1 (B) 0 (C) 2 (D) 4 (E) 6

089 E14 N07

Sans réponse préformulée — Dans une école de 720 élèves, un quart des élèves sont en 1^{re} ou en 2^e années. Deux tiers des autres élèves sont en 3^e ou en 4^e années. Combien y a-t-il d'élèves en 5^e ou en 6^e années ?

090 E14 N08

Un ordinateur peut effectuer 10 millions d'opérations par seconde. Combien peut-il en effectuer en une heure ?

(A) 3,6 milliards

(B) 6 milliards

(C) 36 milliards

(D) 60 milliards

(E) 216 milliards

091 E14 N09

Que vaut $(2 \times 3 \times 4) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$?

(A) 1 (B) 3 (C) 9 (D) 24 (E) 26

092 E14 N11

Un sportif a couru un marathon en 3 h 13 min 27 s. Il est arrivé 57 min 49 s après le vainqueur. Quel est le temps de celui-ci ?

(A) 2 h 15 min 38 s
(B) 2 h 15 min 48 s
(C) 2 h 17 min 38 s
(D) 2 h 44 min 22 s
(E) 4 h 11 min 16 s

093 E14 N12

Si les 20 % d'un nombre valent 12, que valent les 30 % de ce nombre ?

(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) Une autre réponse

094 E14 N15

$1^{2^{3^{4^5}}} =$

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 120 (E) Une autre valeur

095 E14 N17

Sans réponse préformulée — Dans une école, des professeurs organisent un tournoi sportif auquel participeront les 81 élèves de 2^e, parmi lesquels il y a 63 garçons. Il doit y avoir au moins quatre équipes, qui doivent toutes compter le même nombre de filles ainsi que le même nombre de garçons. Combien y aura-t-il de garçons dans chaque équipe ?

096 E14 N19

Sans réponse préformulée — Mathieu collectionne depuis peu les porte-clés. Il en possède plus de 10 mais moins de 100. S'il les range par paquets de 6, il lui en reste 3. S'il les range par paquets de 5, il lui en reste aussi 3. S'il les range par paquets de 4, il lui en reste encore 3. Combien a-t-il de porteclés ?

097 E14 N21

De combien de manières peut-on choisir trois nombres distincts dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sans tenir compte de l'ordre, de manière que 5 soit choisi et que la somme vaille 15 ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

098
E14
N28

Lorsque la touche $\boxed{x^2}$ d'une calculatrice est enfoncée, le nombre affiché est remplacé par son carré. Si la calculatrice affiche initialement le nombre 2, quel est le plus petit nombre de pressions sur cette touche qui conduit à l'affichage d'un nombre supérieur à 2014 ?

(A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 1012 (E) Une autre valeur

099
E14
N30

Sans réponse préformulée — Dans la division de n par 312, le reste vaut 117. Quel est le plus petit nombre qu'il faut ajouter à n pour augmenter le quotient de 3 unités ?

100
D14
N01

Que vaut $3 \times 24 + 5 - 7 \times 9 : 3$?

(A) 24 (B) 56 (C) 66 (D) 198 (E) 210

101
D14
N03

Sans réponse préformulée — Que valent 70 % de 70 ?

102
D14
N04

Sans réponse préformulée — Le réveil de François a été réglé à 6 h 25 tandis que celui de son frère Quentin a été réglé à 8 h 10. Combien de minutes sépareront les deux sonneries le même matin ?

103
D14
N05

Sans réponse préformulée — François a deux fois autant de billes que Paul et trois fois autant que Luc. Ils ont à eux trois 55 billes. Combien François a-t-il de billes ?

104
D14
N06

Sans réponse préformulée — Un nombre premier est formé de deux chiffres, qui sont eux-mêmes des nombres premiers. Si on échange les deux chiffres, on obtient un nombre, premier lui aussi, plus grand que le nombre initial. Quel est le nombre initial ?

105
D14
N08

Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de nombres carrés parfaits entre 17 et 2014 ?

106 D14 N13

Dans un club de sport, on dénombre deux garçons pour trois filles. Si ce club se compose de 55 adolescents, quel est le pourcentage des garçons dans ce club ?

(A) 12 % (B) 20 % (C) 30 % (D) 40 % (E) 66,66 . . . %

107 D14 N14

Sans réponse préformulée — En faisant presser ses pommes, Pascal a obtenu 85 L de jus ; il le met en bouteilles de 75 cL. Combien aura-t-il de bouteilles complètement remplies ?

108 D14 N16

Sans réponse préformulée — Un nombre est multiplié par le double de son inverse et le résultat obtenu est égal au nombre de départ. Que vaut ce nombre ?

109 D14 N18

Pascal et Benoit jouent à un jeu divisé en 9 manches (sans manche nulle). À la fin de chaque manche, le vainqueur marque 7 points et le perdant en marque 3. Le score final de Pascal est 51. Combien de manches ont été remportées par Benoit ?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 7

110 D14 N20

Le double du carré de deux, augmenté du cube du triple de trois vaut

(A) 35 (B) 49 (C) 729 (D) 737 (E) 745

111 D14 N22

Sans réponse préformulée — La somme des chiffres d'un nombre de trois chiffres vaut 9. Le chiffre des dizaines dépasse le chiffre des unités de 2. Le nombre lu de droite à gauche dépasse le nombre initial de 198. Quel est le nombre initial ?

112 D14 N24

Quatre années de suite, aux rentrées de 2003 à 2006, le nombre d'élèves inscrits dans l'école du Pré a augmenté de 20 %. Ainsi, de la rentrée 2002 à la rentrée 2006, le nombre d'élèves de cette école :

(A) A augmenté de 60 % ;

(B) A augmenté de 80 % ;

(C) A un peu plus que doublé ;

(D) A un peu plus que triplé ;

(E) A au moins quadruplé.

113 D14 N26

De combien de manières peut-on écrire 101 comme somme de trois carrés de naturels non nuls rangés dans l'ordre croissant ?

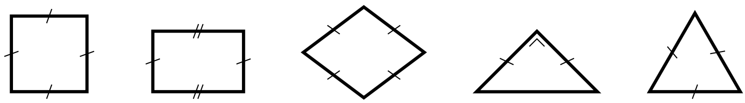
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

114 D14 N29

Sans réponse préformulée — Entre 1 et 2014, combien existe-t-il d'entiers multiples de 5 ou de 17 mais pas de 85 ?

115 E11 N07

Parmi les figures ci-dessous, laquelle a le moins d'axes de symétrie ?

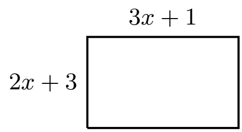


(A) Le carré
(B) Le rectangle non carré
(C) Le losange non rectangle
(D) Le triangle isocèle rectangle
(E) Le triangle équilatéral

116 E11 N10

Si le rectangle ci-contre est un carré, la mesure de son périmètre est

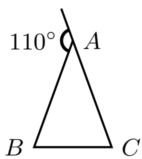
(A) 8 (B) 14 (C) 16 (D) 28 (E) 32



117 E11 N11

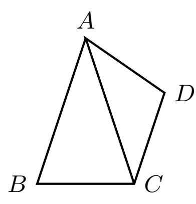
Le triangle ABC ci-contre est isocèle ($|AB| = |AC|$). Si l'angle extérieur de sommet A mesure $110°$, que mesure l'angle intérieur en B ?

(A) $45°$ (B) $50°$ (C) $55°$ (D) $60°$ (E) $65°$



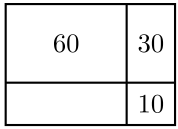
118 E11 N14

Sans réponse préformulée — Dans la figure plane (imprécise) ci-contre, les triangles ABC et ACD sont isocèles ($|AB| = |AC|$ et $|DA| = |DC|$). Si $\widehat{BAD} = 85°$ et $\widehat{ABC} = 75°$, quelle est la mesure en degrés de $\widehat{ADC}$?



119 E11 N17

Sans réponse préformulée — Un rectangle est partagé en quatre régions par des parallèles à ses côtés, comme indiqué par la figure ci-contre (qui ne respecte pas les proportions). Les aires de trois des régions sont mentionnées sur la figure. Quelle est celle de la quatrième ?



120 E11 N18

Si le diamètre d'un cercle augmente de π, de combien augmente sa circonférence ?

(A) π^2 (B) $2\pi^2$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π (E) 2π

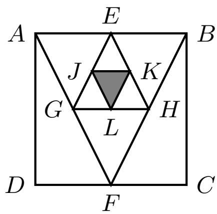
121 E11 N19

Mathieu possède un jardin carré de $100\,\mathrm{m}^2$. Il vient de le recouvrir, sur 5 cm d'épaisseur, d'une couche de terreau à $40\,€/\mathrm{m}^3$ et de l'entourer d'une bordure coutant $4\,€/\mathrm{m}$. À combien lui sont revenus ces travaux ?

(A) 56 € (B) 360 € (C) 416 € (D) 616 € (E) 1760 €

122 E11 N20

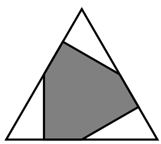
Les points E et F sont les milieux de deux côtés opposés du carré $ABCD$; les points G, H, J, K et L sont milieux des côtés de triangles auxquels ils appartiennent. Que vaut le rapport de l'aire de $ABCD$ à celle de JKL ?



(A) 16 (B) 18 (C) 24 (D) 32 (E) 36

123 E11 N23

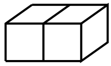
Du milieu de chaque côté d'un triangle équilatéral (parcouru dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre), la perpendiculaire a été abaissée sur le côté suivant. Que vaut le rapport de l'aire de la partie ombrée à celle du triangle initial ?



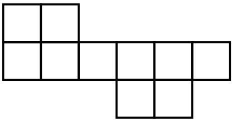
(A) $\frac{9}{16}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{2}{3}$

124 E11 N25

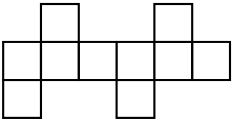
Avec lequel des développements ci-après sera-t-il impossible de reconstituer le solide ci-contre, formé de deux cubes adjacents ?



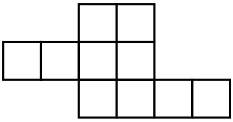
(A)



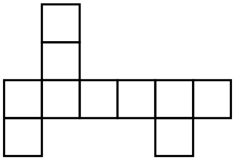
(B)



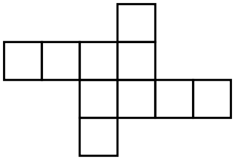
(C)



(D)



(E)



125 E11 N27

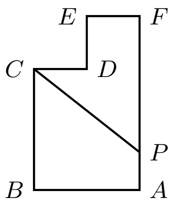
La longueur et la largeur du rectangle $ABCD$ valent respectivement 5 cm et 3 cm. La diagonale $[AC]$ est divisée en trois segments de même longueur par les points E et F. Que vaut, en centimètres carrés, l'aire du triangle BEF ?

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{15}{4}$ (E) $\frac{15}{7}$

126 E11 N28

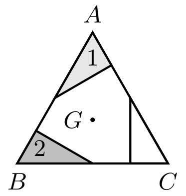
Dans l'hexagone $ABCDEF$ ci-contre, tous les angles sont droits ; $|AB| = 70$, $|BC| = 80$ et $|CD| = |DE| = |EF|$. Le segment $[CP]$ partage l'hexagone en deux parties de même aire. Que vaut $|AP|$?

(A) 12,5 (B) 17,5 (C) 20 (D) 35 (E) 40



127
E11
N29

Du milieu de chaque côté d'un triangle équilatéral ABC, la perpendiculaire a été abaissée sur le côté précédent ; G est le centre du triangle. Quelle est la transformation qui applique le triangle 1 sur le triangle 2 ?



(A) Une symétrie axiale dont l'axe passe par G

(B) Une rotation de 60° autour de C

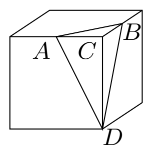
(C) La symétrie centrale par rapport à G

(D) Une rotation de 120° autour de G

(E) Une rotation de 120° autour de C

128
D11
N06

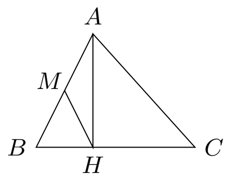
Dans la figure ci-contre, le cube est d'arête 6 et les points A et B sont des milieux d'arêtes. La pyramide $ABCD$ est détachée ; quel est le volume du solide restant ?



(A) 9 (B) 18 (C) 180 (D) 198 (E) 207

129
D11
N11

Dans la figure (imprécise) ci-contre, AH est une hauteur du triangle ABC, M est le milieu de $[AB]$ et $|AH| = |HC|$. Si l'angle $\widehat{AHM}$ mesure 50°, quelle est la mesure en degrés de $\widehat{ABH}$?



(A) 40 (B) 42 (C) 44 (D) 45 (E) 46

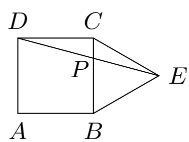
130
D11
N13

Le cercle C_1 est le bord du disque D_1 et le cercle C_2 est le bord du disque D_2. Un arc de 60° de C_1 a la même longueur qu'un arc de 45° de C_2. Quel est le rapport de l'aire de D_1 à celle de D_2 ?

(A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{9}{16}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{4}{3}$

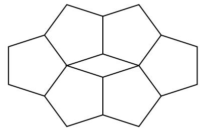
131
D11
N16

Sans réponse préformulée — Un triangle équilatéral BEC est juxtaposé extérieurement à un carré $ABCD$. La droite DE coupe le côté commun $[BC]$ en P. Quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BPD}$?



132 D11 N19

Sans réponse préformulée — Des pentagones réguliers ont été juxtaposés (v. la figure ci-contre). Quelle est la mesure en degrés de l'angle obtus du losange central ?

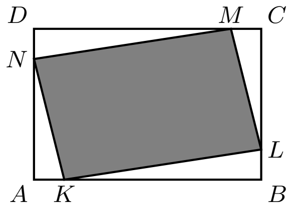


133 D11 N20

Sans réponse préformulée — Combien y a-t-il de diagonales en plus dans un polygone régulier à 10 côtés que dans un polygone régulier à 9 côtés ?

134 D11 N23

Dans le rectangle $ABCD$, le côté $[AB]$ a pour mesure a et le côté $[BC]$ a pour mesure b ; en outre, chacun des segments $[AK]$, $[BL]$, $[CM]$ et $[DN]$ a pour mesure d. Que vaut l'aire du quadrilatère $KLMN$?



(A) $2d^2 + (a - b)d + ab$

(B) $2d^2 - (a + b)d + ab$

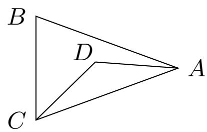
(C) $d^2 - (a + b)d + ab$

(D) $ab - (a + b)d$

(E) Aucune des expressions précédentes

135 D11 N24

Dans la figure ci-contre, $[AB]$ et $[AC]$ sont de même longueur, ainsi que $[DA]$ et $[DC]$. Soit $\alpha = \widehat{BAC}$ et $\beta = \widehat{ADC}$. Alors, $\widehat{BCD} =$



(A) $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

(B) $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$

(C) $90° + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$

(D) $180° - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$

(E) $180° + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$

136
D11
N26

Dans le plan, deux points L et M sont distants de 5 cm. L'ensemble des points P du plan tels que le triangle LMP ait une aire de $20\,\text{cm}^2$ est

(A) Le cercle de diamètre $[LM]$;
(B) La réunion de deux droites perpendiculaires à LM ;
(C) Une droite perpendiculaire à LM ;
(D) Une droite parallèle à LM ;
(E) La réunion de deux droites parallèles à LM.

137
E12
N10

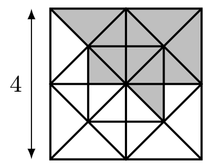
Un polygone est *inscriptible* s'il existe un cercle qui comprend tous ses sommets. Parmi les affirmations suivantes, combien sont *fausses* ?

- Tout triangle est inscriptible.
- Tout carré est inscriptible.
- Tout rectangle est inscriptible.
- Tout losange est inscriptible.
- Tout parallélogramme est inscriptible.

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

138
E12
N13

Que vaut l'aire ombrée dans la figure ci-contre, dans laquelle apparaissent des carrés et leurs diagonales ?



(A) 7/4 **(B)** 7/2 **(C)** 7 **(D)** 9 **(E)** 14

139
E12
N15

Quelle droite remarquable d'un triangle partage toujours celui-ci en deux triangles de même aire ?

(A) Une médiane
(B) Une médiatrice
(C) Une bissectrice
(D) Une hauteur
(E) Aucune des réponses précédentes

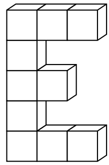
140
E12
N17

Lorsqu'ils n'ont pas de segment commun, quel est le nombre maximal de points d'intersection des côtés d'un carré et des côtés d'un triangle équilatéral ?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

141 E12 N18

Une pièce de bois en forme de E a été fabriquée en collant dix cubes de 8 cm de côté. On a observé qu'il fallait 12 centilitres de peinture pour recouvrir entièrement un petit cube de ce type. Combien de centilitres de peinture faudra-t-il utiliser pour couvrir la pièce de bois ?



(A) 84 (B) 88 (C) 92 (D) 100 (E) 120

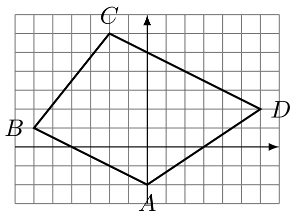
142 E12 N24

La longueur d'un rectangle dépasse de 3 cm sa largeur. Le périmètre de ce rectangle est de 38 cm. Quelle est son aire ?

(A) 40 cm^2
(B) 61,75 cm^2
(C) 88 cm^2
(D) 118,75 cm^2
(E) 253,75 cm^2

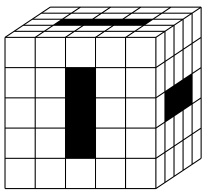
143 E12 N25

Sans réponse préformulée — Évaluer l'aire du quadrilatère $ABCD$ représenté ci-contre, si le carré du quadrillage est l'unité d'aire.



144 E12 N26

Ce solide est un grand cube formé de petits cubes et traversé par trois tunnels. Chaque tunnel va d'une face du grand cube à la face opposée. Combien de petits cubes composent ce solide ?



(A) 80 (B) 88 (C) 89 (D) 92 (E) 96

145 E12 N29

Le triangle ABC est isocèle avec $AB = BC$ et $\widehat{ABC} = 100^\circ$. Le point P de la droite BC est tel que le triangle PAB est isocèle avec $AB = AP$. Que vaut, en degrés, l'angle $\widehat{PAC}$?

(A) 50 (B) 55 (C) 60 (D) 65 (E) 70

146 D12 N02

Soit un rectangle $ABCD$ et E un point de $[CD]$. Si l'aire du trapèze $ABCE$ vaut cinq fois l'aire du triangle ADE, que vaut le rapport $|DC|/|DE|$?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

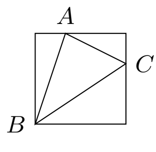
147 D12 N08

Sans réponse préformulée — Un cercle de centre C et un cercle de centre D se coupent en deux points distincts M et P. Parmi les affirmations suivantes, combien sont toujours vraies ?

- CD est médiatrice de $[MP]$;
- MP est médiatrice de $[CD]$;
- $|CM| = |MD|$;
- $|CM| = |CP|$;
- $CMDP$ est un losange.

148 D12 N10

Sans réponse préformulée — Dans le carré ci-contre, de côté 30, A et C sont à distance 10 des sommets les plus proches. Que vaut l'aire du triangle ABC ?



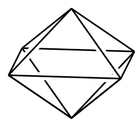
149 D12 N11

Un côté d'un triangle mesure 16 et la hauteur correspondante mesure 12. Parmi les nombres 160, 80, 40, 20, 12, 8, combien peuvent être la mesure d'un autre côté de ce triangle ?

(A) Aucun (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) Tous

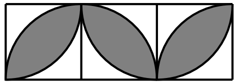
150 D12 N17

Sans réponse préformulée — Dans un octaèdre régulier, combien y a-t-il de paires d'arêtes parallèles ?



151 D12 N21

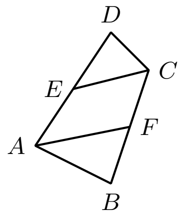
Ci-contre, les arcs de cercle ont pour centres des sommets du quadrillage. Les côtés des carrés qui forment celui-ci mesurent 1 cm. Que vaut l'aire de la zone ombrée ?



(A) $2(\pi - 3)$ cm^2
(B) $\frac{3}{4}(\pi - 2)$ cm^2
(C) $(2\pi - 3)$ cm^2
(D) $3(\pi/2 - 1)$ cm^2
(E) $(3 - \pi/2)$ cm^2

152 D12 N22

Dans le quadrilatère convexe $ABCD$, on construit les points E et F, milieux des côtés $[AD]$ et $[BC]$, respectivement. Quel est le rapport des aires des quadrilatères $AFCE$ et $ABCD$?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$
(E) Les données ne permettent pas de le déterminer.

153 D12 N24

Le triangle ABC est isocèle avec $|AB| = |AC|$. La bissectrice de l'angle B coupe AC en P de sorte que l'angle $\widehat{BPC}$ ait 25° de plus que l'angle $\widehat{ACB}$. Quelle est la mesure de l'angle A ?

(A) 54° (B) 56° (C) 58° (D) 59° (E) 60°

154 D12 N27

Le rapport de l'aire d'un disque à son périmètre est de 10. Quel est le rapport de l'aire au périmètre du carré circonscrit à ce disque ?

(A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 16 (E) Une autre réponse

155 D12 N29

Sans réponse préformulée — Le rectangle de $a + b$ sur $c + d$ est partagé en quatre rectangles : de a sur c de périmètre 2, de b sur c de périmètre 5, de a sur d de périmètre 6. Que vaut le périmètre du rectangle de b sur d ?

	a	b
c	$P = 2$	$P = 5$
d	$P = 6$	$P = ?$

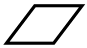
156 E13 N02

Il n'existe pas de triangle

(A) Isocèle acutangle ;
(B) Rectangle isocèle ;
(C) Isocèle obtusangle ;
(D) Rectangle obtusangle ;
(E) Équilatéral acutangle.

157 E13 N05

Parmi les quadrilatères suivants, quel est celui qui admet le moins d'axes de symétrie ?

(A) Ce carré : 
(B) Ce rectangle : 
(C) Ce losange : 
(D) Ce parallélogramme : 
(E) Ce trapèze isocèle : 

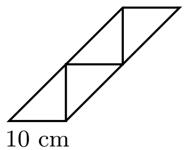
158 E13 N11

Quelle est la capacité, exprimée en décilitres, d'un parallélépipède rectangle à base carrée d'1 cm de côté et de 10 cm de hauteur ?

(A) 0,001 (B) 0,01 (C) 0,1 (D) 1 (E) 10

159 E13 N12

Le parallélogramme ci-contre est formé de quatre triangles rectangles isocèles. Que vaut son aire, en centimètres carrés ?



(A) 40 (B) 100 (C) 160 (D) 200 (E) 400

160 E13 N15

Une chèvre broute un pré circulaire de rayon R. Elle est attachée à l'extrémité d'une corde, dont l'autre bout est fixé à un piquet planté au centre de la pâture. Quelle doit être la longueur de la corde pour que la chèvre ne broute que le quart de la surface du pré ?

(A) $R/4$ (B) $R/2$ (C) $R-2$ (D) $R-4$ (E) Une autre réponse

161 E13 N16

Sans réponse préformulée — Le triangle ABC est isocèle (avec $|BA| = |BC|$) et l'angle en B mesure $72°$. La bissectrice de l'angle A coupe BC en P. Que mesure l'angle $\widehat{APB}$, en degrés ?

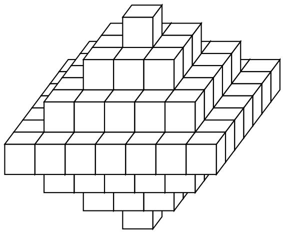
162
E13
N21

Archimède découpe en chaque sommet d'un cube le tétraèdre obtenu en joignant les milieux des arêtes issues de ce sommet. Combien d'arêtes a le polyèdre obtenu ?

(A) 36 (B) 24 (C) 18 (D) 16 (E) 15

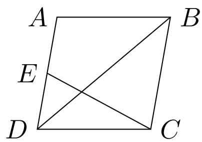
163
E13
N24

Sans réponse préformulée — Le solide représenté ci-dessous, formé de petits cubes, admet cinq plans de symétrie. Aucun petit cube intérieur n'est manquant. De combien de petits cubes est-il formé ?



164
E13
N28

$ABCD$ est un losange et $|AE| = |ED|$. Le rapport de l'aire de EDC à celle de BCD est alors de



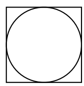
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 3 (E) 2

165
D13
N01

Sans réponse préformulée — Dans le plan, combien un hexagone régulier possède-t-il d'axes de symétrie ?

166
D13
N03

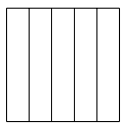
Si l'aire d'un disque est de 169π cm^2, quelle est, en centimètres carrés, l'aire du carré circonscrit à ce disque ?



(A) 169 (B) 169^2 (C) $169^2/4$ (D) 676 (E) 676π

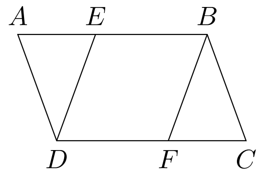
167
D13
N06

Sans réponse préformulée — Un pré carré est partagé en cinq rectangles égaux par quatre clôtures parallèles entre elles et à deux des côtés du carré. Le périmètre de chacun de ces rectangles est de 336 m. Quelle est l'aire du carré, en ares (1 a = 100 m^2) ?



168 D13 N18

Sans réponse préformulée — Dans le parallélogramme $ABCD$, $|AB| = 144$. Le point E est sur $[AB]$ et F est son symétrique par rapport au centre du parallélogramme. Si la somme des aires des triangles ADE et CBF vaut la moitié de l'aire du parallélogramme $BEDF$, que vaut $|AE|$?



169 D13 N21

Sans réponse préformulée — Le terrain de Gisèle est un carré $ABCD$ de côté 18 m. Elle le quadrille en carrés dont les côtés mesurent 2 m. Elle plante alors des chênes aux sommets de ces carrés qui ne sont pas situés sur le bord du terrain et dont la somme des distances aux côtés $[AB]$ et $[AD]$ vaut 14 m. Combien de chênes plante-t-elle ?

170 D13 N22

Que vaut l'angle des droites prolongeant les côtés $[AB]$ et $[DE]$ d'un pentagone régulier $ABCDE$?

(A) 30° (B) 32° (C) 35° (D) 36° (E) 40°

171 D13 N25

Sans réponse préformulée — Dans le triangle ABC isocèle en A, la bissectrice de l'angle B coupe AC en P. Si l'angle $\widehat{BPC}$ vaut le double de l'angle A, que vaut celui-ci, en degrés ?

172 E14 N02

Un triangle isocèle a une aire de 36 cm^2. Sa base vaut 6 cm. En centimètres, que vaut la hauteur correspondante ?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12

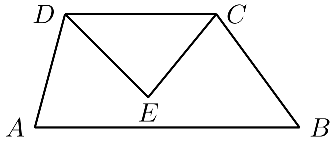
173 E14 N06

Quelle est la somme du nombre d'arêtes, du nombre de sommets et du nombre de faces d'un cube ?

(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 22 (E) 26

174 E14 N10

Dans le trapèze $ABCD$ ci-contre, CE et DE sont les bissectrices des angles en C et en D. Si l'angle $\widehat{BAD}$ mesure 80° et si l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 60°, que mesure l'angle $\widehat{CED}$?



(A) 50° (B) 60° (C) 65° (D) 70° (E) 72°

175 E14 N13

Sans réponse préformulée — Le périmètre d'un rectangle vaut 48 cm et sa longueur vaut le triple de sa largeur. Que vaut son aire, en centimètres carrés ?

176 E14 N16

La base d'une pyramide est un polygone régulier à 2014 côtés. Quelle est la différence entre le nombre d'arêtes de cette pyramide et son nombre de faces ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 2013 (E) 2014

177 E14 N18

Dans le triangle ABC isocèle en C, la hauteur issue de B coupe $[AC]$ en H. Si l'angle en C mesure 68°, que mesure l'angle $\widehat{ABH}$?

(A) 33° (B) 34° (C) 35° (D) 36° (E) 37°

178 E14 N20

En combien de points au maximum se coupent un rectangle non carré et un cercle ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

179 E14 N22

Le volume d'un parallélépipède rectangle à base carrée est de 648 cm^3. Si la hauteur vaut le triple de la longueur du côté de la base, que mesure, en centimètres carrés, l'aire de la base de ce parallélépipède ?

(A) 4 (B) 9 (C) 24 (D) 36 (E) 54

180 E14 N24

Les angles d'un triangle ont pour amplitudes x, $2x$ et $3x$. Que vaut x ?

(A) 15° (B) 20° (C) 22,5° (D) 30° (E) 36°

181 E14 N27

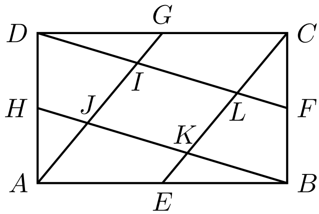
Combien des voyelles ci-dessous possèdent un et un seul axe de symétrie ?

A E I O U Y

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 6

182 E14 N29

$ABCD$ est un rectangle avec $|AB| = 10$ et $|BC| = 6$; E, F, G, H sont les milieux de ses côtés. Quelle est l'aire du quadrilatère $IJKL$?



(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

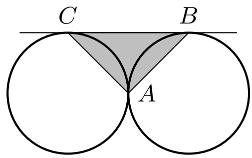
183 D14 N02

Dans le plan, quel est le nombre d'axes de symétrie d'un losange qui n'est pas un carré ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

184 D14 N07

Sans réponse préformulée — Deux cercles de diamètre 10 sont tangents entre eux en A ; la droite BC est une de leurs tangentes communes, B et C étant les points de contact. Que vaut l'aire du triangle ABC ?



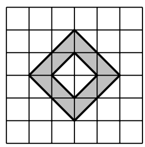
185 D14 N12

Dans un triangle ABC rectangle en C, $\widehat{A} = \widehat{B} + 42°$. Quelle est la mesure en degrés de $\widehat{A}$?

(A) 24 (B) 42 (C) 48 (D) 66 (E) 69

186 D14 N15

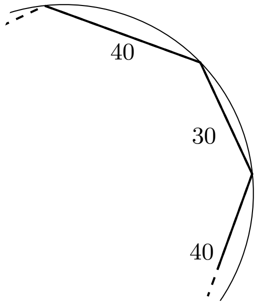
Quelle est l'aire de la figure ombrée, si l'unité d'aire est le carré du quadrillage ?



(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

187 D14 N17

Un octogone inscrit à un cercle a alternativement des côtés de 30 et de 40 (un fragment en est représenté ci-contre). Cet octogone



(A) Possède exactement 8 axes de symétrie ;

(B) Possède exactement 4 axes de symétrie ;

(C) Possède exactement 2 axes de symétrie ;

(D) N'a pas d'axe de symétrie, mais est conservé par des rotations d'un quart de tour ;

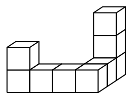
(E) Possède un centre de symétrie, mais pas d'axe de symétrie.

188 D14 N19

Sans réponse préformulée — Les trois sommets d'un triangle sont situés aux points $(5, 0)$, $(28, 0)$ et $(2014, 8)$. Que mesure l'aire de ce triangle ?

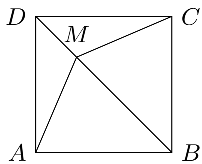
189 D14 N21

Sans réponse préformulée — L'assemblage représenté ci--contre a été obtenu en collant des cubes face contre face. Il faut 2 dL de peinture par couche pour peindre une face d'un de ces cubes. Combien de décilitres de peinture faut-il pour peindre cet assemblage (y compris la face inférieure), si trois couches sont posées ?



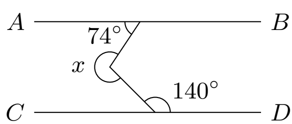
190 D14 N23

Sans réponse préformulée — Le point M, sur la diagonale BD du carré $ABCD$, plus près de D que de B, est tel que $\widehat{AMC} = 130°$. Que vaut, en degrés, l'angle $\widehat{DAM}$?



191 D14 N25

Sans réponse préformulée — Si $AB \mathbin{//} CD$, quelle est la mesure (en degrés, dans l'intervalle $[\,0; 360\,[$) de l'angle x ? (La figure est approximative.)

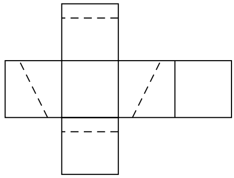


192
D14
N27

Sans réponse préformulée — Dans le triangle ABC isocèle en C, la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et la hauteur issue de B se coupent en faisant un angle de 50°. Quelle est la mesure (en degrés, dans l'intervalle $[\,0; 360\,[$) de l'angle $\widehat{C}$?

193
D14
N28

Un plan coupe un cube comme indiqué par les lignes traitillées sur le développement du cube. Les extrémités de ces lignes traitillées partagent des arêtes du cube dans le rapport de 1/4 à 3/4. Si le cube est de volume 1, quels sont les volumes de ses deux parties situées de part et d'autre du plan ?



(A) $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$

2.3 Logique

194
E12
N30

Dans la rue Courte, 312 habitants font du tennis, 256 de la pelote basque et 224 du kayak. Si 17 habitants ne font aucun de ces trois sports, 27 font les trois, 92 font juste du tennis et de la pelote basque, 88 ne font que du tennis et 22 que du kayak, combien de personnes habitent la rue Courte ?

(A) 471 (B) 488 (C) 515 (D) 992 (E) Une autre réponse

195
E13
N29

Dans l'académie de musique de ma petite ville, il existe des violonistes qui ne sont pas pianistes ; mais tous les organistes sont pianistes. Laquelle des propositions suivantes est nécessairement vraie ?

(A) Il existe des violonistes qui ne sont pas organistes ;
(B) Il existe des violonistes qui sont organistes ;
(C) Il existe des organistes qui sont violonistes ;
(D) Il existe des organistes qui ne sont pas violonistes ;
(E) Aucun organiste n'est violoniste.

196
D13
N20

Si l'objet que j'ai sur la tête n'est pas un chapeau marron, alors cet objet, nécessairement,

Ⓐ Est un chapeau melon ;
Ⓑ N'est pas un chapeau ;
Ⓒ N'est pas marron ;
Ⓓ N'est pas un chapeau et n'est pas marron ;
Ⓔ N'est pas un chapeau ou n'est pas marron.

197
D14
N11

En admettant qu'une forêt possède un million d'arbres feuillus et que tout arbre feuillu possède un nombre de feuilles compris entre 0 et 200 000, laquelle des affirmations suivantes est certainement vraie ?

Ⓐ Deux arbres de cette forêt ne peuvent jamais posséder le même nombre de feuilles.
Ⓑ Cette forêt comprend un arbre possédant une seule feuille.
Ⓒ Cette forêt comprend au moins deux arbres ayant au moins 100 000 feuilles.
Ⓓ Cette forêt comprend des arbres non feuillus.
Ⓔ Cette forêt comprend au moins deux arbres ayant le même nombre de feuilles.

2.4 Problèmes — Divers

198
E11
N06

Dans un groupe, 25 % des membres sont des jeunes de moins de 25 ans ; 40 % des membres de moins de 25 ans ont moins de 15 ans. Quelle proportion du groupe constituent les moins de 15 ans ?

Ⓐ 10 %   Ⓑ 20 %   Ⓒ 40 %   Ⓓ 54 %   Ⓔ 90 %

199
E11
N24

Mathieu envisage de commander un baladeur numérique sur l'internet. Au prix de l'appareil, il faut ajouter soit 21 % pour la livraison express, soit 7 % pour la livraison standard. Mathieu a calculé que, livraison express comprise, l'appareil qu'il convoite lui couterait 181,50 € ; à combien reviendra-t-il si Mathieu choisit plutôt la livraison standard ?

(A) 157 € (B) 160 € (C) 160,50 € (D) 168,50 € (E) 188,50 €

200
D11
N12

Sans réponse préformulée — Un sculpteur doit transporter ses différentes statues dans une galerie d'art. Il les a pesées et a obtenu la liste de masses que voici :

50 kg,	80 kg,	70 kg,	30 kg,	20 kg,	110 kg,	110 kg,	130 kg,	80 kg,
80 kg,	70 kg,	90 kg,	50 kg,	50 kg,	20 kg,	30 kg,	50 kg,	50 kg,
80 kg,	80 kg,	110 kg,	120 kg,	120 kg,	130 kg,	130 kg,	140 kg,	90 kg.

Sa camionnette peut transporter au maximum une tonne de charge utile. Quel est le nombre maximal de statues qu'il peut emporter en une fois ?

201
D11
N15

Sur une carte, 1 cm représente 5 km sur le terrain. Quelle est l'aire réelle d'une parcelle qui est représentée sur la carte par un carré de 2 cm de côté ?

(A) $10\,\mathrm{km}^2$ (B) $25\,\mathrm{km}^2$ (C) $100\,\mathrm{km}^2$ (D) $400\,\mathrm{km}^2$ (E) $500\,\mathrm{km}^2$

202
D11
N21

Un aquarium, qui a la forme d'un prisme à base carrée de 48 cm de côté, contient 60 L d'eau. On transvase son contenu dans un second aquarium, parallélépipède rectangle dont la base mesure 36 cm sur 60 cm et dont la hauteur est de 30 cm. La hauteur de l'eau dans ce second aquarium sera

(A) La même que dans le premier ;

(B) Les $\frac{16}{15}$ de la hauteur dans le premier ;

(C) Les $\frac{15}{16}$ de la hauteur dans le premier ;

(D) Les $\frac{14}{15}$ de la hauteur dans le premier ;

(E) Les $\frac{14}{16}$ de la hauteur dans le premier.

203 D11 N27

Sans réponse préformulée — Le TGV Lille-Liège ne fait arrêt qu'à Bruxelles. Les prix sont de 45 € pour un trajet Lille-Bruxelles, de 24 € pour un trajet Bruxelles-Liège et de 56 € pour un trajet Lille-Liège. Huit cents voyageurs sont montés à Lille et trois cents à Bruxelles. La recette totale a été de 50 350 €. Combien de voyageurs sont descendus à Bruxelles ?

204 D11 N28

Sans réponse préformulée — En 2010, un généreux mécène avait offert une somme de 16 000 € pour récompenser tous les finalistes de l'Olympiade belgo-luxembourgeoise d'éducation physique. Le jury a attribué à chaque finaliste le même nombre entier d'euros, aussi élevé que possible ; après ce partage, il est resté 100 €. En 2011, le même mécène offre 20 000 € à l'OBLEP, dont le nombre de finalistes sera le même qu'en 2010. Si le jury procède de la même manière, il restera 125 €. Quel est le plus petit nombre de finalistes compatible avec ces faits ?

205 E12 N03

Une carte géographique a pour échelle 1/250 000. Quelle est, sur le terrain, une distance représentée par 6 cm sur la carte ?

(A) 15 km (B) 6,66 … km (C) 1,4 km (D) 1,25 km (E) 20/6 km

206 E12 N14

Un cycliste se déplace en moyenne à 20 km/h. La vitesse moyenne d'un piéton correspond au tiers de la vitesse du cycliste. La vitesse d'un coureur à pied est plus élevée de 8 km/h que celle d'un piéton. Une voiture va cinq fois plus vite qu'un coureur à pied. Parmi les expressions suivantes, laquelle donne la vitesse d'une voiture, en kilomètres par heure ?

(A) $20 \times \frac{1}{3} + 8 \times 5$

(B) $(20 \times \frac{1}{3} + 8) \times 5$

(C) $20 \times (\frac{1}{3} + 8) \times 5$

(D) $20 \times (\frac{1}{3} + 8 \times 5)$

(E) $20 \times \frac{1}{3} + (8 \times 5)$

207
E12
N19

Je dois parcourir 1200 km. Si je fais le trajet à la vitesse moyenne de 100 km/h, mon GPS indique que j'arriverai à 8 heures du soir. J'aimerais arriver deux heures plus tôt. À quelle vitesse moyenne devrais-je rouler ?

(A) 110 km/h
(B) 115 km/h
(C) 120 km/h
(D) 125 km/h
(E) 130 km/h

208
E12
N21

Une pompe, dont le débit est de 5000 L/h, vide une piscine rectangulaire de 10 m sur 4 m. À quelle vitesse le niveau de l'eau baisse-t-il ?

(A) 10 cm/h (B) 12 cm/h (C) 12,5 cm/h (D) 15 cm/h (E) 20 cm/h

209
E12
N23

Certaines plaques de verre ont la propriété de diminuer de 25 % l'intensité de n'importe quel rayon lumineux qui les traverse. Un rayon traverse successivement quatre de ces plaques. Qu'est devenue son intensité après la quatrième plaque ?

(A) Elle est égale à 0.
(B) Elle est égale à environ 0,03 % de ce qu'elle était au départ.
(C) Elle est égale à environ 0,31 % de ce qu'elle était au départ.
(D) Elle est égale à environ 3,15 % de ce qu'elle était au départ.
(E) Elle est égale à environ 31,5 % de ce qu'elle était au départ.

210
D12
N07

Mathilde a récolté 180 kg de cerises. Elle partage sa récolte en trois lots. Le premier représente les 4/9 de sa récolte et le deuxième les 9/20 du reste. Quel est le poids du troisième lot ?

(A) 19 kg (B) 45 kg (C) 55 kg (D) 80 kg (E) 85 kg

211 D12 N13

Sans réponse préformulée — Un pays est découpé en trois régions représentant respectivement 60 %, 30 % et 10 % de la population totale des électeurs du pays. Dans la première région, 25 % des électeurs ont voté pour le parti A, de même que 40 % des électeurs de la deuxième région. Si ce parti a recueilli au total 29 % des voix, quel est son score, en pour cent, dans la troisième région ?

212 D12 N26

Sans réponse préformulée — Anne achète une paire de chaussures avec 30 % de son argent de poche puis un foulard avec 20 % du restant. Il lui reste alors 84 €. Combien avait-elle reçu d'argent de poche (en euros) ?

213 E13 N14

Dans le clapier du père Arthur, il y a 360 lapins, soit bruns, soit gris. Un sixième de ces lapins sont des femelles et un cinquième de ces femelles sont brunes. Le dixième des mâles sont bruns. Combien Arthur a-t-il de lapins gris ?

(A) 12 (B) 48 (C) 30 (D) 270 (E) 318

214 E13 N17

Un horloger farceur a interverti la petite et la grande aiguille de mon horloge murale. Néanmoins, mon horloge indique correctement l'heure

(A) Uniquement à midi ou à minuit ;

(B) Uniquement quand les aiguilles sont dans des directions symétriques par rapport à l'axe vertical ;

(C) À condition que je regarde le cadran dans un miroir ;

(D) Uniquement quand les aiguilles sont opposées, c'est-à-dire exactement dans le prolongement l'une de l'autre ;

(E) Uniquement quand les aiguilles sont superposées.

215 E13 N18

Les trams 81, 82 et 83 partent tous du même endroit. Ils partent respectivement toutes les 10, toutes les 15 et toutes les 25 minutes. Un premier départ simultané a lieu à 6 heures. À quelle heure partiront-ils simultanément pour la deuxième fois ?

(A) À 8 h (B) À 8 h 30 (C) À 9 h (D) À 9 h 30 (E) À 11 h

216
E13
N27

Sur une cuillère doseuse de sirop pour enfants sont indiquées les graduations I pour 50 mm^3, II pour 100 mm^3 et III pour 200 mm^3. La posologie mentionne qu'un enfant doit prendre 0,05 mL de sirop par kilo de masse. Quelle quantité faut-il donner à un enfant de 10 kilos ?

(A) 1 cuillère remplie jusque I

(B) 1 cuillère remplie jusque III

(C) 1 cuillère remplie jusque III et une cuillère remplie jusque II

(D) 2 cuillères remplies chacune jusque III

(E) 2 cuillères remplies chacune jusque III et une cuillère remplie jusque II

217
D13
N04

En 2013, le 18 juin est un mardi. Quel jour de la semaine tombera le 27 septembre 2013 ?

(A) Lundi (B) Mardi (C) Mercredi (D) Jeudi (E) Vendredi

218
D13
N24

Habituellement, certaines bouteilles de jus de fruit sont au même prix dans deux magasins. Lors d'une semaine de promotion, le premier magasin offre une sixième bouteille gratuite à l'achat de cinq bouteilles ; le second diminue d'un quart le prix d'une troisième bouteille à l'achat de deux bouteilles. Le prix à payer pour obtenir 12 bouteilles dans le deuxième magasin dépasse alors celui du premier magasin ; de quel pourcentage ?

(A) 9 % (B) 9,0909 . . . % (C) 10 % (D) 11 % (E) 16,6666 . . . %

219
D13
N26

Sur un certain trajet, une voiture parcourt la moitié de la distance à la vitesse moyenne de 80 km/h et l'autre moitié à la vitesse moyenne de 20 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?

(A) 100 km/h (B) 60 km/h (C) 50 km/h (D) 32 km/h (E) 30 km/h

220 D13 N29

Sur une étagère, un libraire a rangé 31 livres, de gauche à droite, par ordre de prix croissants. L'écart entre les prix de deux livres voisins est chaque fois de deux euros. Pour le livre situé à l'extrémité droite, un acheteur paiera le même prix que pour le livre du milieu et l'un de ses voisins. Dans ces conditions,

- **(A)** Le voisin en question est le voisin de gauche ;
- **(B)** Le livre du milieu coute 36 euros ;
- **(C)** Le livre le moins cher coute 4 euros ;
- **(D)** Le livre le plus cher coute 64 euros ;
- **(E)** Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

221 E14 N14

Sans réponse préformulée — Julien a passé la moitié de ses vacances à Ostende, un tiers en Ardenne et le reste, dix jours, chez sa grand-mère à Tournai. Quelle a été la durée totale de ses vacances, en jours ?

222 E14 N23

Sans réponse préformulée — Les sièges du remonte-pente de Mathland-la--Neige sont régulièrement espacés sur le câble et numérotés dans l'ordre à partir de 1. La partie montante du câble longe sa partie descendante. Alan, qui est assis sur le siège 98, croise le siège 105 au moment précis où Bart, qui est assis sur le siège 241, croise le siège 230. Combien ce remonte-pente compte-t-il de sièges ?

223 E14 N26

Sans réponse préformulée — La cantine du club de foot a acheté 1000 friandises au prix de 2 € pour 5. De ces friandises, 850 ont été vendues au prix de 1 € pour deux et, quelques jours avant la date limite de consommation, le reste au prix de 1 € pour cinq. Quel est, en euros, le bénéfice de l'opération ?

2.5 Combinatoire & probabilités

224 E11 N22

Un sac contient trente petits cartons indiscernables au toucher : 10 noirs, 10 jaunes et 10 rouges. Des cartons sont extraits du sac, un à un, sans être replacés dans le sac. Ils ne sont pas non plus examinés. Combien faut-il en sortir pour être certain d'en avoir au moins un de chaque couleur ?

(A) 3 (B) 11 (C) 12 (D) 21 (E) 30

225 E11 N26

Andrée a acheté un crayon et une gomme pour 1,70 € ; Benoit, un stylo à bille et un feutre pour 4,80 € ; et Charles, deux gommes et deux stylos à bille pour 7,40 €. Que paye Danièle, qui a acheté un crayon et un feutre ?

(A) 2,80 € (B) 2,90 € (C) 3,00 € (D) 3,10 € (E) 3,20 €

226 E11 N30

Sans réponse préformulée — Un magazine était constitué d'un cahier de feuilles pliées en deux et agrafées le long du pli, mais les agrafes ont été arrachées et les feuilles se sont dispersées. Sur une face de l'une de celles--ci, on peut lire les numéros de page 34 à gauche et 67 à droite. Combien de pages comptait ce magazine ?

227 D11 N10

Sans réponse préformulée — Un jeu utilise des jetons, tous différents, qui présentent chacun quatre caractéristiques : la forme (carré, disque ou triangle) ; la grandeur (petit, moyen ou grand) ; la couleur (blanc, rouge ou noir) ; et la matière (bois, métal ou plastique). Sachant que chaque combinaison de ces caractéristiques est représentée une et une seule fois, combien y a-t-il de jetons dans ce jeu ?

228 D11 N18

Sans réponse préformulée — Vic, Omer, Tom, Ed et Zac sont les cinq candidats d'une liste pour les élections. Vic exige d'être à la première place tandis que Zac revendique la dernière. Dans ces conditions, de combien de manières cette liste peut-elle être constituée ?

229 D11 N25

Sans réponse préformulée — L'alphabet des moustiques ne contient que les lettres B et Z. Combien y a-t-il de mots de six lettres en langage moustique ?

230 E12 N07

Dans le plan, les côtés d'un hexagone régulier sont prolongés en droites. Combien de régions du plan sont délimitées par ces droites ?

(A) 7 (B) 13 (C) 17 (D) 18 (E) 19

231 E12 N12

Dans mon porte-monnaie se trouvent 12 pièces de 1 centime, 21 de 2 centimes, 7 de 5 centimes et 8 de 10 centimes. Combien de pièces au minimum dois-je en extraire pour être certain d'avoir parmi elles une pièce valant plus de 3 centimes ?

(A) 12 (B) 13 (C) 33 (D) 34 (E) 48

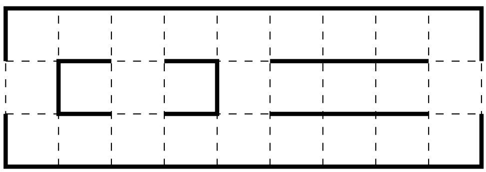
232 D12 N18

Autour de la scène arrondie d'une salle de spectacle, le premier rang est formé de 5 sièges, le deuxième de 7, le troisième de 9, et ainsi de suite. Il y a en tout 252 sièges. De combien de sièges est formé le dernier rang ?

(A) 31 (B) 29 (C) 27 (D) 25 (E) 23

233 E13 N20

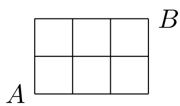
Combien de chemins (c'est-à-dire de suites de cases voisines, horizontalement ou verticalement) permettent de traverser le labyrinthe ci-dessous de gauche à droite sans passer deux fois par la même case ni franchir de mur ? (Les murs sont représentés par les traits pleins.)



(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20 (E) 24

234 D13 N12

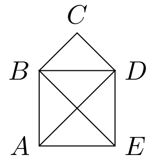
Voici le plan d'un village. Quel est le nombre de plus courts chemins allant de A à B en suivant les rues représentées par les segments ?



(A) 2 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

235 D13 N16

La figure ci-contre est dessinée sans lever le crayon ni repasser deux fois sur le même trait. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?



(A) Le début et la fin du tracé sont en C.
(B) Le tracé commence en A et se termine en E ou inversement.
(C) Le tracé commence en B et se termine en D ou inversement.
(D) Le tracé commence en A et se termine en D ou inversement.
(E) Le tracé commence, au choix, en A, B, C, D ou E.

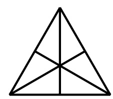
236 D13 N30

De combien de manières différentes un rectangle 12×1 peut-il être pavé par des rectangles de tailles 2×1 ou 3×1 ? (Un nombre suffisant de rectangles de chacun des deux types est disponible.)

(A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 12

237 E14 N25

Combien de triangles comporte la figure ci-contre ?



(A) 6 (B) 7 (C) 10 (D) 15 (E) Une autre réponse

238 D14 N09

Quel est le plus petit nombre de couleurs requises pour colorier les faces d'un cube de sorte que chaque face reçoive une seule couleur et que deux faces partageant une arête reçoivent toujours deux couleurs différentes ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

239 D14 N10

Dans une classe de 26 élèves, 18 font du latin et 16 du grec. Combien d'élèves au minimum font du latin et du grec ?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 14 (E) 16

240 D14 N30

Chaque sommet d'un polyèdre est le point de rencontre de quatre faces triangulaires et d'une face pentagonale. Si ce polyèdre possède 12 faces pentagonales, combien a-t-il de faces triangulaires ?

(A) 40 (B) 48 (C) 80 (D) 160 (E) 240

2.6 Tableau des réponses

N	11		12		13		14	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	A	D	B	A	C	6	E	B
2	B	C	C	B	D	4	E	C
3	D	B	A	54	B	D	C	49
4	C	E	B	D	D	E	D	105
5	C	E	75	D	D	247	E	30
6	A	E	C	12	B	196	E	37
7	D	10	E	C	D	B	180	25
8	E	D	C	2	D	85	C	40
9	E	85	424	D	C	25	E	B
10	D	81	B	350	B	D	D	B
11	C	A	D	D	C	B	A	E
12	B	17	D	C	D	D	B	D
13	E	C	C	20	B	5	108	D
14	70	C	B	143	E	C	60	113
15	18	C	A	B	B	A	A	B
16	C	105	D	E	81	B	D	2
17	20	A	D	6	E	105	7	B
18	A	6	A	A	B	48	B	C
19	B	144	C	C	B	B	63	92
20	D	8	D	D	B	E	E	D
21	E	B	C	D	B	6	B	228
22	D	E	B	B	631	D	D	153
23	B	B	E	961	D	927	268	20
24	C	B	C	B	119	C	D	C
25	C	64	49	98	972	36	E	246
26	A	E	B	150	B	D	55	D
27	A	150	C	C	E	A	D	20
28	B	159	29	8	A	E	A	A
29	D	A	C	9	A	A	B	474
30	100	891	B	E	C	E	819	C

Chapitre 3

Éliminatoires et demi-finales miDi

3.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

D	11		12		13		14	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	241	254	266	428	287	295	310	418
2	242	255	267	378	288	296	311	327
3	243	256	268	278	289	297	312	328
4	244	257	365	279	389	298	313	329
5	345	439	466	445	451	299	314	330
6	245	258	366	446	390	457	315	477
7	246	259	269	280	430	300	408	434
8	346	355	270	447	391	399	316	331
9	347	260	367	379	470	431	317	332
10	348	356	368	380	290	301	409	333
11	247	440	369	281	392	400	318	419
12	435	261	271	282	291	474	410	334
13	460	357	467	283	393	302	459	420
14	349	262	272	448	471	432	411	335
15	461	358	370	284	452	303	319	336
16	248	359	273	381	394	304	320	478
17	436	463	274	468	395	401	321	421
18	249	360	426	382	453	305	412	337
19	350	441	371	449	292	402	322	422
20	462	263	372	383	454	306	413	338
21	351	361	373	384	293	307	433	339
22	250	464	374	385	396	308	323	340
23	352	362	275	285	472	458	414	341
24	437	264	375	386	480	475	324	423
25	353	363	444	450	455	309	415	342
26	251	265	376	387	397	403	476	424
27	438	442	276	388	294	404	416	343
28	252	465	427	429	398	405	325	425
29	354	443	377	286	456	406	417	344
30	253	364	277	469	473	407	326	479

3.2 Algèbre & arithmétique

241 E11 D01

Combien valent les $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{6}$?

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{6}{9}$ (E) $\frac{8}{9}$

242 E11 D02

$(a+1)^2(a-1)+(a+1)(a-1)^2 =$

(A) a^3+a^2-a-1
(B) a^2+a+1
(C) a^3+1
(D) $3a^2+3a+3$
(E) $2a^3-2a$

243 E11 D03

Une seule des affirmations suivantes est correcte. Laquelle ?

(A) Le cube du cube d'un nombre naturel est toujours impair.
(B) Le cube du cube d'un nombre naturel est toujours multiple de 3.
(C) Le cube du cube d'un nombre naturel est toujours multiple de 9.
(D) Le cube du cube d'un nombre naturel est toujours multiple de 27.
(E) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

244 E11 D04

$200\,011^2 - 200\,010 \times 200\,012 =$

(A) 1
(B) 3601
(C) $360\,001$
(D) $36\,000\,000\,001$
(E) $39\,999\,999\,901$

245 E11 D06

$$\frac{100^{n+1} \times 10^{n-1}}{1000^n} =$$

(A) 1 (B) 10 (C) n (D) 1000 (E) 1000^n

246 E11 D07

Une seule des affirmations suivantes est correcte. Laquelle ?

(A) L'inverse d'un produit vaut la somme des inverses.
(B) L'opposé d'un produit vaut le produit des opposés.
(C) Le carré d'une somme vaut la somme des carrés.
(D) L'inverse d'une somme vaut la somme des inverses.
(E) L'opposé d'une somme vaut la somme des opposés.

247 E11 D11

Si deux nombres sont tels que leur somme est inférieure à leur différence, alors nécessairement :

(A) Leur différence est positive ;
(B) Leur somme est négative ;
(C) Les deux nombres sont opposés ;
(D) Les deux nombres sont négatifs ;
(E) L'un des nombres est négatif.

248 E11 D16

Si $a = 2011$ et $b = 2010 \times 2012$, laquelle des relations suivantes est exacte ?

(A) $a^2 = b^2 - 1$ (B) $a^2 = b + 1$ (C) $b = a + 1$ (D) $a^2 = 2b$ (E) $2a = b$

249 E11 D18

Sachant que le rapport $\dfrac{3x-4}{y+15}$ est constant et que $x = 2$ lorsque $y = 3$, que vaut x lorsque $y = 12$?

(A) $\dfrac{7}{3}$ (B) $-\dfrac{3}{7}$ (C) 7 (D) $-\dfrac{1}{3}$ (E) $\dfrac{1}{3}$

250 E11 D22

Si $x = 1 + 2^p$ et $y = 1 + 2^{-p}$, laquelle des expressions suivantes vaut y ?

(A) $\dfrac{x}{x-1}$ (B) $\dfrac{x+1}{x-1}$ (C) $\dfrac{x-1}{x+2}$ (D) $2 - x$ (E) $\dfrac{x+2}{x-1}$

251 E11 D26

Sans réponse préformulée — La différence des carrés de deux naturels est 29. Quel est le produit de ces deux naturels ?

252 E11 D28

Sans réponse préformulée — Quel est le plus grand nombre naturel non nul qui, divisé par 26, donne pour reste le double du carré du quotient ?

253 E11 D30

Sans réponse préformulée — Des fléchettes sont lancées vers une cible qui ne présente que deux zones, la zone centrale qui rapporte 7 points et la zone périphérique qui rapporte 4 points. Si le nombre de fléchettes disponibles n'est pas limité, quel est le plus grand score qui *ne* peut *pas* être atteint ?

254 D11 D01

$\frac{3^{20}}{3^{200}} \cdot \frac{3^{2000}}{3^{200}} =$

(A) 3 (B) 3^2 (C) 3^{30} (D) 3^{1620} (E) 3^{2200}

255 D11 D02

Que vaut le naturel a, si $3^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 9^2 + 12^2 = 5^2 + 10^2 + a$?

(A) 200 (B) 225 (C) 250 (D) 275 (E) 300

256 D11 D03

Combien existe-t-il de nombres réels égaux au quadruple de leur cube ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 ou plus

257 D11 D04

Sans réponse préformulée — Que vaut $\frac{(5^4 - 3^4)^2}{(25^2 - 9^2)(5^2 + 3^2)}$?

258 D11 D06

Pour combien de valeurs entières de n la fraction $\frac{n^2 - 6}{n^2 + 2}$ est-elle inférieure à 1 ?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) Une infinité

259 D11 D07

Si le nombre réel non nul x est tel que $\frac{1}{x} < 2$ et $\frac{1}{x} > -3$, alors

(A) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$

(C) $x > \frac{1}{2}$

(D) $x > \frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{3} < x < 0$

(E) $x > \frac{1}{2}$ ou $x < -\frac{1}{3}$

260
D11
D09

Que vaut le produit $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)$?

(A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{99}{100}$ (C) $\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times 99}{100}$ (D) $\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times 100}$

(E) Une autre réponse

261
D11
D12

Le plus grand commun diviseur de a et b est 12 et celui de b et c est 35. Quel est le plus grand commun diviseur de a et c ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7

(E) Il n'est pas déterminé par les données.

262
D11
D14

Si $R(x)$ est le reste de la division du polynome $x^{2011}+x^{2010}+x+1$ par $x^2+\frac{1}{2}$, quel est le reste de la division de $x^{2011}+x^{2010}+x+1$ par $2x^2+1$?

(A) $\frac{1}{2}R(x)$ (B) $R(x)$ (C) $2R(x)$ (D) $-\frac{1}{2}R(x)$

(E) Une autre réponse

263
D11
D20

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre d'entiers à trois chiffres qui ont au plus deux chiffres égaux ?

264
D11
D24

Sans réponse préformulée — Pour combien de naturels n le quotient $\frac{n^2+2011}{n+1}$ est-il naturel ?

265
D11
D26

Soit p un nombre premier. Combien de couples (x, y) d'entiers vérifient l'équation $x^4-y^4=p^4$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) p

266
E12
D01

Sans réponse préformulée — Que vaut $\sqrt{1+2+3+\cdots+8}$?

267 E12 D02

Sans réponse préformulée — Lorsque je vais de chez moi à la boulangerie, ma roue de vélo accomplit exactement 212 tours. Si je prends un autre vélo dont la roue a un rayon moitié moins grand, combien de tours seront accomplis ?

268 E12 D03

$$\frac{(20{,}12)^2}{2{,}012 \times 201{,}2} =$$

(A) 0,01 (B) 0,1 (C) 1 (D) 10 (E) 100

269 E12 D07

Quel est le nombre de sabords dans l'expression *mille millions de mille sabords* ?

(A) 10^9 (B) 10^{10} (C) 10^{11} (D) 10^{12} (E) 10^{13}

270 E12 D08

$$\frac{4^{2012} - 4^{2011}}{2^{2012} - 2^{2011}} =$$

(A) 1 (B) 4024 (C) 2^{2011} (D) 2^{2012} (E) $2^{2011} + 2^{2012}$

271 E12 D12

Sans réponse préformulée — Un *palindrome* est un nombre dont le premier et le dernier chiffre sont les mêmes, ainsi que le deuxième et l'avant-dernier, etc. ; par exemple, 7447 en est un. Quel est l'écart entre celui-ci et le palindrome suivant ?

272 E12 D14

Policarpe veut carreler un hall rectangulaire de 2,4 m $\times$ 1,5 m avec des dalles carrées d'au moins 9 cm de côté. Combien y a-t-il de grandeurs de dalles qui permettent de carreler le sol sans découpage de dalle, si en outre leur côté commun doit mesurer un nombre entier de centimètres ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

273 E12 D16

À 36 ans, Jeanne connait Éric depuis 10 ans. À partir de quel âge aura-t-elle connu Éric durant plus de la moitié de sa vie ?

(A) 58 ans (B) 57 ans (C) 56 ans (D) 54 ans (E) 52 ans

274
E12
D17

Que vaut $(125+40)^2-(125-40)^2$?

(A) 34 450 (B) 20 000 (C) 17 225 (D) 10 000 (E) Une autre réponse

275
E12
D23

Quelle est la 2012e décimale de 22/7 ?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 7

276
E12
D27

Par quel chiffre se termine le nombre 2^{2012} ?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

277
E12
D30

Quelle est la somme de tous les nombres de deux chiffres dont les deux chiffres sont distincts ?

(A) 4410 (B) 4260 (C) 4140 (D) 3960 (E) 3840

278
D12
D03

Sans réponse préformulée — Pour un certain naturel a, le développement de $(x+a)^3$ donne au coefficient de x la valeur 243. Quel est ce naturel a ?

279
D12
D04

Le nombre A est défini par $A=\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}}$.

(A) $A=0$ (B) $A=2$ (C) $A=3$ (D) $A=\sqrt{12}$ (E) $A=12$

280
D12
D07

Si $d=\sqrt{\dfrac{k-1}{k+1}}$, alors $k=$

(A) $\dfrac{1+d^2}{1-d^2}$ (B) $\dfrac{1-d^2}{1+d^2}$ (C) $\dfrac{1-d}{1+d}$ (D) $\dfrac{(1+d)^2}{(1-d)^2}$ (E) $\dfrac{d^2+1}{d^2-1}$

281 D12 D11

Parmi les cinq nombres

$$\frac{12\,345\,678\,900\,987\,654\,321}{9},\ \frac{234\,567\,890\,098\,765\,432}{4},$$
$$\frac{3\,456\,789\,009\,876\,543}{3},\ \frac{6\,789\,009\,876}{6}\ \text{et}\ \frac{34\,567\,890\,098}{8},$$

combien sont des entiers ?

(A) Aucun (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

282 D12 D12

Sans réponse préformulée — Un *nombre palindrome* est un nombre naturel qui conserve la même valeur lorsqu'il est lu de droite à gauche, comme par exemple 66 ou 2442. Combien existe-t-il de nombres palindromes dans l'intervalle $[\,17; 1000\,]$?

283 D12 D13

$2^{2012} - 2^{2011} - 2^{2010} =$

(A) 2^{-2009} (B) 2 (C) 2^{2010} (D) 3×2^{2010} (E) 2^{2011}

284 D12 D15

Si a, b et c sont des réels non nuls tels que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 4$ et $\dfrac{1}{abc} = 2$, que vaut $ab + bc + ca$?

(A) $1/8$ (B) $1/2$ (C) 2 (D) 8

(E) Les données sont insuffisantes pour le déterminer.

285 D12 D23

Si un nombre naturel non nul possède d diviseurs, combien de diviseurs possède son carré ?

(A) d^2 (B) $2d$ (C) $2d - 1$

(D) $f(d)$, pour une fonction f autre que les précédentes

(E) Ce nombre n'est pas toujours déterminé par d.

286
D12
D29

Quel est le nombre de solutions du système d'équations

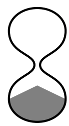
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 = 4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Une infinité

287
E13
D01

Un sablier permet de mesurer une durée de trois minutes. Combien de fois faut-il le retourner pour mesurer 2013 minutes ? (La mesure commence avec le sablier au repos, le sable en bas.)



(A) 2014 (B) 2013 (C) 672 (D) 671 (E) 670

288
E13
D02

$$\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}} =$$

(A) 1 (B) 3 (C) $\sqrt{11}$ (D) $\sqrt{15}$ (E) 5

289
E13
D03

$$\frac{2^2 + 2^0 + 2^1 + 2^3}{2^{-2} + 2^{-0} + 2^{-1} + 2^{-3}} =$$

(A) 2^{12} (B) 29 (C) 8 (D) 1 (E) -1

290
E13
D10

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de trois chiffres dont le chiffre des dizaines est le triple de celui des unités et la moitié de celui des centaines ?

291
E13
D12

Si $x^2 - y^2 = 4$ et $x^4 - y^4 = 16$, que vaut $x^2 + y^2$?

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 (E) Une autre réponse

292 E13 D19

Les nombres naturels A, B, C, D et E satisfont :
- B est le double de A,
- C est le triple de B,
- D est le quadruple de C,
- E est le quintuple de D,
- La différence de E et A vaut 833.

Combien de ces cinq nombres sont pairs ?

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5
(E) Les informations données ne suffisent pas pour déterminer la réponse.

293 E13 D21

$$\left(\frac{4^4 \cdot 3^{16}}{9^8 \cdot 2^7}\right)^6 =$$

(A) 192 (B) 128 (C) 32 (D) 64/9 (E) Une autre réponse

294 E13 D27

Que vaut la somme de toutes les solutions de l'équation

$$(x-1)^4 - (x+1)^4 = 0,$$

d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) Une autre valeur
(E) Il n'y a aucune solution

295 D13 D01

Sans réponse préformulée — Un nombre de deux chiffres diminue de 27 quand on renverse l'ordre de ses chiffres. Si la somme de ses chiffres est 13, quel est le nombre de départ ?

296 D13 D02

Sans réponse préformulée — Chacun des naturels de 1 à 10 est multiplié par chacun des naturels de 1 à 10. Parmi les 100 produits obtenus, combien sont impairs ?

297 D13 D03

Sachant qu'un nombre est un multiple de 10, augmenté de 7, quel est le reste de sa division par 5 ?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 7 (E) Cela dépend du nombre.

298 D13 D04

Sans réponse préformulée — La somme de deux nombres naturels est 222. Quel est le plus grand de ces nombres s'il dépasse de 2 unités le triple du petit ?

299 D13 D05

$50^{30}/100^{15} =$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 5^{15} (E) 25^{15}

300 D13 D07

Si le prix d'une marchandise A est supérieur de 50 % à celui d'une marchandise B, de quel pourcentage le prix de la marchandise B est-il inférieur à celui de A ?

(A) 75 % (B) 50 % (C) 33,33… % (D) 25 %
(E) Les données sont insuffisantes pour déterminer la réponse.

301 D13 D10

Sans réponse préformulée — Si $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16} + \cdots - \dfrac{1}{1024} = \dfrac{x}{1024}$, que vaut x ?

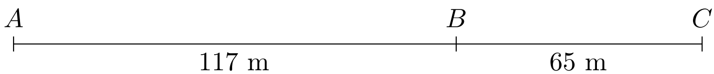
302 D13 D13

Solange a 22 bouteilles identiques de jus. Avec 14 de ces bouteilles, elle remplit exactement 35 petits verres et avec les 8 bouteilles restantes, elle remplit exactement 12 grands verres. Quel est le rapport du volume d'un grand verre à celui d'un petit ?

(A) 1 (B) 5/3 (C) 3/2 (D) 7/4 (E) 4/7

303 D13 D15

Avant une tempête, le long d'une route rectiligne, des poteaux étaient plantés régulièrement à égale distance (distance exprimée par un nombre entier de mètres, supérieur à 10). Après la tempête, sur un certain tronçon, il ne reste que trois poteaux : en A, en B et en C.



Combien de poteaux ont été arrachés entre A et C ?

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 16

304 D13 D16

Rappelons que a^{b^c} signifie $a^{(b^c)}$. Que vaut la racine carrée de $16^{16^{16}}$?

(A) $4^{16^{16}}$ (B) $16^{4^{16}}$ (C) 16^{16^4} (D) $16^{8^{16}}$ (E) 16^{16^8}

305 D13 D18

Sans réponse préformulée — Quelle est la racine carrée de la somme de tous les naturels impairs inférieurs à 100 ?

306 D13 D20

Sans réponse préformulée — Les nombres entiers a, b, c et d sont tels que $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$ et $d < 40$. Quelle est la valeur maximale de a ?

307 D13 D21

Quel est le nombre de chiffres du plus petit multiple non nul de 175 formé uniquement des chiffres 0 et 1 ?

(A) 6 (B) 7 (C) 11 (D) 12
(E) Un nombre strictement supérieur à 12

308 D13 D22

Quel est le plus petit nombre naturel ayant exactement 18 diviseurs ?

(A) 120 (B) 288 (C) 300 (D) 450 (E) Une autre réponse

309 D13 D25

Sans réponse préformulée — Si a, b, ..., d sont des chiffres, $\overline{ab\ldots d}$ désigne le naturel dont l'écriture décimale est constituée de ces chiffres, dans cet ordre. Quel est le naturel de trois chiffres $\overline{abc}$ tel que $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$?

310 E14 D01

Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de nombres carrés non nuls inférieurs à 200 et divisibles par 6 ?

311 E14 D02

Un sportif a couru un marathon en 3 h 13 min 27 s. Il est arrivé 57 min 49 s après le vainqueur. Quel est le temps de celui-ci ?

(A) 2 h 15 min 38 s
(B) 2 h 15 min 48 s
(C) 2 h 17 min 38 s
(D) 2 h 44 min 22 s
(E) 4 h 11 min 16 s

312 E14 D03

Si les 20 % d'un nombre valent 12, que valent les 30 % de ce nombre ?

(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) Une autre réponse

313 E14 D04

Un nombre naturel est un palindrome si sa lecture de droite à gauche produit le même résultat que sa lecture usuelle de gauche à droite. Par exemple, l'année 2002 avait pour millésime un nombre palindrome. Quelle durée la sépare de la prochaine année à avoir la même propriété ?

(A) Moins de 20 ans
(B) Entre 21 et 40 ans
(C) Entre 41 et 80 ans
(D) Entre 81 et 160 ans
(E) Entre 161 et 320 ans

314 E14 D05

$1^{2^{3^{4^5}}} =$

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 120 (E) Une autre valeur

315 E14 D06

Par quel chiffre se termine l'écriture décimale de 2014^{2014} ?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

316 E14 D08

Sans réponse préformulée — Que vaut le produit du PGCD et du PPCM de 18 et de 21 ?

317 E14 D09

Sans réponse préformulée — Dans une bassecour, le nombre de poules est le triple de celui des canards et le double de celui des lapins. Si le nombre total de pattes est de 112, combien y a-t-il de têtes ?

318 E14 D11

Que vaut le quotient de $1 - \frac{1}{3}$ par $1 - \frac{1}{2}$?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{4}{3}$

319 E14 D15

À eux trois, Benoit, Pascal et Jean-Paul ont 144 ans. Benoit est deux fois plus jeune que Jean-Paul et Pascal a une fois et demie l'âge de Benoit. Quel est l'âge de Jean-Paul ?

(A) 64 (B) 48 (C) 32 (D) 24 (E) 16

320 E14 D16

$1/2^{2013} - 1/2^{2014} =$

(A) $1/2$ (B) 1 (C) 2 (D) $1/2^{2013}$ (E) $1/2^{2014}$

321 E14 D17

$$\frac{50^{21}}{100^{10}25^{10}} =$$

(A) 1 (B) 10 (C) 25 (D) 50 (E) 50^{11}

322 E14 D19

Lorsque la touche $\boxed{x^2}$ d'une calculatrice est enfoncée, le nombre affiché est remplacé par son carré. Si la calculatrice affiche initialement le nombre 2, quel est le plus petit nombre de pressions sur cette touche qui conduit à l'affichage d'un nombre supérieur à 2014 ?

(A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 1012 (E) Une autre valeur

323 E14 D22

Sans réponse préformulée — Que vaut $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$?

324 E14 D24

Si la vitesse de la lumière est de 3×10^5 km/s, quelle distance parcourt la lumière en une heure ?

(A) $0{,}108 \times 10^7$ km

(B) $1{,}08 \times 10^7$ km

(C) $10{,}8 \times 10^7$ km

(D) 108×10^7 km

(E) $1\,080 \times 10^7$ km

325 E14 D28

Sans réponse préformulée — Jules dispose d'un colis de ballons répartis en 100 sachets, de deux types : les sachets A contenant 4 ballons blancs, un rouge et un vert, et les sachets B contenant un ballon rouge et 2 verts. Il réussit à redistribuer ces ballons dans deux autres types de sachets : les sachets C contenant 2 ballons blancs et 2 verts, et les sachets D contenant 4 ballons rouges. Quel est le nombre des nouveaux sachets ?

326 E14 D30 À l'éliminatoire de l'OMB, chaque concurrent se voit proposer 30 questions ; il reçoit 0 point par mauvaise réponse, 2 points par abstention et 5 points par bonne réponse. Quel est le plus grand score qu'il est possible d'obtenir de plusieurs manières ? (Deux manières d'obtenir un score sont différentes si leurs nombres de mauvaises réponses diffèrent ou leurs nombres d'abstentions diffèrent.)

(A) 135 (B) 136 (C) 137 (D) 138 (E) 139

327 D14 D02 *Sans réponse préformulée* — Un nombre premier est formé de deux chiffres, qui sont eux-mêmes des nombres premiers. Si on échange les deux chiffres, on obtient un nombre, premier lui aussi, plus grand que le nombre initial. Quel est le nombre initial ?

328 D14 D03 *Sans réponse préformulée* — Un grain de riz est placé sur la première case d'un échiquier (de 8×8 cases), puis 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, etc., en doublant chaque fois le nombre de grains. Le processus est arrêté lorsqu'il y a 127 grains de riz sur l'échiquier. Combien de cases ne comprendront aucun grain de riz ?

329 D14 D04 *Sans réponse préformulée* — Un nombre naturel est un *palindrome* s'il est égal au nombre obtenu en le lisant de droite à gauche. Combien y en a-t-il entre 100 et 1000 ?

330 D14 D05 Une pompe à vide évacue la moitié de l'air d'un récipient à chaque mouvement. Quel pourcentage de la quantité initiale d'air reste-t-il dans le récipient après 10 mouvements ?

(A) Environ 0,1 %
(B) Environ 0,2 %
(C) Environ 0,5 %
(D) Environ 1 %
(E) Environ 2 %

331 D14 D08 *Sans réponse préformulée* — Pascal et Benoit jouent à un jeu divisé en 9 manches. Il n'y a pas de manches nulles. À la fin de chaque manche, le vainqueur marque 7 points et le perdant en marque 3. Le score final de Pascal est de 51. Combien de manches ont été remportées par Benoit ?

332 D14 D09

Sans réponse préformulée — La somme des chiffres d'un nombre de trois chiffres vaut 9. Le chiffre des dizaines dépasse le chiffre des unités de 2. Le nombre lu de droite à gauche dépasse le nombre initial de 198. Quel est le nombre initial ?

333 D14 D10

Lequel de ces nombres est la moyenne arithmétique d'un nombre naturel et de son carré ?

(A) 4 (B) 9 (C) 16 (D) 25 (E) 36

334 D14 D12

Un nombre réel est compris entre 5 et 11. La moyenne arithmétique de 6, 10 et ce nombre *ne* peut *pas* être :

(A) 7,3 ; (B) 8,1 ; (C) 8,5 ; (D) 8,9 ; (E) 9,2.

335 D14 D14

Quatre années de suite, aux rentrées de 2003 à 2006, le nombre d'élèves inscrits dans l'école du Pré a augmenté de 20 %. Ainsi, de la rentrée 2002 à la rentrée 2006, le nombre d'élèves de cette école :

(A) A augmenté de 60 % ;
(B) A augmenté de 80 % ;
(C) A un peu plus que doublé ;
(D) A un peu plus que triplé ;
(E) A au moins quadruplé.

336 D14 D15

Sans réponse préformulée — Un nombre carré parfait de quatre chiffres non nuls a 6 comme chiffre de gauche. Le chiffre de droite de ce nombre est égal au chiffre de droite de sa racine carrée. Quel est le nombre formé par les trois chiffres inconnus du carré ?

337 D14 D18

Pour quelles valeurs du réel m l'équation $|x-1|+x=|2x+2|+m$, d'inconnue x, admet-elle une solution dans l'intervalle $]-1;1[$?

(A) $m=3$ (B) $m>3$ (C) $-1<m<3$ (D) $-3<m<1$ (E) $m<1$

338 D14 D20

Sans réponse préformulée — Entre 1 et 2014, combien existe-t-il d'entiers multiples de 5 ou de 17 mais pas de 85 ?

339 D14 D21

Si n est un carré parfait, quel est le carré parfait suivant ?

(A) $n+1$
(B) n^2+1
(C) n^2+2n+1
(D) n^2+n
(E) $n+2\sqrt{n}+1$

340 D14 D22

Sans réponse préformulée — Si $x+y=9$ et $xy=4$, que vaut x^3+y^3 ?

341 D14 D23

Sans réponse préformulée — Un nombre premier comporte deux chiffres. Si on ajoute le quintuple du chiffre des unités au quadruple du chiffre des dizaines on retrouve le nombre premier initial. Quel est-il ?

342 D14 D25

Sans réponse préformulée — Si $n!$ désigne la *factorielle* du naturel n, c'est-à-dire le produit $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, par combien de zéros se termine $32!$?

343 D14 D27

Sans réponse préformulée — Les réels x et y satisfont les deux équations $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{y}$ et $x^2-y^2=144$; de plus, xy n'est pas nul. Que vaut ce produit ?

344 D14 D29

Parmi les inégalités suivantes, une seule est correcte.
Laquelle ?

(A) $\sqrt{14}+\sqrt{2}>\sqrt{6}+\sqrt{10}$
(B) $\sqrt{8}+\sqrt{6}>\sqrt{7}+\sqrt{7}$
(C) $\sqrt{8}+\sqrt{6}>\sqrt{9}+\sqrt{5}$
(D) $\sqrt{7}+\sqrt{5}>\sqrt{6}+\sqrt{6}$
(E) $\sqrt{12}+\sqrt{3}>\sqrt{10}+\sqrt{5}$

3.3 Géométrie

345 E11 D05

Par lequel des points suivants passe la droite d'équation $y = 2x$?

(A) $A = (-2, 0)$
(B) $B = (0, -2)$
(C) $C = (2, 2)$
(D) $D = (-2, -2)$
(E) L'origine du repère

346 E11 D08

Si le diamètre d'un cercle augmente de π, de combien augmente sa circonférence ?

(A) π^2 (B) $2\pi^2$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π (E) 2π

347 E11 D09

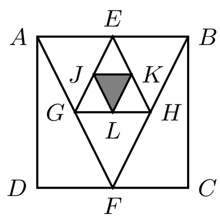
Mathieu possède un jardin carré de $100\,\text{m}^2$. Il vient de le recouvrir, sur 5 cm d'épaisseur, d'une couche de terreau à $40\,€/\text{m}^3$ et de l'entourer d'une bordure coutant $4\,€/\text{m}$. À combien lui sont revenus ces travaux ?

(A) 56 € (B) 360 € (C) 416 € (D) 616 € (E) 1760 €

348 E11 D10

Les points E et F sont les milieux de deux côtés opposés du carré $ABCD$; les points G, H, J, K et L sont milieux des côtés de triangles auxquels ils appartiennent. Que vaut le rapport de l'aire de $ABCD$ à celle de JKL ?

(A) 16 (B) 18 (C) 24 (D) 32 (E) 36



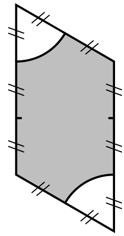
349 E11 D14

Un rectangle $ABCD$ est inscrit à un cercle de rayon 25. Si $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{3}{4}$, quelle est la longueur du plus grand côté du rectangle ?

(A) 3 (B) 4 (C) 30 (D) 40 (E) 50

350 E11 D19

Les angles aigus du parallélogramme ci-contre mesurent 60° et les côtés mesurent 2 et 3. Que vaut l'aire ombrée ?



(A) $3\sqrt{3}+\pi/3$

(B) $3\sqrt{3}-\pi/3$

(C) $3\sqrt{3}-\pi$

(D) $\sqrt{3}+\pi/3$

(E) $\sqrt{3}-\pi/3$

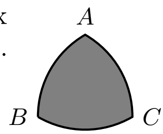
351 E11 D21

L'aire du quadrilatère limité par l'axe Ox, la droite $x=1$, la droite $x=4$ et la droite $y=mx+4$ est égale à 7. Que vaut m ?

(A) $-\dfrac{3}{2}$ (B) $-\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$ (E) -2

352 E11 D23

Dans la figure suivante, les arcs de cercles sont centrés aux sommets du triangle équilatéral ABC, dont le côté vaut 1. Que vaut l'aire ombrée ?



(A) $\pi/2$

(B) $\pi-\sqrt{3}$

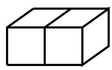
(C) $\pi/2-\sqrt{3}/2$

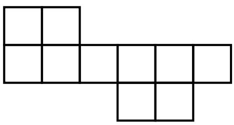
(D) $\pi/3+\sqrt{3}/2$

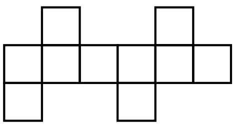
(E) $\pi/6+\sqrt{3}$

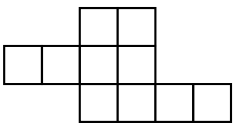
353 E11 D25

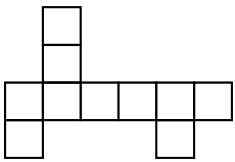
Avec lequel des développements ci-après sera-t-il impossible de reconstituer le solide ci-contre, formé de deux cubes adjacents ?

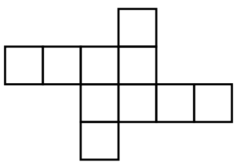


(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

354 E11 D29

Une sphère est inscrite dans un cube. Un second cube est inscrit dans la sphère. Quel est le rapport du volume du grand cube à celui du petit ?

(A) 2 (B) 3 (C) $2\sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{2}$ (E) $3\sqrt{3}$

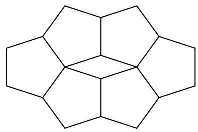
355 D11 D08

Le cercle C_1 est le bord du disque D_1 et le cercle C_2 est le bord du disque D_2. Un arc de 60° de C_1 a la même longueur qu'un arc de 45° de C_2. Quel est le rapport de l'aire de D_1 à celle de D_2 ?

(A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{9}{16}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{4}{3}$

356 D11 D10

Sans réponse préformulée — Des pentagones réguliers ont été juxtaposés (v. la figure ci-contre). Quelle est la mesure en degrés de l'angle obtus du losange central ?



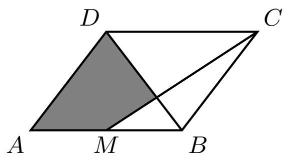
357 D11 D13

Les points $(1, y_1)$ et $(-1, y_2)$ appartiennent tous deux à la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$. Que vaut b si $y_1 - y_2 = 6$?

(A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) 3 (E) -3

358 D11 D15

Sans réponse préformulée — Le parallélogramme $ABCD$, dont l'aire est de $120\,\mathrm{m}^2$, est découpé en quatre régions par la diagonale $[BD]$ et le segment $[CM]$, où M est le milieu du côté $[AB]$. Quelle est, en mètres carrés, l'aire de la région ombrée ?

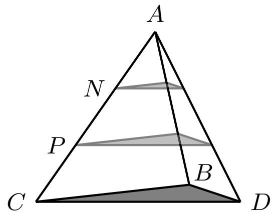


359 D11 D16

Sans réponse préformulée — Partant d'un sommet, une mouche parcourt extérieurement les arêtes d'un cube. Arrivée en un sommet, elle emprunte l'arête située à gauche, puis au sommet suivant celle de droite, puis celle de gauche, puis à nouveau celle de droite, etc. Combien d'arêtes a-t-elle parcourues lorsqu'elle revient pour la première fois au sommet initial ?

360
D11
D18

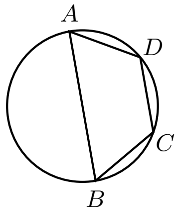
La pyramide $ABCD$ est coupée par deux plans parallèles au plan BCD ; ces deux plans passent par les points N et P qui partagent $[AC]$ en trois segments de même longueur. Si V est le volume de la pyramide et W celui de sa partie comprise entre les deux plans de section, que vaut le rapport V/W ?



(A) 3 (B) $\frac{9}{2}$ (C) 9 (D) $\frac{27}{7}$ (E) $\frac{8}{3}$

361
D11
D21

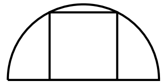
Le trapèze $ABCD$ est inscrit dans un cercle de rayon 2 ; son côté $[AB]$ est un diamètre du cercle. Si $|AD| = 2$, quelle est l'aire du trapèze ?



(A) $3/2$ (B) $6\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $6\sqrt{3}$ (E) $3\sqrt{3}$

362
D11
D23

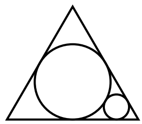
Lorsqu'un carré est inscrit dans un demi-cercle de rayon r, son aire vaut :



(A) $2r^2$ (B) $\frac{5}{6}r^2$ (C) $\frac{4}{5}r^2$ (D) $\frac{2}{3}r^2$ (E) $\frac{1}{2}r^2$

363
D11
D25

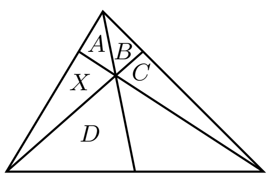
Dans la figure ci-contre, le grand cercle est inscrit au triangle équilatéral et le petit cercle est tangent à deux de ses côtés ainsi qu'au grand cercle. Quel est le rapport de l'aire du grand disque à celle du petit ?



(A) 3 (B) 9 (C) 12 (D) 16 (E) Une autre réponse

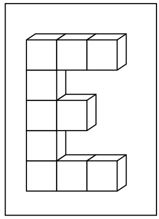
364
D11
D30

Sans réponse préformulée — Sur la figure (imprécise) ci-contre, trois droites concourantes issues des sommets d'un triangle le partagent en six petits triangles. Certaines aires sont données : $A = 2$, $B = 2$, $C = 6$ et $D = 12$. Que vaut l'aire X ?



365 E12 D04

Une pièce de bois en forme de E a été fabriquée en collant dix cubes de 8 cm de côté. Cette pièce a été ensuite collée sur un panneau. On a observé qu'il fallait 24 cL de peinture pour recouvrir entièrement l'un de ces petits cubes. Combien de centilitres de peinture faudra-t-il utiliser pour couvrir la pièce de bois (panneau non compris) ?



(A) 104 (B) 116 (C) 128 (D) 136 (E) 216

366 E12 D06

Dans le triangle ABC rectangle en A, si $|AB| = 4$, $|AC| = 3$ et si D est le milieu de $[BC]$, alors $|AD| =$

(A) 2 (B) 2,5 (C) 3 (D) 3,5 (E) 5

367 E12 D09

Si la diagonale d'un carré mesure $5\sqrt{2}$ cm, quelle est, en centimètres, la mesure de son périmètre ?

(A) 5 (B) 10 (C) 20 (D) 25 (E) $4\sqrt{50}$

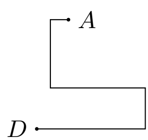
368 E12 D10

Laquelle des figures suivantes n'a jamais exactement deux axes de symétrie ?

(A) Un losange
(B) Un rectangle
(C) Un segment de droite
(D) Un triangle
(E) Un cercle muni d'un diamètre

369 E12 D11

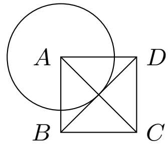
Muni de la boussole qu'il vient de recevoir, Max Lexplorateur est parti du point de départ D, a parcouru 24 pas vers l'est, 9 pas vers le nord, 21 pas vers l'ouest, 15 pas vers le nord et enfin 4 pas vers l'est. Il est ainsi arrivé au point A. Combien de pas aurait-il économisés s'il avait marché en ligne droite de D à A ?



(A) 44 (B) 45 (C) 46 (D) 47 (E) 48

370 E12 D15

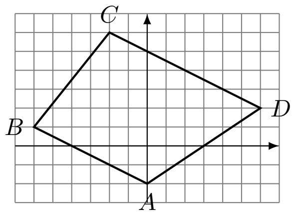
Le sommet A du carré $ABCD$ est le centre du cercle et, comme le montre le schéma, ce cercle passe par le centre du carré. Si l'aire du carré est de 100 cm^2, quelle est, en centimètres carrés, celle du disque ?



(A) 40π (B) 50π (C) 75π (D) 80π (E) 100π

371 E12 D19

Sans réponse préformulée — Évaluer l'aire du quadrilatère $ABCD$ représenté ci-contre, si le carré du quadrillage est l'unité d'aire.



372 E12 D20

Les deux triangles non isocèles ABC et DEF sont isométriques, les sommets se correspondant dans cet ordre. Les points B, C, F et E sont alignés dans cet ordre sur une droite d. Les sommets A et D sont de part et d'autre de d. Quelle isométrie applique le premier triangle sur le second ?

(A) Une symétrie axiale composée avec une translation

(B) Une translation parallèle à d

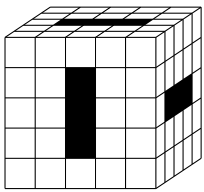
(C) La symétrie d'axe d

(D) Une rotation d'angle différent de 180°

(E) Une symétrie centrale dont le centre est sur d

373 E12 D21

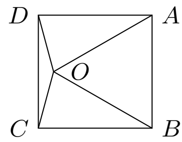
Ce solide est un grand cube formé de petits cubes et traversé par trois tunnels. Chaque tunnel va d'une face du grand cube à la face opposée. Combien de petits cubes composent ce solide ?



(A) 80 (B) 88 (C) 89 (D) 92 (E) 96

374
E12
D22

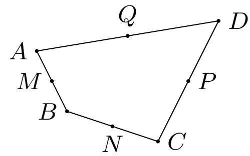
Le quadrilatère $ABCD$ est un carré et le triangle OAB est équilatéral. Déterminer l'amplitude de $\widehat{CDO}$.



(A) 12° (B) 14° (C) 15° (D) 16° (E) 17°

375
E12
D24

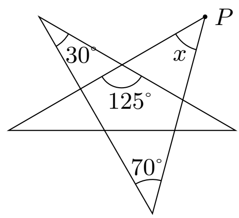
Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du quadrilatère $ABCD$. Si l'aire de ce quadrilatère vaut 1, alors la somme des aires des deux triangles AMQ et CPN vaut



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

376
E12
D26

Dans le polygone étoilé ci-dessous, on donne l'amplitude de 3 angles, comme indiqué. Déterminer l'amplitude x de l'angle en P.



(A) 23° (B) 24° (C) 25° (D) 26° (E) 28°

377
E12
D29

L'aire totale d'un tétraèdre régulier vaut $324\sqrt{3}$ cm^2. Quelle est la longueur d'une de ses arêtes ?

(A) $6\sqrt{3}$ cm (B) 18 cm (C) $12\sqrt{3}$ cm (D) $18\sqrt{3}$ cm (E) 36 cm

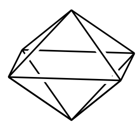
378
D12
D02

Sans réponse préformulée — Un cercle de centre C et un cercle de centre D se coupent en deux points distincts M et P. Parmi les affirmations suivantes, combien sont toujours vraies ?

- CD est médiatrice de $[MP]$;
- MP est médiatrice de $[CD]$;
- $|CM| = |MD|$;
- $|CM| = |CP|$;
- $CMDP$ est un losange.

379
D12
D09

Sans réponse préformulée — Dans un octaèdre régulier, combien y a-t-il de paires d'arêtes parallèles ?



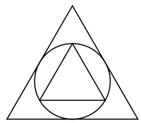
380 D12 D10

Un rectangle de 2010 cm sur 2012 cm est recouvert d'un quadrillage dont la maille mesure 1 cm. Par combien d'intersections de lignes du quadrillage (bord compris) passe une diagonale de ce rectangle ?

(A) 2 (B) 3 (C) 500 (D) 1005 (E) 1006

381 D12 D16

Sans réponse préformulée — Deux triangles équilatéraux sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle. Que vaut le rapport de l'aire du triangle circonscrit à celle du triangle inscrit ?



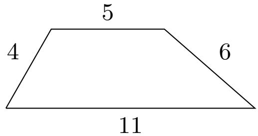
382 D12 D18

Par un point P distant de 15 du centre d'un cercle de rayon 9, on mène les tangentes au cercle. Quel est le rayon du cercle inscrit entre ces deux droites et le cercle initial ?

(A) 2 (B) 9/4 (C) 8/3 (D) 12/5 (E) 5/2

383 D12 D20

Que vaut l'aire d'un trapèze dont les côtés mesurent respectivement 4, 5, 6 et 11, comme l'indique le schéma ci-contre ?



(A) 80 (B) 40 (C) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ (D) $19\sqrt{2}$ (E) $\frac{64\sqrt{2}}{9}$

384 D12 D21

Si $ABCD$ est un carré, l'application successive des symétries centrales par rapport aux points A, B, C et D équivaut à

(A) La symétrie centrale par rapport au centre du carré ;
(B) La translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
(C) La translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$;
(D) La translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$;
(E) La transformation identique.

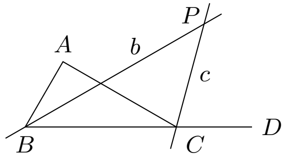
385 D12 D22

Un triangle équilatéral et un hexagone régulier ont la même aire. Que vaut le rapport $P_{\text{tri}}/P_{\text{hex}}$ de leurs périmètres ?

(A) 1 (B) $3/2$ (C) $2/3$ (D) $\sqrt{6}/3$ (E) $\sqrt{6}/2$

386 D12 D24

Sans réponse préformulée — Ci-contre, b est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et c est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACD}$. Ces deux droites se coupent en P. Si $\widehat{BPC} = 40°$, quelle est, en degrés, la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?



387 D12 D26

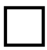
Sans réponse préformulée — Le triangle ABC est rectangle en B et le point D, appartenant au segment $[BC]$, est tel que $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$. Si $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, que vaut, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{ACB}$?

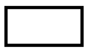
388 D12 D27

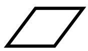
Sans réponse préformulée — Combien de droites faut-il au minimum pour que toutes les arêtes d'un cube donné soient rencontrées par au moins une de ces droites ?

389 E13 D04

Parmi les quadrilatères suivants, quel est celui qui admet le moins d'axes de symétrie ?

(A) Ce carré : 

(B) Ce rectangle : 

(C) Ce losange : 

(D) Ce parallélogramme : 

(E) Ce trapèze isocèle : 

390 E13 D06

Un bloc (précisément : un parallélépipède rectangle) de plasticine de $4 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} \times \pi \text{ cm}$ est transformé en une sphère. Quel est, en centimètres, le rayon de cette sphère ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

391 E13 D08

Une chèvre broute un pré circulaire de rayon R. Elle est attachée à l'extrémité d'une corde, dont l'autre bout est fixé à un piquet planté au centre de la pâture. Quelle doit être la longueur de la corde pour que la chèvre ne broute que le quart de la surface du pré ?

(A) $R/4$ **(B)** $R/2$ **(C)** $R-2$ **(D)** $R-4$ **(E)** Une autre réponse

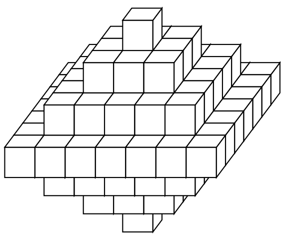
392 E13 D11

Dans un losange de 10 cm de côté, la grande diagonale mesure 16 cm. Que vaut l'aire de ce losange ?

(A) 192 cm^2 **(B)** 160 cm^2 **(C)** 100 cm^2 **(D)** 96 cm^2 **(E)** 80 cm^2

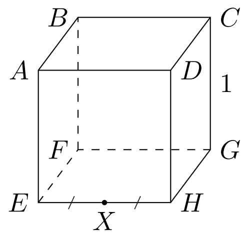
393 E13 D13

Sans réponse préformulée — Le solide représenté ci-dessous, formé de petits cubes, admet cinq plans de symétrie. Aucun petit cube intérieur n'est manquant. De combien de petits cubes est-il formé ?



394 E13 D16

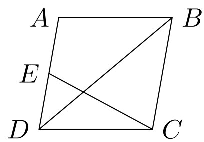
La longueur de l'arête du cube $ABCDEFGH$ vaut 1. Si X est le milieu de $[EH]$, quelle est la longueur du segment $[CX]$?



(A) $\sqrt{2}$ **(B)** 1 **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 2 **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

395 E13 D17

$ABCD$ est un losange et $|AE| = |ED|$. Le rapport de l'aire de EDC à celle de BCD est alors de



(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** 3 **(E)** 2

396 E13 D22

Pour peindre les extérieurs (c'est-à-dire les six faces) des cubes (creux) C et D, il faut 16 fois plus de peinture pour D que pour C. Dans ce cas, pour les remplir il faut

(A) 4 fois plus de liquide pour D que pour C ;
(B) 16 fois plus de liquide pour D que pour C ;
(C) 24 fois plus de liquide pour D que pour C ;
(D) 48 fois plus de liquide pour D que pour C ;
(E) 64 fois plus de liquide pour D que pour C.

397 E13 D26

Les points A, B et C, qui sont les milieux des côtés du triangle XYZ, ont respectivement pour coordonnées, dans un repère orthonormé, $(0,0)$, $(3,0)$ et $(0,4)$. Quelle est l'aire du triangle XYZ ?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 48 (E) Une autre réponse

398 E13 D28

Dans un repère orthonormé, les côtés d'un triangle sont contenus dans les droites d'équations $y = 0$, $y = x$ et $y = -2x + 21$. Que vaut l'aire de ce triangle ?

(A) 42 (B) 40,50 (C) 38,25 (D) 37,75 (E) 36,75

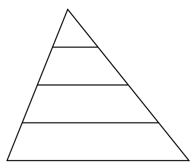
399 D13 D08

Deux arêtes sont *gauches* si aucun plan de l'espace ne les contient toutes les deux. Combien des arêtes d'un cube sont gauches avec une arête choisie ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

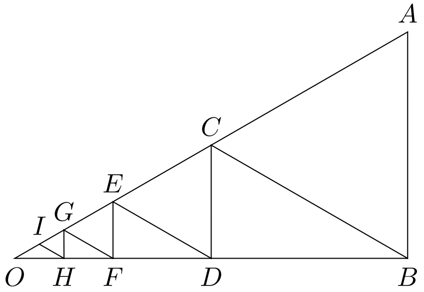
400 D13 D11

Sans réponse préformulée — Dans un triangle acutangle de base 8 et de hauteur 40, sont tracées trois parallèles à la base ; elles déterminent trois trapèzes de hauteur 10. Dans chacun de ces trois trapèzes est inscrit le plus grand rectangle possible (avec deux côtés inclus dans les bases du trapèze). Quelle est l'aire totale des trois rectangles ?



401 D13 D17

Sans réponse préformulée — Le triangle OAB est rectangle en B. Les points C, E, G et I sont situés sur le côté $[AO]$ et les points D, F, H sont situés sur le côté $[OB]$; les triangles ABC, CDE, EFG et GHI sont équilatéraux. Quel est le rapport de l'aire du triangle ABC à celle du triangle GHI ?



402 D13 D19

Que vaut l'angle des droites prolongeant les côtés $[AB]$ et $[DE]$ d'un pentagone régulier $ABCDE$?

(A) 30° (B) 32° (C) 35° (D) 36° (E) 40°

403 D13 D26

Une des hauteurs d'un triangle équilatéral d'aire 1200 est un côté d'un deuxième triangle équilatéral ; une des hauteurs de celui-ci est un côté d'un troisième triangle équilatéral. Quelle est l'aire de ce troisième triangle ?

(A) $600\sqrt{3}$ (B) 900 (C) 800 (D) 675 (E) 600

404 D13 D27

Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle, alors l'expression $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

(A) Est toujours négative ;

(B) Est toujours positive ;

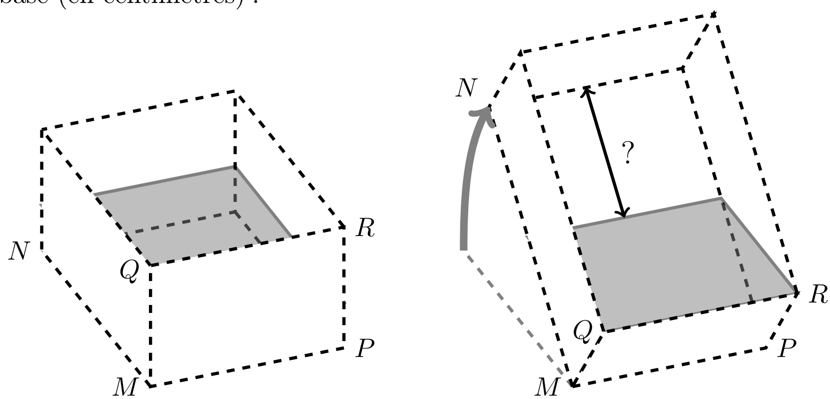
(C) Est positive uniquement lorsque le triangle est acutangle ;

(D) Est positive uniquement lorsque le triangle est obtusangle.

(E) Aucune des réponses précédentes.

405 D13 D28 *Sans réponse préformulée* — Si, dans un repère orthonormé, l'unité de longueur est le centimètre, quelle est, en centimètres carrés, l'aire d'un triangle dont les coordonnées des sommets sont $(-2,-4)$, $(2,8)$ et $(10,2)$?

406 D13 D29 *Sans réponse préformulée* — Un caisson a la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur $|MN| = 180$ cm, de largeur $|MP| = 128$ cm et de hauteur $|MQ| = 80$ cm. Déposé sur une table horizontale, il contient de l'eau sur une hauteur de 30 cm. Je le relève en le faisant pivoter autour de MP, qui reste sur la table, jusqu'à ce que le bord de l'eau atteigne l'arête supérieure QR. De quelle longueur l'eau s'est-elle retirée sur la base (en centimètres) ?



407 D13 D30 *Sans réponse préformulée* — Soit un rectangle $ABCD$ et E un point de $[AB]$ tel que $|AE| = 60$ mm et $|EB| = 40$ mm. Sur $[CD]$ se trouve un point F. Sachant que l'aire du trapèze $AEFD$ vaut les deux tiers de l'aire du trapèze $EBCF$, que vaut la longueur $|DF|$, en millimètres ?

408 E14 D07 La base d'une pyramide est un polygone régulier à 2014 côtés. Quelle est la différence entre le nombre d'arêtes de cette pyramide et son nombre de faces ?

Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 2 Ⓓ 2013 Ⓔ 2014

409 E14 D10

En combien de points au maximum se coupent un rectangle non carré et un cercle ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

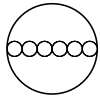
410 E14 D12

Le triangle ABC est rectangle en B et D est le milieu de $[AC]$. Si $|AB| = 10$ et $|BC| = 24$, que vaut $|BD|$?

(A) 26 (B) 17 (C) 13 (D) 12 (E) $2\sqrt{15}$

411 E14 D14

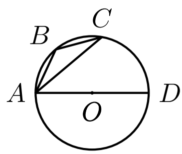
Les 7 cercles ci-contre sont tangents entre eux et leurs centres sont alignés ; les 6 petits cercles ont le même rayon. Que vaut le rapport de la circonférence du grand cercle à celle d'un des petits cercles ?



(A) 4 (B) $2\sqrt{6}$ (C) 5 (D) $4\sqrt{2}$ (E) 6

412 E14 D18

Si $[AD]$ est un diamètre du cercle, $|AB| = |BC|$ et $\widehat{BCA} = 27^\circ$, que vaut $\widehat{CAD}$?



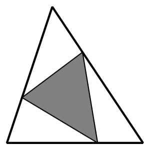
(A) 36° (B) 35° (C) 34° (D) 33° (E) 32°

413 E14 D20

Sans réponse préformulée — Les dimensions d'un rectangle sont deux nombres premiers et la diagonale mesure $\sqrt{218}$. Que vaut l'aire de ce rectangle ?

414 E14 D23

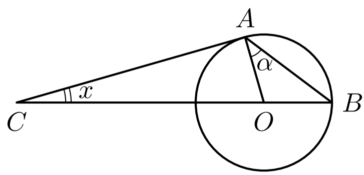
Les sommets du triangle ombré sont situés aux deux tiers des côtés du grand triangle. Quel est le rapport de l'aire du grand triangle à l'aire du triangle ombré ?



(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) 3 (D) 4 (E) 6

415 E14 D25

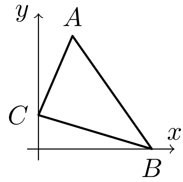
La droite AC est tangente en A au cercle, dont O est le centre. Si α est la mesure en degrés de $\widehat{OAB}$ et x celle de $\widehat{BCA}$, alors $x =$



(A) α (B) $90^\circ + 2\alpha$ (C) $90^\circ - 2\alpha$ (D) $180^\circ + \alpha$ (E) $180^\circ - \alpha$

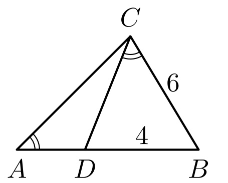
416
E14
D27

Sans réponse préformulée — Dans la figure ci-contre, les sommets du triangle acutangle ABC ont les coordonnées suivantes : $A = (3, 10)$, $B = (10, 0)$, $C = (0, c)$. Pour quelle valeur de c l'aire de ABC vaut-elle 29 ?



417
E14
D29

Dans la figure (imprécise) ci-contre, $|BC| = 6$ et $|BD| = 4$; les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCB}$ ont même amplitude. Quelle est la mesure de $[AD]$?



(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) $\sqrt{52}$

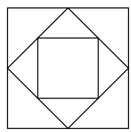
418
D14
D01

Dans le plan, quel est le nombre d'axes de symétrie d'un losange qui n'est pas un carré ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

419
D14
D11

Sans réponse préformulée — Dans la figure ci-contre, que vaut le rapport de l'aire du plus grand carré à l'aire du plus petit ? Les sommets d'un petit carré sont les milieux des côtés du carré de taille immédiatement supérieure.



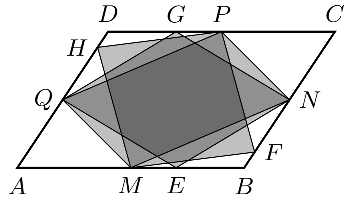
420
D14
D13

Une fourmi se déplace sur la surface d'une boite parallélépipédique de 10 cm $\times$ 20 cm $\times$ 30 cm. Quelle est la longueur du chemin le plus court allant d'un sommet au sommet opposé ?

(A) 60 cm
(B) $30\sqrt{2}$ cm
(C) $20\sqrt{5}$ cm
(D) $10\sqrt{14}$ cm
(E) $10\sqrt{26}$ cm

421 D14 D17

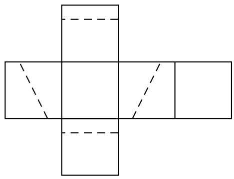
Ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme de base 10 et de hauteur 6 ; M, N, P, Q sont les milieux de ses côtés et E, F, G, H sont les pieds des perpendiculaires aux côtés issues du centre du parallélogramme. Si $a =$ $=$ aire$(MNPQ)$, $b =$ aire$(ENGQ)$ et $c =$ aire$(MFPH)$, alors :



(A) $a < b < c$;
(B) $a > b > c$;
(C) $c < a < b$;
(D) $a = b = c$;
(E) $a > b = c$.

422 D14 D19

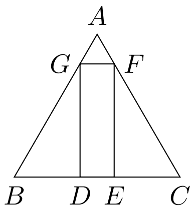
Un plan coupe un cube comme indiqué par les lignes traitillées sur le développement du cube. Les extrémités de ces lignes traitillées partagent des arêtes du cube dans le rapport de 1/4 à 3/4. Si le cube est de volume 1, quels sont les volumes de ses deux parties situées de part et d'autre du plan ?



(A) $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$

423 D14 D24

Le rectangle $DEFG$, de périmètre 26 et d'aire 30, est inscrit dans le triangle équilatéral ABC : sa largeur $[DE]$ ($|DE| < |DG|$) est incluse dans $[BC]$, G appartient à $[AB]$ et F appartient à $[AC]$. Que vaut $|AB|$?



(A) $10 + 2\sqrt{3}$ (B) $3 + \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ (C) $13\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{3}{4} + 5\sqrt{3}$ (E) $\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$

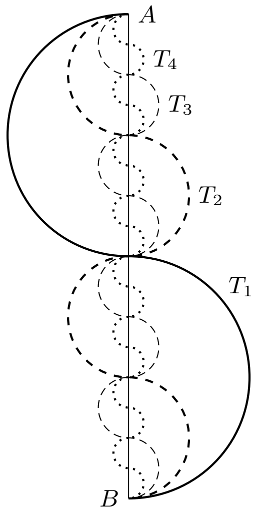
424 D14 D26

Un disque de rayon 1/2 roule à l'extérieur d'un triangle de périmètre 12 et d'aire 6, en gardant toujours un point de contact. Quelle est l'aire de la région balayée par le disque lorsqu'il a fait une fois le tour du triangle ?

(A) $9 + \pi/2$ (B) $12 + \pi$ (C) 18 (D) $18 + \pi$ (E) $18 + 2\pi$

425 D14 D28

La distance entre A et B est de 300 m. Un skieur descend d'abord de A à B en suivant la trajectoire T_1, constituée de deux demi-cercles ; lors de sa deuxième descente, il suit la trajectoire T_2, formée de 4 demi-cercles ; ensuite, il emprunte les trajectoires T_3 et T_4, respectivement constituées de 8 et 16 demi-cercles. Quelle est la longueur de la plus longue de ces quatre trajectoires ?



(A) 300 (B) 600 (C) 150π (D) 300π (E) 600π

3.4 Logique

426 E12 D18

Le directeur de ton école affirme que tous les jours, dans chaque classe, un élève au moins commet une faute de français ou de mathématiques. S'il a tort, laquelle des affirmations suivantes est exacte ?

(A) Tous les jours, dans une classe, un élève au moins ne commet pas de faute de français ou de math.

(B) Tous les jours, dans chaque classe, un élève au moins ne commet pas de faute de français ni de math.

(C) Tous les jours, dans une classe, aucun élève ne commet de faute de français ni de math.

(D) Un jour, dans une classe, aucun élève ne commet de faute de français ou aucun élève ne commet de faute de math.

(E) Aucune des quatre affirmations précédentes

427 E12 D28

Dans la rue Courte, 312 habitants font du tennis, 256 de la pelote basque et 224 du kayak. Si 17 habitants ne font aucun de ces trois sports, 27 font les trois, 92 font juste du tennis et de la pelote basque, 88 ne font que du tennis et 22 que du kayak, combien de personnes habitent la rue Courte ?

(A) 471 (B) 488 (C) 515 (D) 992 (E) Une autre réponse

428 D12 D01

La phrase « *Les gentils chats sont vieux et gros.* » a pour négation :

(A) « *Il existe un gentil chat, jeune et maigre.* »

(B) « *Il existe un gentil chat ni jeune ni maigre.* »

(C) « *Il existe un gentil chat jeune ou maigre.* »

(D) « *Les vieux chats gros sont gentils.* »

(E) Aucune des phrases précédentes

429 D12 D28

Que vaut la case du milieu ?

Cette case vaut $\dfrac{2^{14}-6^4}{2}$	Cette case vaut le nombre de cases de valeur impaire	Cette case vaut la somme des valeurs des deux cases voisines	Cette case vaut le nombre de cases de valeur paire	Cette case vaut $\dfrac{5^{12}-3^{10}}{2}$

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) $\dfrac{2^{14}-6^4}{2}$ (E) $\dfrac{2^{14}-6^4+5^{12}-3^{10}}{2}$

430 E13 D07

Affirmer que la phrase « Tous les chats noirs sont protégés par la SPA » est fausse, c'est affirmer que

(A) Tous les chats protégés par la SPA sont noirs ;

(B) Aucun chat noir n'est protégé par la SPA ;

(C) Aucun chat protégé par la SPA n'est noir ;

(D) Il y a un chat noir qui n'est pas protégé par la SPA ;

(E) La SPA ne protège que les chats qui ne sont pas noirs.

431 D13 D09

Un matin, Yann proclame : « *La prochaine phrase de Zoé sera un mensonge.* » et Zoé lui répond immédiatement : « *Yann vient d'énoncer une vérité.* ». Alors,

(A) Yann a dit vrai ;
(B) Yann a menti ;
(C) Zoé a dit vrai ;
(D) Zoé a menti ;
(E) La conversation décrite est globalement contradictoire.

432 D13 D14

Si l'objet que j'ai sur la tête n'est pas un chapeau marron, alors cet objet, nécessairement,

(A) Est un chapeau melon ;
(B) N'est pas un chapeau ;
(C) N'est pas marron ;
(D) N'est pas un chapeau et n'est pas marron ;
(E) N'est pas un chapeau ou n'est pas marron.

433 E14 D21

D'après mon coéquipier, nous avons perdu tous les matchs déjà joués à l'extérieur durant la présente saison. Pour établir qu'il a tort, il me suffit de mentionner le fait que durant la présente saison,

(A) Nous avons gagné tous les matchs joués à domicile ;
(B) Nous avons perdu tous les matchs joués à domicile ;
(C) Nous avons perdu au moins un match joué à l'extérieur ;
(D) Nous avons gagné au moins un match joué à l'extérieur ;
(E) Il nous reste à jouer un match à domicile.

434 D14 D07

En admettant qu'une forêt possède un million d'arbres feuillus et que tout arbre feuillu possède un nombre de feuilles compris entre 0 et 200 000, laquelle des affirmations suivantes est certainement vraie ?

(A) Deux arbres de cette forêt ne peuvent jamais posséder le même nombre de feuilles.

(B) Cette forêt comprend un arbre possédant une seule feuille.

(C) Cette forêt comprend au moins deux arbres ayant au moins 100 000 feuilles.

(D) Cette forêt comprend des arbres non feuillus.

(E) Cette forêt comprend au moins deux arbres ayant le même nombre de feuilles.

3.5 Problèmes — Divers

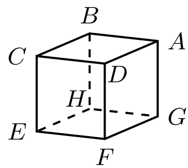
435 E11 D12

D'une semaine à l'autre, les nénufars d'un lac triplent la surface qu'ils recouvrent. À la fin de la 18e semaine, ils couvrent exactement tout le lac. À la fin de quelle semaine couvrent-ils un neuvième du lac ?

(A) La 2e (B) La 6e (C) La 9e (D) La 16e (E) La 17e

436 E11 D17

Si $ABCDEFGH$ est le cube schématisé ci-contre, quelle est, parmi les suivantes, l'affirmation *inexacte* ?



(A) Le triangle AGH est isocèle.

(B) Le triangle BEG est équilatéral.

(C) Le triangle BEF a trois côtés de longueurs différentes.

(D) Le triangle EDG est rectangle.

(E) Les segments $[DH]$ et $[AE]$ sont de même longueur.

437 E11 D24

Mathieu envisage de commander un baladeur numérique sur l'internet. Au prix de l'appareil, il faut ajouter soit 21 % pour la livraison express, soit 7 % pour la livraison standard. Mathieu a calculé que, livraison express comprise, l'appareil qu'il convoite lui couterait 181,50 € ; à combien reviendra-t-il si Mathieu choisit plutôt la livraison standard ?

(A) 157 € (B) 160 € (C) 160,50 € (D) 168,50 € (E) 188,50 €

438 E11 D27

Les organisateurs d'un tournoi de tennis récompensent d'une somme d'argent chaque vainqueur de match à partir des huitièmes de finale. Le montant remporté est doublé à chaque tour (par exemple, chaque gagnant d'un quart de finale reçoit deux fois plus, pour cette victoire-là, que ce qu'il avait déjà gagné pour son huitième de finale). Si le montant alloué au tournoi est de 8000 €, quel est le gain total du vainqueur du tournoi ?

(A) 1000 € (B) 2000 € (C) 3200 € (D) 3750 € (E) 4000 €

439 D11 D05

Sans réponse préformulée — Un sculpteur doit transporter ses différentes statues dans une galerie d'art. Il les a pesées et a obtenu la liste de masses que voici :

50 kg,	80 kg,	70 kg,	30 kg,	20 kg,	110 kg,	110 kg,	130 kg,	80 kg,
80 kg,	70 kg,	90 kg,	50 kg,	50 kg,	20 kg,	30 kg,	50 kg,	50 kg,
80 kg,	80 kg,	110 kg,	120 kg,	120 kg,	130 kg,	130 kg,	140 kg,	90 kg.

Sa camionnette peut transporter au maximum une tonne de charge utile. Quel est le nombre maximal de statues qu'il peut emporter en une fois ?

440 D11 D11

Un aquarium, qui a la forme d'un prisme à base carrée de 48 cm de côté, contient 60 L d'eau. On transvase son contenu dans un second aquarium, parallélépipède rectangle dont la base mesure 36 cm sur 60 cm et dont la hauteur est de 30 cm. La hauteur de l'eau dans ce second aquarium sera

(A) La même que dans le premier ;

(B) Les $\frac{16}{15}$ de la hauteur dans le premier ;

(C) Les $\frac{15}{16}$ de la hauteur dans le premier ;

(D) Les $\frac{14}{15}$ de la hauteur dans le premier ;

(E) Les $\frac{14}{16}$ de la hauteur dans le premier.

441 D11 D19

Sans réponse préformulée — En 2010, un généreux mécène avait offert une somme de 16 000 € pour récompenser tous les finalistes de l'Olympiade belgo-luxembourgeoise d'éducation physique. Le jury a attribué à chaque finaliste le même nombre entier d'euros, aussi élevé que possible ; après ce partage, il est resté 100 €. En 2011, le même mécène offre 20 000 € à l'OBLEP, dont le nombre de finalistes sera le même qu'en 2010. Si le jury procède de la même manière, il restera 125 €. Quel est le plus petit nombre de finalistes compatible avec ces faits ?

442 D11 D27

Alfred et Bastien se déplacent à vitesses constantes le long de deux sentiers rectilignes qui se coupent en O. À midi, Alfred est en O et Bastien s'en trouve à 500 m ; deux minutes plus tard, ils sont équidistants de O, et c'est à nouveau le cas à 12 h 10. Que vaut le rapport de la vitesse d'Alfred à celle de Bastien ?

(A) 2/3 (B) 3/2 (C) 1 (D) 4/5 (E) 5/8

443 D11 D29

Sans réponse préformulée — Lorsque Andrée et Benoit travaillent ensemble, ils effectuent une certaine tâche en une heure de moins qu'Andrée seule et en 16 heures de moins que Benoit seul. Quel est, en heures, le temps qu'Andrée et Benoit mettent pour effectuer cette tâche à deux ?

444 E12 D25

Quelle est la masse volumique d'un papier dont des feuilles de 0,1 mm d'épaisseur pèsent 80 g/m^2 ?

(A) 1250 kg/m^3 (B) 800 kg/m^3 (C) 125 kg/m^3 (D) 80 kg/m^3

(E) Les données sont insuffisantes pour répondre.

445 D12 D05

Pascal a remarqué que lorsqu'il roule à 100 km/h au lieu de 80 km/h, la consommation kilométrique de sa voiture est augmentée de 40 %. Quelle est l'augmentation de sa consommation horaire ?

(A) 15 % (B) 40 % (C) 65 % (D) 75 %

(E) Les données sont insuffisantes pour le déterminer.

446 D12 D06

Sans réponse préformulée — Un pays est découpé en trois régions représentant respectivement 60 %, 30 % et 10 % de la population totale des électeurs du pays. Dans la première région, 25 % des électeurs ont voté pour le parti A, de même que 40 % des électeurs de la deuxième région. Si ce parti a recueilli au total 29 % des voix, quel est son score, en pour cent, dans la troisième région ?

447 D12 D08

De l'eau coule à débit constant dans un vase conique sans pied, posé sur sa pointe, dont la hauteur vaut 20 cm et le rayon de l'ouverture 10 cm. Si l'eau a mis 3 min pour atteindre la moitié de la hauteur, combien de temps lui faudra-t-il encore pour atteindre le bord ?

(A) 4,5 min (B) 6 min (C) 12 min (D) 21 min (E) 24 min

448 D12 D14

Sans réponse préformulée — Anne achète une paire de chaussures avec 30 % de son argent de poche puis un foulard avec 20 % du restant. Il lui reste alors 84 €. Combien avait-elle reçu d'argent de poche (en euros) ?

449 D12 D19

Sans réponse préformulée — Une bouteille pleine de jus de fruit coute 3 €, verre compris ; la bouteille consignée est reprise pour 0,25 €. Avec 311 bouteilles vides, Mathieu achète des bouteilles pleines qui, après avoir été bues, sont à nouveau échangées, jusqu'à ce que le procédé s'épuise faute d'un nombre suffisant de bouteilles vides et d'euros. Combien de bouteilles de jus Mathieu aura-t-il pu boire en fin de compte ?

450 D12 D25

Michel Choumachère teste une voiture sur deux tours de circuit. Il effectue le premier tour à une moyenne de 150 kilomètres par heure et le deuxième à une moyenne de 300 kilomètres par heure. Quelle a été, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne ?

(A) 150 (B) 200 (C) 225 (D) 300 (E) Une autre réponse

451 E13 D05

Dans le clapier du père Arthur, il y a 360 lapins, soit bruns, soit gris. Un sixième de ces lapins sont des femelles et un cinquième de ces femelles sont brunes. Le dixième des mâles sont bruns. Combien Arthur a-t-il de lapins gris ?

(A) 12 (B) 48 (C) 30 (D) 270 (E) 318

452 E13 D15

Sur une cuillère doseuse de sirop pour enfants sont indiquées les graduations I pour 50 mm^3, II pour 100 mm^3 et III pour 200 mm^3. La posologie mentionne qu'un enfant doit prendre 0,05 mL de sirop par kilo de masse. Quelle quantité faut-il donner à un enfant de 10 kilos ?

(A) 1 cuillère remplie jusque I
(B) 1 cuillère remplie jusque III
(C) 1 cuillère remplie jusque III et une cuillère remplie jusque II
(D) 2 cuillères remplies chacune jusque III
(E) 2 cuillères remplies chacune jusque III et une cuillère remplie jusque II

453 E13 D18

Dans une journée (de 24 h), à combien de reprises l'aiguille des heures et l'aiguille des minutes d'une horloge ordinaire forment-elles un angle de 180° ?

(A) 11 (B) 12 (C) 22 (D) 23 (E) 24

454 E13 D20

Hypathie a 300 morceaux de chocolat. Elle coupe en quatre 65 % d'entre eux. Combien de morceaux a-t-elle maintenant en plus ?

(A) 65 (B) 195 (C) 585 (D) 780 (E) 885

455 E13 D25

Sans réponse préformulée — Un pêcheur ramena un jour au bout de sa ligne un grand poisson. La tête de ce poisson mesurait 9 cm. Le corps (sans queue ni tête) était aussi long que la tête et la queue réunies. La queue avait la même longueur que la tête plus la moitié du corps. Quelle était, en centimètres, la longueur totale de ce poisson ?

456 E13 D29

L'indice de masse corporelle d'une personne est le quotient de sa masse en kilos par le carré de sa taille en mètres. Si cette personne grandit de 10 cm, son indice restera le même si

A Elle augmente sa masse de 8 kilos ;
B Elle augmente sa masse de 4,5 kilos ;
C Elle augmente sa masse de 2,5 kilos ;
D Elle diminue sa masse de 4,5 kilos ;
E Elle augmente sa masse d'une valeur qui dépend de sa taille initiale.

457 D13 D06

Anaximandre représente la première génération d'une famille. S'il a eu deux enfants qui ont eux aussi eu chacun deux enfants et ainsi de suite, combien de descendants d'Anaximandre composent la onzième génération ? (Il est supposé que deux quelconques de ces descendants n'ont jamais procréé ensemble.)

A 512 **B** 1024 **C** 2048 **D** 4096 **E** 8192

458 D13 D23

Sur une étagère, un libraire a rangé 31 livres, de gauche à droite, par ordre de prix croissants. L'écart entre les prix de deux livres voisins est chaque fois de deux euros. Pour le livre situé à l'extrémité droite, un acheteur paiera le même prix que pour le livre du milieu et l'un de ses voisins. Dans ces conditions,

A Le voisin en question est le voisin de gauche ;
B Le livre du milieu coute 36 euros ;
C Le livre le moins cher coute 4 euros ;
D Le livre le plus cher coute 64 euros ;
E Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

459 E14 D13

Sans réponse préformulée — Les sièges du remonte-pente de Mathland-la--Neige sont régulièrement espacés sur le câble et numérotés dans l'ordre à partir de 1. La partie montante du câble longe sa partie descendante. Alan, qui est assis sur le siège 98, croise le siège 105 au moment précis où Bart, qui est assis sur le siège 241, croise le siège 230. Combien ce remonte-pente compte-t-il de sièges ?

3.6 Combinatoire & probabilités

460 E11 D13

Sans réponse préformulée — Le costume d'un député se compose d'un veston, d'un pantalon et d'une chemise. Dans sa garde-robe, ce député possède 5 vestons, 8 pantalons et 12 chemises. De combien de manières différentes peut-il s'habiller ?

461 E11 D15

Un carré 3×3 est subdivisé en 9 petits carrés. Chacun de ceux-ci doit être colorié soit en bleu, soit en rouge ; de plus, les petits carrés situés sur les diagonales du grand carré doivent être coloriés d'une seule couleur. Combien de coloriages sont possibles ?

(A) 32 (B) 64 (C) 128 (D) 256 (E) 512

462 E11 D20

Pour ses petits cousins et cousines, Mathieu a acheté x pistolets à eau à 2 € pièce et y ballons coutant 3 € chacun. Quel est, en euros, le prix moyen d'un de ces jouets ?

(A) $\dfrac{2x+3y}{x+y}$ (B) $\dfrac{5}{x+y}$ (C) $\dfrac{2x+3y}{5}$ (D) $\dfrac{x+y}{5}$ (E) 2,50

463 D11 D17

Sans réponse préformulée — L'alphabet des moustiques ne contient que les lettres B et Z. Combien y a-t-il de mots de six lettres en langage moustique ?

464 D11 D22

Un polygone régulier à n côtés possède m diagonales. Un polygone régulier à $n+1$ côtés possède $m+p$ diagonales. Que vaut p ?

(A) $n+1$ (B) n (C) $n-1$ (D) $n-2$ (E) $2(n-2)$

465 D11 D28

Sans réponse préformulée — Un ballon de football est constitué de 20 hexagones réguliers et de 12 pentagones réguliers. Combien de sommets comporte cette décomposition polygonale ?

466 E12 D05

En prélevant 29 cartes dans un jeu classique de 52 cartes, je suis certain d'avoir pris au moins

(A) Un as ;
(B) Un cœur ;
(C) Une image ;
(D) Une carte de couleur rouge ;
(E) Une carte de valeur plus petite que trois.

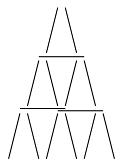
467 E12 D13

Dans mon porte-monnaie se trouvent 12 pièces de 1 centime, 21 de 2 centimes, 7 de 5 centimes et 8 de 10 centimes. Combien de pièces au minimum dois-je en extraire pour être certain d'avoir parmi elles une pièce valant plus de 3 centimes ?

(A) 12 (B) 13 (C) 33 (D) 34 (E) 48

468 D12 D17

Sans réponse préformulée — Si 10 jeux complets de 52 cartes sont disponibles, combien d'étages complets, au maximum, pourra compter un château de cartes construit selon le schéma ci-contre ?



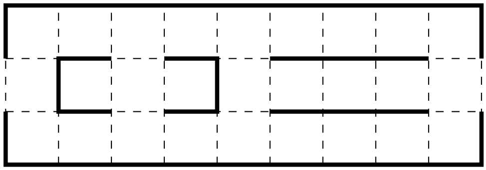
469 D12 D30

Lucrèce fait régulièrement profiter 7 de ses amis de ses talents culinaires. Puisqu'elle n'a qu'une table pour 4 personnes, elle ne peut en inviter que 3 à la fois. Combien de repas doit-elle organiser au minimum pour que chacun de ses 7 amis ait rencontré les 6 autres ?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 21 (E) 42

470 E13 D09

Combien de chemins (c'est-à-dire de suites de cases voisines, horizontalement ou verticalement) permettent de traverser le labyrinthe ci-dessous de gauche à droite sans passer deux fois par la même case ni franchir de mur ? (Les murs sont représentés par les traits pleins.)



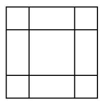
(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20 (E) 24

471 E13 D14

Sans réponse préformulée — Un représentant en produits cosmétiques doit visiter ses clients à Bruxelles, Mons, Charleroi, Namur, Liège et Bastogne. De combien de manières différentes peut-il programmer sa tournée si son patron lui impose de commencer par le client qui habite Mons ?

472 E13 D23

Combien y a-t-il de rectangles dans la figure ci-contre ?



(A) 4 (B) 9 (C) 12 (D) 30 (E) 36

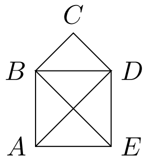
473 E13 D30

De combien de manières différentes un rectangle 6×1 peut-il être recouvert (sans lacune, chevauchement ni débordement) par des rectangles de taille 2×1 et de taille 1×1 ? (Cent rectangles de chaque type sont disponibles.)

(A) 13 (B) 12 (C) 10 (D) 8 (E) 5

474 D13 D12

La figure ci-contre est dessinée sans lever le crayon ni repasser deux fois sur le même trait. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?



(A) Le début et la fin du tracé sont en C.
(B) Le tracé commence en A et se termine en E ou inversement.
(C) Le tracé commence en B et se termine en D ou inversement.
(D) Le tracé commence en A et se termine en D ou inversement.
(E) Le tracé commence, au choix, en A, B, C, D ou E.

475 D13 D24

De combien de manières différentes un rectangle 12×1 peut-il être pavé par des rectangles de tailles 2×1 ou 3×1 ? (Un nombre suffisant de rectangles de chacun des deux types est disponible.)

(A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 12

476 E14 D26

Quel est le plus petit nombre de couleurs requises pour colorier les sommets d'un cube de sorte que chaque sommet reçoive une couleur et que deux sommets non reliés par une arête reçoivent toujours deux couleurs différentes ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

477 D14 D06

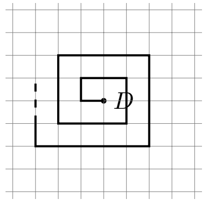
Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit nombre de couleurs requises pour colorier les faces d'un cube de sorte que chaque face reçoive une seule couleur et que deux faces partageant une arête reçoivent toujours deux couleurs différentes ?

478 D14 D16

Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de nombres de quatre chiffres distincts, deux impairs et deux pairs dont l'un est nul ?

479 D14 D30

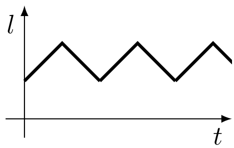
Sans réponse préformulée — Une fourmi se déplace le long d'un quadrillage de côté 1 en décrivant une spirale à partir d'un sommet de départ D, comme sur la figure ci-contre. Elle s'arrête dès qu'elle a parcouru un chemin de longueur totale 2014. Quel est le *carré* de la distance entre son point de départ D et son point d'arrivée ?

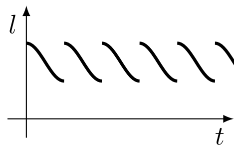


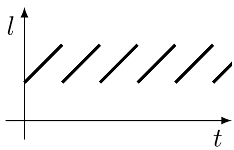
3.7 Analyse

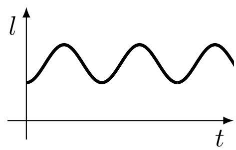
480 E13 D24

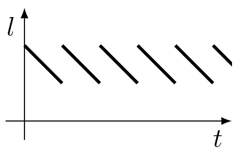
Lequel des graphiques suivants représente en fonction du temps, de la manière la plus plausible, la longueur des cheveux d'une personne qui passe régulièrement chez le coiffeur pour se faire couper les cheveux toujours de la même manière ?

(A)


(D)


(B)


(E)


(C)


3.8 Tableau des réponses

D	11		12		13		14	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	C	D	6	C	D	85	2	C
2	E	B	424	2	B	25	A	37
3	E	D	C	9	C	B	B	57
4	A	16	C	C	D	167	D	90
5	E	17	D	D	E	E	A	A
6	B	E	B	20	C	B	D	3
7	E	E	D	A	D	C	D	E
8	A	C	E	D	B	C	378	3
9	B	A	C	6	B	E	44	153
10	D	144	D	B	631	341	E	E
11	E	B	E	D	D	120	E	4
12	D	E	110	98	B	B	C	E
13	480	D	D	C	119	B	268	B
14	D	B	D	150	120	E	E	C
15	A	50	B	C	E	B	A	561
16	B	6	E	4	C	A	E	720
17	D	64	B	18	A	64	D	D
18	A	D	E	B	C	50	A	D
19	B	159	49	28	C	D	A	A
20	A	891	E	C	C	927	91	474
21	B	E	B	E	E	A	D	E
22	A	C	C	E	E	E	4	621
23	C	C	C	E	E	A	C	23
24	C	6	C	80	B	E	D	B
25	C	B	B	B	72	198	C	7
26	210	C	C	30	C	D	C	B
27	D	A	D	2	A	B	6	320
28	96	60	B	C	E	60	105	C
29	E	4	B	D	E	45	C	C
30	17	6	A	A	A	20	A	628

Chapitre 4

Éliminatoires et demi-finales maXi

4.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

X	11		12		13		14	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	481	496	505	600	521	534	546	557
2	482	497	671	659	522	535	547	558
3	652	498	591	601	678	622	548	641
4	665	578	506	513	650	536	549	559
5	483	499	672	602	706	623	632	560
6	574	579	507	603	660	537	550	642
7	484	580	592	604	523	538	633	561
8	666	581	697	703	679	661	551	562
9	485	582	593	605	615	683	685	643
10	486	669	594	606	524	624	713	563
11	690	694	698	649	525	539	714	564
12	575	583	595	514	616	625	552	565
13	487	655	596	676	526	540	651	644
14	691	695	648	607	680	541	634	566
15	488	500	597	608	707	542	686	567
16	692	501	598	704	527	626	553	568
17	576	670	508	609	617	627	635	569
18	653	502	673	677	708	628	554	570
19	489	584	699	610	618	709	636	717
20	654	503	700	515	528	710	555	645
21	693	656	674	516	529	629	715	571
22	667	657	658	517	619	543	637	664
23	490	585	599	611	530	711	663	718
24	668	586	701	518	681	662	638	572
25	491	696	675	612	531	544	687	689
26	492	587	702	519	532	545	716	646
27	493	588	509	613	620	712	639	719
28	577	504	510	520	621	684	556	647
29	494	589	511	705	533	630	688	573
30	495	590	512	614	682	631	640	720

4.2 Algèbre & arithmétique

481 E11 X01

$\dfrac{100^{n+1} \times 10^{n-1}}{1000^n} =$

(A) 1 (B) 10 (C) n (D) 1000 (E) 1000^n

482 E11 X02

Une seule des affirmations suivantes est correcte. Laquelle ?

(A) L'inverse d'un produit vaut la somme des inverses.
(B) L'opposé d'un produit vaut le produit des opposés.
(C) Le carré d'une somme vaut la somme des carrés.
(D) L'inverse d'une somme vaut la somme des inverses.
(E) L'opposé d'une somme vaut la somme des opposés.

483 E11 X05

$\sqrt{9^{16a^4}} =$

(A) 3^{4a^2} (B) 3^{8a^2} (C) 9^{4a^2} (D) 9^{8a^2} (E) 9^{8a^4}

484 E11 X07

Si Σ et Π sont respectivement la somme et le produit des racines de $-2X^2 + 3X + 7$, alors $\Sigma/\Pi =$

(A) $3/7$ (B) $-3/7$ (C) $7/3$ (D) $-7/3$ (E) Une autre réponse

485 E11 X09

Quel est le chiffre des unités de $1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 2010! + 2011!$, si $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$?

(A) 0 (B) 3 (C) 7 (D) 8 (E) 9

486 E11 X10

Quel est le nombre de solutions du système $\left\{\begin{array}{l} x^2 + 4y^2 = 1 \\ 4x^2 + y^2 = 4, \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

487 E11 X13

Si S_n désigne la somme des n premiers termes de la suite arithmétique $(1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$, alors $S_{2n} - S_n =$

(A) $\frac{1}{2}n(5n+7)$
(B) $\frac{1}{2}n(7n+3)$
(C) $\frac{1}{2}n(9n-1)$
(D) $\frac{1}{2}n(3n-1)$
(E) $\frac{1}{2}n(n+1)$

488 E11 X15

Quel est l'ensemble des solutions de l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}},$$

d'inconnue réelle x ?

(A) $\{0,1\}$ (B) $[\,0;+\infty\,[$ (C) $]\,0;+\infty\,[$ (D) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ (E) $\{-2,-1,0,1,2\}$

489 E11 X19

Sans réponse préformulée — La différence des carrés de deux naturels est 29. Quel est le produit de ces deux naturels ?

490 E11 X23

Sans réponse préformulée — Quel est le plus grand naturel inférieur à 100 qui a exactement 4 diviseurs ?

491 E11 X25

Quel est le nombre de couples (m, n) d'entiers positifs satisfaisant $2^m - n^2 - 2n = 0$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Une infinité

492 E11 X26

Que vaut la somme des chiffres de tous les nombres de la liste 1, 2, 3, 4, 5, …, 2011 ?

(A) 13 500 (B) 14 500 (C) 28 072 (D) 29 712 (E) 2 023 066

493 E11 X27

Quelle est l'affirmation correcte ?

(A) $2^{1/2} < 3^{1/3} < 4^{1/4} < 5^{1/5}$
(B) $2^{1/2} > 3^{1/3} > 4^{1/4} > 5^{1/5}$
(C) $2^{1/2} = 3^{1/3} = 4^{1/4} < 5^{1/5}$
(D) $5^{1/5} < 2^{1/2} \leqslant 4^{1/4} < 3^{1/3}$
(E) $5^{1/5} = 2^{1/2} = 4^{1/4} < 3^{1/3}$

494 E11 X29

Sans réponse préformulée — Des fléchettes sont lancées vers une cible qui ne présente que deux zones, la zone centrale qui rapporte 7 points et la zone périphérique qui rapporte 4 points. Si le nombre de fléchettes disponibles n'est pas limité, quel est le plus grand score qui *ne* peut *pas* être atteint ?

495 E11 X30

Soit l'équation $(2x^2 - x - 1)(2x^2 - x + 1) = 440$, d'inconnue réelle x ; que vaut la somme de ses racines ?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** 440

496 D11 X01

Pour combien de valeurs entières de n la fraction $\dfrac{n^2 - 6}{n^2 + 2}$ est-elle inférieure à 1 ?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** Une infinité

497 D11 X02

Dans $\mathbf{R}$, le trinome $x^2 - 4x + (2r + 1)$ se factorise en deux facteurs du premier degré si et seulement si

(A) $r \leqslant 3/2$ **(B)** $r \geqslant 3/2$ **(C)** $r^2 \leqslant 4$ **(D)** $r^2 \geqslant 4$ **(E)** $r^2 > 4$

498 D11 X03

Que vaut le produit $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{99}\right)\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)$?

(A) $\dfrac{1}{100}$ **(B)** $\dfrac{99}{100}$ **(C)** $\dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99}{100}$ **(D)** $\dfrac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100}$

(E) Une autre réponse

499 D11 X05

Si $R(x)$ est le reste de la division du polynome $x^{2011} + x^{2010} + x + 1$ par $x^2 + \frac{1}{2}$, quel est le reste de la division de $x^{2011} + x^{2010} + x + 1$ par $2x^2 + 1$?

(A) $\frac{1}{2}R(x)$ **(B)** $R(x)$ **(C)** $2R(x)$ **(D)** $-\frac{1}{2}R(x)$

(E) Une autre réponse

500 D11 X15

Laquelle des propositions suivantes est vraie pour tout naturel n impair et différent de 1 ?

(A) $(n-1)^{(n-1)/2} - 1$ est divisible par $n-2$.

(B) $(n-1)^{(n-1)/2} + 1$ est divisible par n.

(C) $(n-1)^{(n-1)/2} + 1$ est divisible par $n+1$.

(D) $(n-1)^{(n-1)/2}$ est divisible par n.

(E) $(n-1)^{(n-1)/2} - 1$ est divisible par $n-1$.

501 D11 X16

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre d'entiers à trois chiffres qui ont au plus deux chiffres égaux ?

502 D11 X18

Sans réponse préformulée — Pour combien de naturels n le quotient $\dfrac{n^2+2011}{n+1}$ est-il naturel ?

503 D11 X20

Soit p un nombre premier. Combien de couples (x, y) d'entiers vérifient l'équation $x^4 - y^4 = p^4$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) p

504 D11 X28

Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $\Big|\big||x|-1\big|-1\Big| = |x|$, d'inconnue réelle x ?

(A) $\{-1, 1\}$ (B) $[-1; 1]$ (C) $\mathbf{R}$ (D) $]-\infty; 0]$ (E) $]-\infty; 1]$

505 E12 X01

$\dfrac{(20{,}12)^2}{2{,}012 \times 201{,}2} =$

(A) 0,01 (B) 0,1 (C) 1 (D) 10 (E) 100

506 E12 X04

Que vaut la somme des solutions des deux équations

$$x^2 + 12x - 5 = 0 \text{ et } x^2 - 12x - 7 = 0\,?$$

(A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) -1 (E) -2

507 E12 X06

Combien y a-t-il de nombres rationnels strictement compris entre 0,499 et 0,4999 ?

(A) Aucun (B) Un (C) Deux (D) Dix (E) Une infinité

508 E12 X17

Soit a, b et c trois réels non nuls. Si l'équation $ax^2+bx+c=0$, d'inconnue réelle x, admet deux solutions, alors l'équation $cx^2+bx+a=0$, d'inconnue réelle x, admet

(A) Deux solutions ;
(B) Exactement une solution ;
(C) Aucune solution ;
(D) Parfois deux solutions, parfois aucune ;
(E) Parfois deux solutions, parfois une seule.

509 E12 X27

Parmi les solutions de l'équation $\sin x = \cos x$, d'inconnue réelle x, combien appartiennent à l'intervalle $[\,0; 10\,]$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

510 E12 X28

Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de $99!/10^{12}$ (où $n! = $ $= n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$) ?

(A) 0 (B) 7 (C) 10 (D) 12
(E) Aucune des réponses précédentes

511 E12 X29

Que vaut la somme des inverses des racines du polynome

$$X^4 - 10X^3 + 25X^2 - 36\,?$$

(A) -10 (B) 0 (C) 1/10 (D) 10 (E) 12

512 E12 X30

Un nombre naturel non nul est *multiplicativement parfait* si le produit de ses diviseurs est égal à son carré. Soit n un naturel non nul et p un nombre premier ; p^n est multiplicativement parfait si et seulement si

(A) `vrai` ; (B) $p = 2$; (C) $n > 2$; (D) $n = 3$; (E) `faux`.

513 D12 X04

Sans réponse préformulée — Un *nombre palindrome* est un nombre naturel qui conserve la même valeur lorsqu'il est lu de droite à gauche, comme par exemple 66 ou 2442. Combien existe-t-il de nombres palindromes dans l'intervalle $[\,17; 1000\,]$?

514 D12 X12

Quel est le nombre de solutions du système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 = 4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Une infinité

515 D12 X20

Quel est le nombre de triplets (x, y, z) de naturels tels que $x \leqslant y \leqslant z$ et $x + y + z = 10$?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

516 D12 X21

Quel est le nombre de solutions de l'équation $\cos(\sin x) = 0$, d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) Un nombre $n > 2$ (E) Une infinité

517 D12 X22

Sans réponse préformulée — Que vaut la somme des carrés des racines du polynôme $X^4 - 12X^3 + 47X^2 - 72X + 36$?

518 D12 X24

Sans réponse préformulée — Quel est le plus grand entier naturel k tel que k^2 divise $\dfrac{n!}{(n-6)!}$ pour tout $n > 6$?

519 D12 X26

Combien de solutions admet l'équation $x^{2012} = 2012^x$, d'inconnue réelle x ?

(A) Aucune

(B) 1

(C) 2

(D) Un nombre $n > 2$

(E) Une infinité

520 D12 X28

Combien existe-t-il de triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs vérifiant $a^3 + b^3 = c^4$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

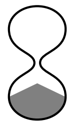
521 E13 X01

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots + 2013 =$

(A) -1008 (B) 1007 (C) 1006 (D) -19 (E) 1008

522 E13 X02

Un sablier permet de mesurer une durée de trois minutes. Combien de fois faut-il le retourner pour mesurer 2013 minutes ? (La mesure commence avec le sablier au repos, le sable en bas.)



(A) 2014 (B) 2013 (C) 672 (D) 671 (E) 670

523 E13 X07

$$\left(\frac{4^4 \cdot 3^{16}}{9^8 \cdot 2^7}\right)^6 =$$

(A) 192 (B) 128 (C) 32 (D) 64/9 (E) Une autre réponse

524 E13 X10

La racine 5ᵉ de 5^{5^5} vaut

(A) 5^{-5} ; (B) $5^{5^5 - 1}$; (C) 5^5 ; (D) 5^{5^4} ; (E) Une autre réponse.

525 E13 X11

Sans réponse préformulée — Que vaut le réel x si $3^{2x} 9^{x+1} = 27^{x+12}$?

526 E13 X13

$$\sqrt{2013 + 2013\sqrt{2012 + 2012\sqrt{\cdots\sqrt{3 + 3\sqrt{2 + 2\sqrt{1}}}}}} =$$

(A) 2013 (B) 2012 (C) 2011 (D) 2010 (E) Une autre réponse.

527 E13 X16

Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand ?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt[3]{3}$ (C) $\sqrt[4]{4}$ (D) $\sqrt[5]{5}$ (E) $\sqrt[6]{6}$

528 E13 X20

Quel est le chiffre des unités dans l'écriture (décimale) de 2013^{2013} ?

(A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 9

529 E13 X21

Combien existe-t-il de couples (x, y) de nombres entiers qui vérifient la relation $x^2y^3 = 6^{12}$?

(A) 6 (B) 9 (C) 18 (D) 24 (E) 36

530 E13 X23

Quel est le nombre de solutions du système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^4 - y^4 = 16, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Une infinité

531 E13 X25

Les nombres naturels A, B, C, D et E satisfont les relations suivantes :

- B est le double de A,
- C est le triple de B,
- D est le quadruple de C,
- E est le quintuple de D,
- $E - 7A^2$ vaut 497.

Combien de ces 5 nombres sont pairs ?

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5
(E) Les informations données ne suffisent pas pour déterminer la réponse.

532 E13 X26

Combien de couples (m, n) d'entiers vérifient l'inégalité

$$|m - 20| + |n - 13| \leqslant 3 \ ?$$

(A) 16 (B) 23 (C) 25 (D) 28 (E) 36

533 E13 X29

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit naturel qui a exactement autant de diviseurs que 2013 ?

534 D13 X01

$50^{30}/100^{15} =$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 5^{15} (E) 25^{15}

535 D13 X02

Sans réponse préformulée — Si $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16} + \cdots - \dfrac{1}{1024} = \dfrac{x}{1024}$, que vaut x ?

536 D13 X04

Sans réponse préformulée — Quelle est la racine carrée de la somme de tous les naturels impairs inférieurs à 100 ?

537 D13 X06

Sans réponse préformulée — Les nombres entiers a, b, c et d sont tels que $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$ et $d < 40$. Quelle est la valeur maximale de a ?

538 D13 X07

Si les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont x_1 et x_2, quelle est, parmi les équations suivantes, celle dont les solutions sont $ax_1 + b$ et $ax_2 + b$?

(A) $x^2 - bx - ac = 0$

(B) $x^2 - bx + ac = 0$

(C) $x^2 + 3bx + ac + 2b^2 = 0$

(D) $x^2 + 3bx - ac + 2b^2 = 0$

(E) $x^2 + bx(2-a) + a^2c + b^2(a+1) = 0$

539 D13 X11

Sans réponse préformulée — Si deux entiers positifs m et n sont liés par la relation $m^2 - n^2 = 2013$, quel est le nombre de valeurs possibles de $m^2 + n^2$?

540 D13 X13

Si le polynôme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ admet les racines r, s, t, u, alors $-r$, $-s$, $-t$, $-u$ sont toujours les racines du polynôme

(A) $-ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e$

(B) $ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e$

(C) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - dx - e$

(D) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - e$

(E) $ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e$

541 D13 X14

Pour tout réel x, l'expression

$$(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$$

est égale à

(A) $(x-2)^5$; (B) $(x-2)^6$; (C) $(x-1)^6$; (D) x^5 ; (E) $(x+1)^5$.

542 D13 X15

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre de triplets (x, y, z) d'entiers strictement supérieurs à 1, solutions de $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 2013$?

543 D13 X22

Combien existe-t-il de nombres premiers p satisfaisant

$$2013!+1 < p \leqslant 2013!+2013,$$

où $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 23 (E) 2011

544 D13 X25

Combien y a-t-il de naturels k pour lesquels l'équation $x^2+k^2x-12=0$, d'inconnue x, admet au moins une solution entière ?

(A) Une infinité (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

545 D13 X26

Sans réponse préformulée — Cinq entiers a, b, c, d, e strictement supérieurs à 1 satisfont les équations :

$$\begin{cases} a(b+c+d+e) = 128 \\ b(a+c+d+e) = 155 \\ c(a+b+d+e) = 203 \\ d(a+b+c+e) = 243 \\ e(a+b+c+d) = 275. \end{cases}$$

Que vaut la somme $a+b+c+d+e$?

546 E14 X01

Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de nombres carrés non nuls inférieurs à 200 et divisibles par 6 ?

547 E14 X02

Sans réponse préformulée — Dans une bassecour, le nombre de poules est le triple de celui des canards et le double de celui des lapins. Si le nombre total de pattes est de 112, combien y a-t-il de têtes ?

548 E14 X03

De combien de manières peut-on choisir trois nombres distincts dans l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, sans tenir compte de l'ordre, de manière que 5 soit choisi et que la somme vaille 15 ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

549 E14 X04

Lequel de ces nombres est le plus petit ?

(A) $\frac{2012}{2013}$ (B) $\frac{2013}{2014}$ (C) $\frac{2014}{2015}$ (D) $\frac{2015}{2016}$ (E) $\frac{-2016}{-2017}$

550 E14 X06

Lorsque la touche $\boxed{x^2}$ d'une calculatrice est enfoncée, le nombre affiché est remplacé par son carré. Si la calculatrice affiche initialement le nombre 2, quel est le plus petit nombre de pressions sur cette touche qui conduit à l'affichage d'un nombre supérieur à 2014 ?

(A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 1012 (E) Une autre valeur

551 E14 X08

Sans réponse préformulée — Pierre a 12 ans. Son père en a 38. Dans combien d'années la somme des âges de Pierre et de son père vaudra-t--elle un siècle ?

552 E14 X12

Sans réponse préformulée — La somme de deux nombres entiers vaut 18 tandis que la somme de leurs carrés vaut 194. Que vaut leur produit ?

553 E14 X16

À l'éliminatoire de l'OMB, chaque concurrent se voit proposer 30 questions ; il reçoit 0 point par mauvaise réponse, 2 points par abstention et 5 points par bonne réponse. Quel est le plus grand score qu'il est possible d'obtenir de plusieurs manières ? (Deux manières d'obtenir un score sont différentes si leurs nombres de mauvaises réponses diffèrent ou leurs nombres d'abstentions diffèrent.)

(A) 135 (B) 136 (C) 137 (D) 138 (E) 139

554 E14 X18

Brigitte invente une opération curieuse sur les nombres : $a \square b = 2+a+ab$. Que vaut $((2 \square 0) \square 1) \square 4$?

(A) 0 (B) 6 (C) 52 (D) 2014 (E) Une autre réponse

555 E14 X20

De combien de manières le nombre 305 peut-il s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) D'au moins quatre manières

556 E14 X28

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit naturel dont la quatrième puissance possède exactement 21 diviseurs naturels ?

557 D14 X01

Sans réponse préformulée — Que vaut $\sqrt[3]{125 \cdot 343}$?

558 D14 X02

Sans réponse préformulée — Un nombre premier est formé de deux chiffres, qui sont eux-mêmes des nombres premiers. Si on échange les deux chiffres, on obtient un nombre, premier lui aussi, plus grand que le nombre initial. Quel est le nombre initial ?

559 D14 X04

Sans réponse préformulée — Que vaut le cube de $\sqrt{\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}}$?

560 D14 X05

Sans réponse préformulée — Un nombre carré parfait de quatre chiffres non nuls a 6 comme chiffre de gauche. Le chiffre de droite de ce nombre est égal au chiffre de droite de sa racine carrée. Quel est le nombre formé par les trois chiffres inconnus du carré ?

561 D14 X07

Pour quelles valeurs du réel m l'équation $|x-1|+x=|2x+2|+m$, d'inconnue x, admet-elle une solution dans l'intervalle $]-1;1[$?

(A) $m=3$ (B) $m>3$ (C) $-1<m<3$ (D) $-3<m<1$ (E) $m<1$

562 D14 X08

Sans réponse préformulée — Entre 1 et 2014, combien existe-t-il d'entiers multiples de 5 ou de 17 mais pas de 85 ?

563 D14 X10

Si n est un carré parfait, quel est le carré parfait suivant ?

(A) $n+1$

(B) n^2+1

(C) n^2+2n+1

(D) n^2+n

(E) $n+2\sqrt{n}+1$

564 D14 X11

Sans réponse préformulée — Si $x + y = 9$ et $xy = 4$, que vaut $x^3 + y^3$?

565 D14 X12

Sans réponse préformulée — Si $n!$ désigne la *factorielle* du naturel n, c'est-à-dire le produit $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, par combien de zéros se termine $32!$?

566 D14 X14

Sans réponse préformulée — Les réels x et y satisfont les deux équations $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \sqrt{y}$ et $x^2 - y^2 = 144$; de plus, xy n'est pas nul. Que vaut ce produit ?

567 D14 X15

Que vaut $\left(1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{8} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}\right)\left(1 - \sqrt[n]{2}\right)$?

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

568 D14 X16

Soit a, b, c trois réels non nuls. Quelle est la somme des inverses des racines de $ax^2 + bx + c = 0$?

(A) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (B) $-\frac{c}{b}$ (C) $-\frac{b}{c}$ (D) $-\frac{a}{b}$ (E) $-\frac{b}{a}$

569 D14 X17

Sans réponse préformulée — Sachant que n est un nombre naturel tel que $1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + 5n^4$ est un multiple de 5, que vaut le reste de la division de n par 5 ?

570 D14 X18

Parmi les inégalités suivantes, une seule est correcte.
Laquelle ?

(A) $\sqrt{14} + \sqrt{2} > \sqrt{6} + \sqrt{10}$
(B) $\sqrt{8} + \sqrt{6} > \sqrt{7} + \sqrt{7}$
(C) $\sqrt{8} + \sqrt{6} > \sqrt{9} + \sqrt{5}$
(D) $\sqrt{7} + \sqrt{5} > \sqrt{6} + \sqrt{6}$
(E) $\sqrt{12} + \sqrt{3} > \sqrt{10} + \sqrt{5}$

571 D14 X21

Sans réponse préformulée — Quel est le reste de la division de 2015^{2016} par 2014 ?

572 D14 X24

Sans réponse préformulée — Le nombre 867 peut s'écrire sous la forme $v! + w! + x! + y! + z!$ (où $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$), avec v, w, x, y, z naturels non nuls. Que vaut $v + w + x + y + z$?

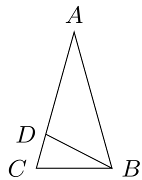
573 D14 X29

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre formé par les trois chiffres de droite de $\sqrt{2014^2 + 2015^2 + (2014 \cdot 2015)^2}$?

4.3 Géométrie

574 E11 X06

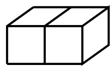
Le triangle ABC est isocèle avec $|AB| = 2|BC|$. Le point D de $[AC]$ est tel que $\widehat{CBD} = \widehat{CAB}$. Quel est le rapport des aires des triangles ABC et DBC ?

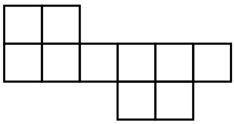


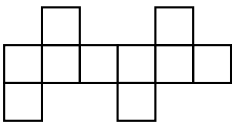
(A) 2 (B) 3 (C) $\frac{15}{4}$ (D) 4 (E) $\frac{9}{2}$

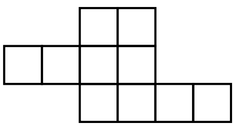
575 E11 X12

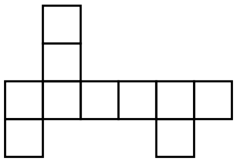
Avec lequel des développements ci-après sera-t-il impossible de reconstituer le solide ci-contre, formé de deux cubes adjacents ?

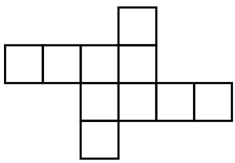


(A)


(B)


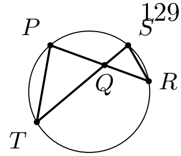
(C)


(D)


(E)


576 E11 X17

Dans cette figure, $\dfrac{|PQ|}{|PT|} =$



(A) $\dfrac{|SQ|}{|SR|}$ (B) $\dfrac{|SQ|}{|QR|}$ (C) $\dfrac{|SR|}{|QS|}$ (D) $\dfrac{|QR|}{|SR|}$ (E) $\dfrac{|QT|}{|QR|}$

577 E11 X28

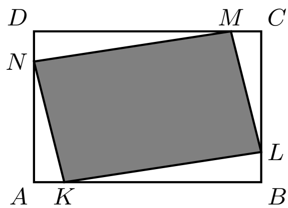
Dans le plan muni d'un système d'axes Oxy, quel est le nombre de points communs aux figures décrites par les équations

$$(x - y + 2)(3x + y - 4) = 0 \text{ et } (x + y - 2)(2x - 5y + 7) = 0\,?$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

578 D11 X04

Dans le rectangle $ABCD$, le côté $[AB]$ a pour mesure a et le côté $[BC]$ a pour mesure b ; en outre, chacun des segments $[AK]$, $[BL]$, $[CM]$ et $[DN]$ a pour mesure d. Que vaut l'aire du quadrilatère $KLMN$?



(A) $2d^2 + (a - b)d + ab$

(B) $2d^2 - (a + b)d + ab$

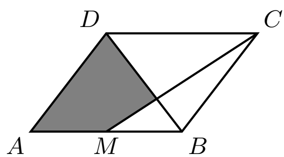
(C) $d^2 - (a + b)d + ab$

(D) $ab - (a + b)d$

(E) Aucune des expressions précédentes

579 D11 X06

Sans réponse préformulée — Le parallélogramme $ABCD$, dont l'aire est de $120\,\mathrm{m}^2$, est découpé en quatre régions par la diagonale $[BD]$ et le segment $[CM]$, où M est le milieu du côté $[AB]$. Quelle est, en mètres carrés, l'aire de la région ombrée ?



580 D11 X07

Si les côtés d'un carré, dont la longueur initiale est de a cm, sont allongés de 6 cm, l'aire de ce carré double. Que vaut a ?

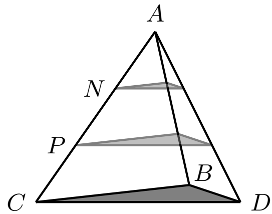
(A) 6 (B) $6\left(2 - \sqrt{2}\right)$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $6\left(1 + \sqrt{2}\right)$ (E) $6\left(2 + \sqrt{2}\right)$

581 D11 X08

Sans réponse préformulée — Partant d'un sommet, une mouche parcourt extérieurement les arêtes d'un cube. Arrivée en un sommet, elle emprunte l'arête située à gauche, puis au sommet suivant celle de droite, puis celle de gauche, puis à nouveau celle de droite, etc. Combien d'arêtes a-t-elle parcourues lorsqu'elle revient pour la première fois au sommet initial ?

582 D11 X09

La pyramide $ABCD$ est coupée par deux plans parallèles au plan BCD ; ces deux plans passent par les points N et P qui partagent $[AC]$ en trois segments de même longueur. Si V est le volume de la pyramide et W celui de sa partie comprise entre les deux plans de section, que vaut le rapport V/W ?



(A) 3 (B) $\frac{9}{2}$ (C) 9 (D) $\frac{27}{7}$ (E) $\frac{8}{3}$

583 D11 X12

Soit D_1 un disque de rayon R_1 et D_2 un disque de rayon R_2, contenu dans D_1. L'aire de D_1 vaut a/b fois l'aire de $D_1 \setminus D_2$ (l'ensemble des points qui appartiennent à D_1 mais pas à D_2). Que vaut R_1/R_2 ?

(A) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (B) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$ (C) $\dfrac{a}{a-b}$ (D) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ (E) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$

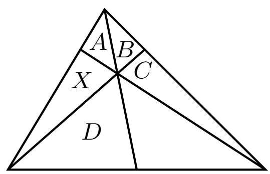
584 D11 X19

Dans un parallélogramme $ABCD$, le côté $[AB]$ est de longueur 1 et la diagonale $[AC]$ est de longueur 2. Dans ces conditions,

(A) $|BD| = \sqrt{3}$; (B) $|BD| = \sqrt{5}$; (C) $|BD| = \sqrt{7}$; (D) $|BD| = 3$;
(E) La longueur de $[BD]$ n'est pas déterminée par les données.

585 D11 X23

Sans réponse préformulée — Sur la figure (imprécise) ci-contre, trois droites concourantes issues des sommets d'un triangle le partagent en six petits triangles. Certaines aires sont données : $A = 2$, $B = 2$, $C = 6$ et $D = 12$. Que vaut l'aire X ?



586 D11 X24

Soit ABC un triangle tel que $|AB| = |AC| = 2|BC|$. Soit $D \in [AB]$ et $E \in [BC]$ tels que $\widehat{BED} = \widehat{BAC}$. Si le rapport des aires de ABC et de EBD est de 8, que vaut le rapport de longueurs $|BC|/|BE|$?

(A) 1 (B) $3/2$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}/2$ (E) 2

587 D11 X26

Sans réponse préformulée — Le triangle ABC est rectangle en A, avec $|AB| = 32$ et $|AC| = 24$. Le point D se trouve sur $[BC]$, avec $|DC| = 10$; sa projection orthogonale sur AB est appelée H et sa projection orthogonale sur AC est appelée K. Que vaut l'aire du triangle DHK ?

588 D11 X27

Sans réponse préformulée — Les points D et E appartiennent respectivement aux côtés $[AC]$ et $[BC]$ du triangle ABC ; en outre, DE est parallèle à AB et AE est bissectrice de l'angle $\widehat{BED}$. Si $|AB| = 192$ et que $|DE| = 120$, que vaut $|CE|$?

589 D11 X29

Sans réponse préformulée — Les côtés d'un triangle mesurent 60 cm, 80 cm et 100 cm. Un cercle de 10 cm de rayon roule à l'intérieur de ce triangle, en restant constamment tangent à un côté au moins. Lorsque le centre de ce cercle revient pour la première fois à sa position de départ, quelle est, en centimètres, la distance qu'il a parcourue ?

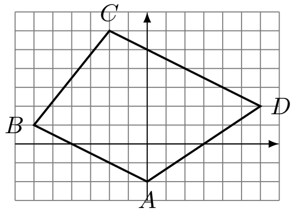
590 D11 X30

Soit d une diagonale d'un cube et a une arête gauche avec d. La section du cube par un plan parallèle aux droites d et a et passant par un point intérieur au cube est toujours

(A) Un triangle ;
(B) Un carré ;
(C) Un rectangle non carré ;
(D) Un trapèze non parallélogramme ;
(E) Un hexagone.

591 E12 X03

Sans réponse préformulée — Évaluer l'aire du quadrilatère $ABCD$ représenté ci-contre, si le carré du quadrillage est l'unité d'aire.



592 E12 X07

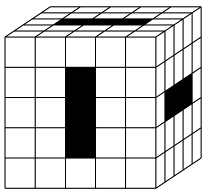
Si A, B, C sont les mesures en degrés des angles d'un triangle, lesquelles des affirmations suivantes sont *fausses* ?

(1) $A + B + C = 180^\circ$
(2) $\sin(A + B + C) = 0$
(3) $\sin(A + B) = \sin C$

(A) (1) (B) (2) (C) (3) (D) (1) et (2) (E) Aucune

593 E12 X09

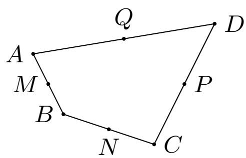
Ce solide est un grand cube formé de petits cubes et traversé par trois tunnels. Chaque tunnel va d'une face du grand cube à la face opposée. Combien de petits cubes composent ce solide ?



(A) 80 (B) 88 (C) 89 (D) 92 (E) 96

594 E12 X10

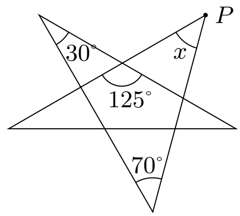
Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du quadrilatère $ABCD$. Si l'aire de ce quadrilatère vaut 1, alors la somme des aires des deux triangles AMQ et CPN vaut



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

595 E12 X12

Dans le polygone étoilé ci-dessous, on donne l'amplitude de 3 angles, comme indiqué. Déterminer l'amplitude x de l'angle en P.



(A) 23° (B) 24° (C) 25° (D) 26° (E) 28°

596 E12 X13

Si $b = 60^\circ$, que vaut $\sin b + \sin 2b + \sin 3b$?

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $3\sqrt{3}$

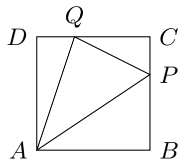
597 E12 X15

L'aire totale d'un tétraèdre régulier vaut $324\sqrt{3}$ cm^2. Quelle est la longueur d'une de ses arêtes ?

(A) $6\sqrt{3}$ cm (B) 18 cm (C) $12\sqrt{3}$ cm (D) $18\sqrt{3}$ cm (E) 36 cm

598 E12 X16

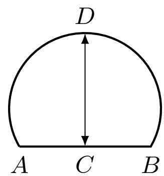
Dans le carré de côté 3 ci-contre, $|PC| = |QD| = 1$. Que vaut $\operatorname{tg} \widehat{AQP}$?



(A) $9/7$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{13}/\sqrt{5}$ (D) 7 (E) 21

599 E12 X23

Sans réponse préformulée — La figure représente la section d'un tunnel routier ; ADB est un arc de cercle. La largeur $|AB|$ de la route est de 6 m et la hauteur $|CD|$ en son milieu est de 7,50 m. Quel est, en centimètres, le rayon de l'arc de cercle ?



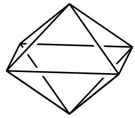
600 D12 X01

Sans réponse préformulée — Un cercle de centre C et un cercle de centre D se coupent en deux points distincts M et P. Parmi les affirmations suivantes, combien sont toujours vraies ?

- CD est médiatrice de $[MP]$;
- MP est médiatrice de $[CD]$;
- $|CM| = |MD|$;
- $|CM| = |CP|$;
- $CMDP$ est un losange.

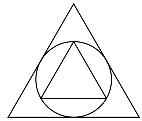
601
D12
X03

Sans réponse préformulée — Dans un octaèdre régulier, combien y a-t-il de paires d'arêtes parallèles ?



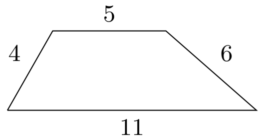
602
D12
X05

Sans réponse préformulée — Deux triangles équilatéraux sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle. Que vaut le rapport de l'aire du triangle circonscrit à celle du triangle inscrit ?



603
D12
X06

Que vaut l'aire d'un trapèze dont les côtés mesurent respectivement 4, 5, 6 et 11, comme l'indique le schéma ci-contre ?



(A) 80 (B) 40 (C) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ (D) $19\sqrt{2}$ (E) $\frac{64\sqrt{2}}{9}$

604
D12
X07

Si $ABCD$ est un carré, l'application successive des symétries centrales par rapport aux points A, B, C et D équivaut à

(A) La symétrie centrale par rapport au centre du carré ;
(B) La translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
(C) La translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$;
(D) La translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$;
(E) La transformation identique.

605
D12
X09

Sans réponse préformulée — Le triangle ABC est rectangle en B et le point D, appartenant au segment $[BC]$, est tel que $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$. Si $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, que vaut, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{ACB}$?

606
D12
X10

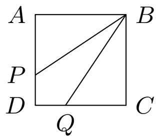
Sans réponse préformulée — Combien de droites faut-il au minimum pour que toutes les arêtes d'un cube donné soient rencontrées par au moins une de ces droites ?

607
D12
X14

Sans réponse préformulée — Sur le globe terrestre, à quelle latitude (en degrés) le parallèle a-t-il pour longueur la moitié de la longueur de l'équateur ?

608 D12 X15

Dans le carré $ABCD$, $3\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA}$ et $3\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC}$. Que vaut $\sin \widehat{PBQ}$?



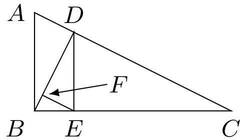
(A) $\dfrac{2}{5}$ (B) $\dfrac{3}{15}$ (C) $\dfrac{5}{13}$ (D) $\dfrac{12}{13}$ (E) $\dfrac{14}{15}$

609 D12 X17

Sans réponse préformulée — Trois ennemis vivent sur une planète sphérique dont l'équateur mesure 996 km. Ils ont choisi leurs lieux de résidence de manière que les distances qui les séparent soient aussi grandes que possible. Quelle est, en kilomètres, la plus petite de ces distances ?

610 D12 X19

Le triangle ABC est rectangle en B, BD est perpendiculaire à AC, DE est perpendiculaire à BC et EF est perpendiculaire à BD. Si l'angle en A mesure $60°$ et si $|AB| = 5$, quelle est la longueur de $[EF]$?



(A) $\frac{15}{8}$ (B) $\frac{15}{6}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ (E) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

611 D12 X23

Sans réponse préformulée — Un rectangle de 10 cm sur 50 cm est inscrit dans un rectangle de 38 cm sur 46 cm. Quelle est, en centimètres, la plus petite distance entre un sommet du premier rectangle et un sommet du deuxième ?

612 D12 X25

Quel est le volume du solide formé de tous les points à distance inférieure à 1 d'un cube plein d'arête 5 ?

(A) 150 (B) $150 + \dfrac{49}{3}\pi$ (C) 216 (D) 275 (E) $275 + \dfrac{49}{3}\pi$

613 D12 X27

Si une sphère et un cube ont même aire, alors

(A) Il existe une translation qui amène la sphère dans le cube ;

(B) Il existe une translation qui amène le cube dans la sphère ;

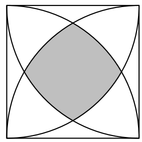
(C) Il n'existe ni une translation qui amène la sphère dans le cube, ni une translation qui amène le cube dans la sphère ;

(D) La sphère et le cube ont même volume ;

(E) Le cube a un plus grand volume que la sphère.

614 D12 X30

Que vaut l'aire ombrée dans la figure ci-contre, où les arcs de cercle ont pour centre les sommets du carré, qui est de côté 1 ?



(A) $\frac{3}{10}$ (B) $1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}+\pi}{15}$ (E) $\frac{1}{3}$

615 E13 X09

La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un polygone régulier vaut douze angles droits. Ce polygone est un

(A) Carré ;

(B) Pentagone ;

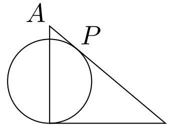
(C) Hexagone ;

(D) Octogone ;

(E) Décagone.

616 E13 X12

Sans réponse préformulée — Un triangle ABC est rectangle en B ; un cercle tangent en B à BC est aussi tangent à AC, en P. Si $|BC| = 45$ et $|AP| = 8$, que vaut l'aire d'ABC ?



617 E13 X17

Une fourmi se déplace sur la surface d'un tétraèdre régulier d'arête 1. Quelle est la longueur minimale d'un chemin allant d'un sommet au centre de gravité de la face opposée ?

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{3+\sqrt{2}}{5}$ (E) $3-2\sqrt{2}$

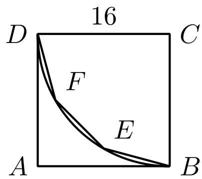
618 E13 X19

Deux sphères de 13 cm et 15 cm de rayon ont un cercle de 24 cm de diamètre comme intersection. Le centre de la grande sphère est à l'extérieur de la petite. Quelle distance sépare les centres des sphères ?

(A) 15 cm (B) 14 cm (C) 13 cm (D) 12 cm (E) 11 cm

619 E13 X22

Sans réponse préformulée — $ABCD$ est un carré de côté 16 ; $\overset{\frown}{BD}$ est un quart de cercle centré en C, que E et F partagent en trois arcs de même amplitude. Quelle est l'aire du pentagone $ABEFD$?



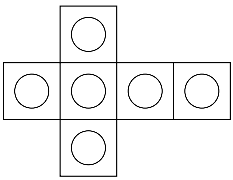
620 E13 X27

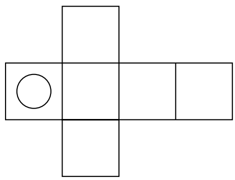
Les médianes $[AD]$ et $[CE]$ d'un triangle ABC se coupent en M et le milieu de AE est noté N. Que vaut le rapport de l'aire du triangle ABC à celle de MNE ?

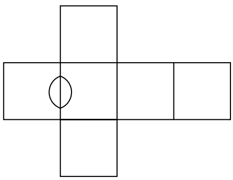
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 16

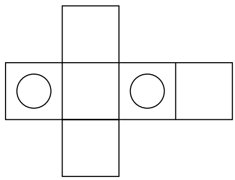
621 E13 X28

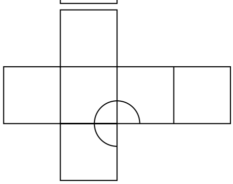
Un seul des cinq développements suivants d'un cube ne figure pas correctement l'intersection de ce cube avec une sphère ; lequel ?

(A)


(D)


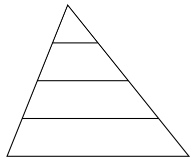
(B)


(E)


(C)


622 D13 X03

Sans réponse préformulée — Dans un triangle acutangle de base 8 et de hauteur 40, sont tracées trois parallèles à la base ; elles déterminent trois trapèzes de hauteur 10. Dans chacun de ces trois trapèzes est inscrit le plus grand rectangle possible (avec deux côtés inclus dans les bases du trapèze). Quelle est l'aire totale des trois rectangles ?



623 D13 X05

Que vaut l'angle des droites prolongeant les côtés $[AB]$ et $[DE]$ d'un pentagone régulier $ABCDE$?

(A) 30° (B) 32° (C) 35° (D) 36° (E) 40°

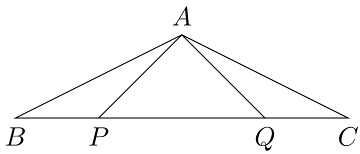
624 D13 X10

Une des hauteurs d'un triangle équilatéral d'aire 1200 est un côté d'un deuxième triangle équilatéral ; une des hauteurs de celui-ci est un côté d'un troisième triangle équilatéral. Quelle est l'aire de ce troisième triangle ?

(A) $600\sqrt{3}$ (B) 900 (C) 800 (D) 675 (E) 600

625 D13 X12

Dans le triangle isocèle ABC ci-contre, $|BP| = |CQ| = \frac{1}{4}|BC|$; l'angle $\widehat{PAQ}$ est droit. Que vaut la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$?



(A) -4 (B) -2 (C) $-4/3$ (D) 2 (E) 4

626 D13 X16

Sans réponse préformulée — Dans le plan muni d'un repère orthonormé, quelle est l'aire de la région intérieure à la ligne polygonale d'équation $|2x - 2014| + |y - 2013| = 29$?

627 D13 X17

Sans réponse préformulée — Quelle est la mesure en degrés (dans l'intervalle $]\,0; 180\,[$) du plus petit angle du triangle dont les côtés sont les droites d'équations $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$, $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$ et $y = x - 10$?

628 D13 X18

Dans un triangle rectangle ABC, l'expression $\dfrac{\sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}}{\cos^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{C}}$

(A) Vaut 2 ; (B) Vaut 1 ; (C) Vaut $\frac{1}{2}$; (D) Vaut 0 ;
(E) Dépend du triangle.

629 D13 X21

Soit $A_1A_2 \ldots A_{10}$ un décagone régulier convexe de centre O. Effectuer successivement les symétries par rapport aux droites OA_1, OA_2, …, OA_5 revient à effectuer

(A) La symétrie centrée par rapport à O ;
(B) La transformation identique ;
(C) La symétrie par rapport à la droite OA_6 ;
(D) La symétrie par rapport à la droite OA_{10} ;
(E) La symétrie par rapport à la droite OA_3.

630 D13 X29

Quelle est la plus petite distance entre un point d'une arête d'un tétraèdre régulier et un point de l'arête opposée, si les arêtes sont de longueur 1 ?

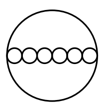
(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 1 (E) $\sqrt{2}$

631 D13 X30

Sans réponse préformulée — On considère les triangles rectangles non isométriques deux à deux dont les côtés ont pour longueurs des nombres entiers et dont l'aire est égale en valeur au périmètre. Quelle est la somme des aires de ces triangles ?

632 E14 X05

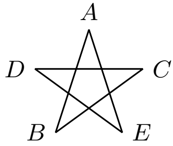
Les 7 cercles ci-contre sont tangents entre eux et leurs centres sont alignés ; les 6 petits cercles ont le même rayon. Que vaut le rapport de la circonférence du grand cercle à celle d'un des petits cercles ?



(A) 4 (B) $2\sqrt{6}$ (C) 5 (D) $4\sqrt{2}$ (E) 6

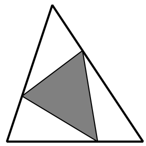
633 E14 X07

Sans réponse préformulée — Si $ABCDE$ est un pentagone régulier étoilé, que mesure, en degrés, l'angle $\widehat{ABC}$?



634 E14 X14

Les sommets du triangle ombré sont situés aux deux tiers des côtés du grand triangle. Quel est le rapport de l'aire du grand triangle à l'aire du triangle ombré ?



(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) 3 (D) 4 (E) 6

635 E14 X17

Sans réponse préformulée — Trois côtés consécutifs d'un quadrilatère circonscrit à un cercle mesurent, dans l'ordre, 18 cm, 24 cm et 28 cm. Quelle est, en centimètres, la longueur du 4e côté de ce quadrilatère ?

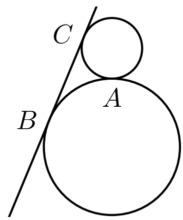
636 E14 X19

Quel est le volume d'une sphère tangente à chacune des arêtes d'un cube de volume 1 ?

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (D) $4\pi\sqrt{3}$ (E) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

637 E14 X22

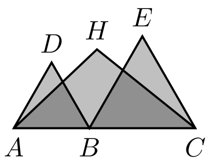
Deux cercles de rayons respectifs 8 cm et 18 cm sont tangents extérieurement en A. Quelle est, en centimètres, la longueur du segment $[BC]$ de la tangente commune ?



(A) 23,5 (B) 24 (C) 24,5 (D) 26 (E) 26,5

638 E14 X24

ABD et BCE sont deux triangles équilatéraux avec A, B, C alignés, $|AB| = a$ et $|BC| = b$. Si H est le milieu de $[DE]$, quelle est l'aire du triangle AHC ?



(A) $\frac{\sqrt{3}}{8}(a^2+b^2)$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{8}(a+b)^2$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$

(D) $\frac{1}{8}(a^2+b^2)$

(E) $\frac{1}{8}(a+b)^2$

639 E14 X27

Les triangles ACD et BCD sont rectangles en A et B respectivement. Les points A et B sont distincts, mais situés du même côté de CD. Si $|AC| = |BD| = 3$ et $|AD| = |BC| = 4$, que vaut $|AB|$?

(A) $7/5$ (B) $9/5$ (C) $18/5$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $\frac{3}{8}\sqrt{14}$

640 E14 X30

Soit $ABCD$ un tétraèdre quelconque et π le plan perpendiculaire à CD passant par le milieu B' de $[AB]$. Soit encore C' le milieu de $[AC]$ et D' celui de $[AD]$. Dans ces conditions,

(A) Le plan π contient toujours l'une des médiatrices du triangle BCD ;

(B) Le plan π contient toujours l'une des hauteurs du triangle BCD ;

(C) Le plan π contient toujours l'une des médiatrices du triangle $B'C'D'$;

(D) Le plan π contient toujours l'une des hauteurs du triangle $B'C'D'$;

(E) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

641 D14 X03

Une fourmi se déplace sur la surface d'une boite parallélépipédique de 10 cm $\times$ 20 cm $\times$ 30 cm. Quelle est la longueur du chemin le plus court allant d'un sommet au sommet opposé ?

(A) 60 cm

(B) $30\sqrt{2}$ cm

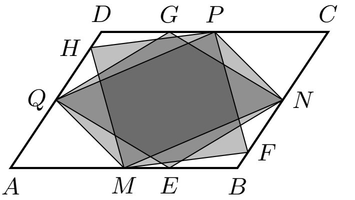
(C) $20\sqrt{5}$ cm

(D) $10\sqrt{14}$ cm

(E) $10\sqrt{26}$ cm

642 D14 X06

Ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme de base 10 et de hauteur 6 ; M, N, P, Q sont les milieux de ses côtés et E, F, G, H sont les pieds des perpendiculaires aux côtés issues du centre du parallélogramme. Si $a =$ $=$ aire$(MNPQ)$, $b =$ aire$(ENGQ)$ et $c =$ aire$(MFPH)$, alors :



(A) $a < b < c$;

(B) $a > b > c$;

(C) $c < a < b$;

(D) $a = b = c$;

(E) $a > b = c$.

643 D14 X09

L'une des affirmations suivantes est toujours *fausse*. Laquelle ?

(A) $\sin^2 x + 2\cos x = 2$

(B) $\tan x = 3$

(C) $\sin^2 x = 2 - \cos^2 x$

(D) $\sin^2 x + 2 = \tan^2 x$

(E) $\sin x - \cos x = 0$

644 D14 X13

Un disque de rayon 1/2 roule à l'extérieur d'un triangle de périmètre 12 et d'aire 6, en gardant toujours un point de contact. Quelle est l'aire de la région balayée par le disque lorsqu'il a fait une fois le tour du triangle ?

(A) $9 + \pi/2$ (B) $12 + \pi$ (C) 18 (D) $18 + \pi$ (E) $18 + 2\pi$

645 D14 X20

Si les angles d'un pentagone forment une suite arithmétique, alors l'un d'eux vaut nécessairement

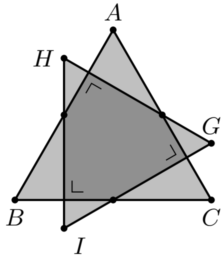
(A) 36° ; (B) 54° ; (C) 72° ; (D) 90° ; (E) 108°.

646 D14 X26

Sans réponse préformulée — Un hexagone convexe est tel que par tout point intérieur il passe au plus deux diagonales. Son intérieur est partagé en polygones par les neuf diagonales. Quel est le nombre de ces polygones qui n'ont pas de point commun avec le bord de l'hexagone ?

647
D14
X28

Soit ABC un triangle équilatéral et GHI le triangle obtenu en menant par chaque milieu de côté de ABC la perpendiculaire au côté suivant (le périmètre étant parcouru dans le sens ABC). Quel est le rapport de l'aire de ABC à celle de GHI ?



(A) 1 (B) $3/2$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $4/3$ (E) $2/3$

4.4 Logique

648
E12
X14

Dans la rue Courte, 312 habitants font du tennis, 256 de la pelote basque et 224 du kayak. Si 17 habitants ne font aucun de ces trois sports, 27 font les trois, 92 font juste du tennis et de la pelote basque, 88 ne font que du tennis et 22 que du kayak, combien de personnes habitent la rue Courte ?

(A) 471 (B) 488 (C) 515 (D) 992 (E) Une autre réponse

649
D12
X11

Que vaut la case du milieu ?

Cette case vaut $\dfrac{2^{14}-6^4}{2}$	Cette case vaut le nombre de cases de valeur impaire	Cette case vaut la somme des valeurs des deux cases voisines	Cette case vaut le nombre de cases de valeur paire	Cette case vaut $\dfrac{5^{12}-3^{10}}{2}$

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) $\dfrac{2^{14}-6^4}{2}$ (E) $\dfrac{2^{14}-6^4+5^{12}-3^{10}}{2}$

650 E13 X04

Dans l'académie de musique de ma petite ville, il existe des violonistes qui ne sont pas pianistes ; mais tous les organistes sont pianistes. Laquelle des propositions suivantes est nécessairement vraie ?

(A) Il existe des violonistes qui ne sont pas organistes ;
(B) Il existe des violonistes qui sont organistes ;
(C) Il existe des organistes qui sont violonistes ;
(D) Il existe des organistes qui ne sont pas violonistes ;
(E) Aucun organiste n'est violoniste.

651 E14 X13

D'après mon coéquipier, nous avons perdu tous les matchs déjà joués à l'extérieur durant la présente saison. Pour établir qu'il a tort, il me suffit de mentionner le fait que durant la présente saison,

(A) Nous avons gagné tous les matchs joués à domicile ;
(B) Nous avons perdu tous les matchs joués à domicile ;
(C) Nous avons perdu au moins un match joué à l'extérieur ;
(D) Nous avons gagné au moins un match joué à l'extérieur ;
(E) Il nous reste à jouer un match à domicile.

4.5 Problèmes — Divers

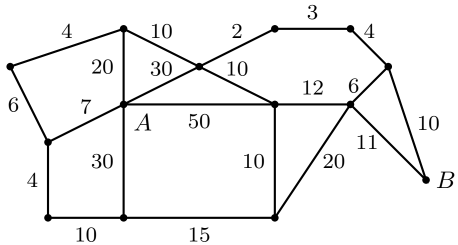
652 E11 X03

D'une semaine à l'autre, les nénufars d'un lac triplent la surface qu'ils recouvrent. À la fin de la 18^{e} semaine, ils couvrent exactement tout le lac. À la fin de quelle semaine couvrent-ils un neuvième du lac ?

(A) La 2^{e} **(B)** La 6^{e} **(C)** La 9^{e} **(D)** La 16^{e} **(E)** La 17^{e}

653 E11 X18

Sans réponse préformulée — Voici une carte d'un réseau autoroutier, avec les couts des différents tronçons.



Quel est le cout du trajet le moins onéreux de A à B ?

654 E11 X20

Les organisateurs d'un tournoi de tennis récompensent d'une somme d'argent chaque vainqueur de match à partir des huitièmes de finale. Le montant remporté est doublé à chaque tour (par exemple, chaque gagnant d'un quart de finale reçoit deux fois plus, pour cette victoire-là, que ce qu'il avait déjà gagné pour son huitième de finale). Si le montant alloué au tournoi est de 8000 €, quel est le gain total du vainqueur du tournoi ?

(A) 1000 € (B) 2000 € (C) 3200 € (D) 3750 € (E) 4000 €

655 D11 X13

Sans réponse préformulée — En 2010, un généreux mécène avait offert une somme de 16 000 € pour récompenser tous les finalistes de l'Olympiade belgo-luxembourgeoise d'éducation physique. Le jury a attribué à chaque finaliste le même nombre entier d'euros, aussi élevé que possible ; après ce partage, il est resté 100 €. En 2011, le même mécène offre 20 000 € à l'OBLEP, dont le nombre de finalistes sera le même qu'en 2010. Si le jury procède de la même manière, il restera 125 €. Quel est le plus petit nombre de finalistes compatible avec ces faits ?

656 D11 X21

Alfred et Bastien se déplacent à vitesses constantes le long de deux sentiers rectilignes qui se coupent en O. À midi, Alfred est en O et Bastien s'en trouve à 500 m ; deux minutes plus tard, ils sont équidistants de O, et c'est à nouveau le cas à 12 h 10. Que vaut le rapport de la vitesse d'Alfred à celle de Bastien ?

(A) 2/3 (B) 3/2 (C) 1 (D) 4/5 (E) 5/8

657
D11
X22

Sans réponse préformulée — Lorsque Andrée et Benoit travaillent ensemble, ils effectuent une certaine tâche en une heure de moins qu'Andrée seule et en 16 heures de moins que Benoit seul. Quel est, en heures, le temps qu'Andrée et Benoit mettent pour effectuer cette tâche à deux ?

658
E12
X22

Une personne est née un 1er janvier dans la première moitié du XIXe siècle. Durant sa vie, elle aura connu une année dont le numéro valait le carré de son âge à ce moment. En quelle année est-elle née ?

(A) 1801 (B) 1806 (C) 1825 (D) 1836 (E) 1849

659
D12
X02

Sans réponse préformulée — Un pays est découpé en trois régions représentant respectivement 60 %, 30 % et 10 % de la population totale des électeurs du pays. Dans la première région, 25 % des électeurs ont voté pour le parti A, de même que 40 % des électeurs de la deuxième région. Si ce parti a recueilli au total 29 % des voix, quel est son score, en pour cent, dans la troisième région ?

660
E13
X06

Dans une journée (de 24 h), à combien de reprises l'aiguille des heures et l'aiguille des minutes d'une horloge ordinaire forment-elles un angle de 180° ?

(A) 11 (B) 12 (C) 22 (D) 23 (E) 24

661
D13
X08

Sur une étagère, un libraire a rangé 31 livres, de gauche à droite, par ordre de prix croissants. L'écart entre les prix de deux livres voisins est chaque fois de deux euros. Pour le livre situé à l'extrémité droite, un acheteur paiera le même prix que pour le livre du milieu et l'un de ses voisins. Dans ces conditions,

(A) Le voisin en question est le voisin de gauche ;
(B) Le livre du milieu coute 36 euros ;
(C) Le livre le moins cher coute 4 euros ;
(D) Le livre le plus cher coute 64 euros ;
(E) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

662 D13 X24

Lorsqu'il est à une distance d de la ligne d'arrivée, le coureur A roule en tête à la vitesse v et il a une avance a sur son poursuivant B le plus proche. À quelle vitesse w doit rouler B pour passer la ligne d'arrivée en même temps que A, si celui-ci maintient sa vitesse v ?

(A) $w = av/(d + a)$
(B) $w = v(1 + a/d)$
(C) $w = a/v + d/(1 + v)$
(D) $w = (a + d)(v + 1)/v$
(E) $w = av/(d + 1)$

663 E14 X23

À un concours, le nombre de candidats a augmenté de 32 % par rapport à l'année dernière ; l'année dernière, il y avait 55 % de filles, mais cette année 50 % seulement. Par rapport à l'année dernière, le nombre de filles

(A) A baissé de 5 % ;
(B) Est resté le même ;
(C) A augmenté de 11 % ;
(D) A augmenté de 20 % ;
(E) A augmenté de 32 %.

664 D14 X22

Une jarre A contient 50 L d'eau et une jarre B, 50 L d'huile. Aladin prend 10 cL d'eau dans la jarre A et les verse dans la jarre B. Ensuite, il prend 10 cL de liquide dans la jarre B et les verse dans la jarre A. Si x (resp. y) est le nombre de centilitres d'huile (resp. d'eau) contenus maintenant dans la jarre A (resp. B), alors :

(A) $x = y$;
(B) $x = 10y$;
(C) $10x = y$;
(D) $x = 9y$;
(E) L'une ou l'autre de ces réponses, ou une autre encore, selon la manière dont l'expérience est menée.

4.6 Combinatoire & probabilités

665 E11 X04

Un carré 3×3 est subdivisé en 9 petits carrés. Chacun de ceux-ci doit être colorié soit en bleu, soit en rouge ; de plus, les petits carrés situés sur les diagonales du grand carré doivent être coloriés d'une seule couleur. Combien de coloriages sont possibles ?

(A) 32
(B) 64
(C) 128
(D) 256
(E) 512

666 E11 X08

Un sac contient trente petits cartons indiscernables au toucher : 10 noirs, 10 jaunes et 10 rouges. Des cartons sont extraits du sac, un à un, sans être replacés dans le sac. Ils ne sont pas non plus examinés. Combien faut-il en sortir pour être certain d'en avoir au moins un de chaque couleur ?

(A) 3 (B) 11 (C) 12 (D) 21 (E) 30

667 E11 X22

À l'arrivée d'une course, Alain est passé avant Bernard, Catherine avant Dorothée et Éric avant Fanny. S'il n'y a pas d'ex æquo, combien d'ordres d'arrivée de ces concurrents sont compatibles avec ces informations ?

(A) 6 (B) 8 (C) 90 (D) 120 (E) 720

668 E11 X24

Dans une classe de 26 élèves, si l'un est ami de l'autre, alors l'autre est ami de l'un (et aucun élève n'est son propre ami). Dans ce cas,

(A) Le nombre d'élèves ayant un nombre impair d'amis est nécessairement pair ;

(B) Le nombre d'élèves ayant un nombre impair d'amis est nécessairement impair ;

(C) Le nombre d'élèves ayant un nombre pair d'amis est nécessairement impair ;

(D) Aucun élève ne peut avoir un nombre impair d'amis.

(E) Aucune des propositions précédentes n'est nécessairement vraie.

669 D11 X10

Soit N le nombre de manières d'attribuer à 10 personnes les 10 sièges d'une rangée, dans un cinéma. Duquel des nombres suivants N est-il le plus proche ?

(A) 3500 (B) 9800 (C) 2 120 000 (D) 3 600 000 (E) 40 000 000

670 D11 X17

Un polygone régulier à n côtés possède m diagonales. Un polygone régulier à $n+1$ côtés possède $m+p$ diagonales. Que vaut p ?

(A) $n+1$ (B) n (C) $n-1$ (D) $n-2$ (E) $2(n-2)$

671 E12 X02

Dans mon porte-monnaie se trouvent 12 pièces de 1 centime, 21 de 2 centimes, 7 de 5 centimes et 8 de 10 centimes. Combien de pièces au minimum dois-je en extraire pour être certain d'avoir parmi elles une pièce valant plus de 3 centimes ?

(A) 12 (B) 13 (C) 33 (D) 34 (E) 48

672 E12 X05

Combien de points au minimum faut-il choisir sur la surface d'un cube pour que chacune des faces du cube contienne au moins un de ces points ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

673 E12 X18

Dix équipes participent à un tournoi. Si chaque équipe affronte exactement une fois chaque autre, combien de matchs seront joués ?

(A) 36 (B) 45 (C) 55 (D) 90 (E) Une autre réponse

674 E12 X21

Combien de nombres de six chiffres, inférieurs à 300 000, peut-on former avec les chiffres composant le nombre 112 223 ?

(A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 720

675 E12 X25

Sans réponse préformulée — À partir de quel nombre d'élèves une classe permet-elle de former strictement plus de sélections d'une équipe de football que de sélections d'une équipe de basket ? (Une équipe de football est un ensemble de 11 élèves et une équipe de basket un ensemble de 5 élèves.)

676 D12 X13

Lucrèce fait régulièrement profiter 7 de ses amis de ses talents culinaires. Puisqu'elle n'a qu'une table pour 4 personnes, elle ne peut en inviter que 3 à la fois. Combien de repas doit-elle organiser au minimum pour que chacun de ses 7 amis ait rencontré les 6 autres ?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 21 (E) 42

677 D12 X18

Quatre dés à six faces sont jetés en même temps. Lequel des résultats suivants est le plus probable ?

(A) Quatre ⚅

(B) Trois ⚅ et un ⚄

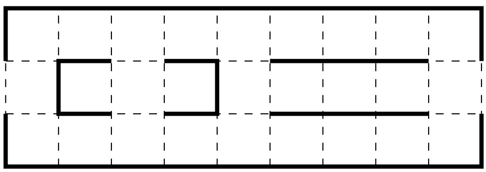
(C) Deux ⚅ et deux ⚄

(D) Un ⚅, deux ⚄ et un ⚃

(E) Un ⚄, un ⚃, un ⚂ et un ⚁

678 E13 X03

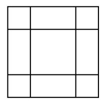
Combien de chemins (c'est-à-dire de suites de cases voisines, horizontalement ou verticalement) permettent de traverser le labyrinthe ci-dessous de gauche à droite sans passer deux fois par la même case ni franchir de mur ? (Les murs sont représentés par les traits pleins.)



(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20 (E) 24

679 E13 X08

Combien y a-t-il de rectangles dans la figure ci-contre ?



(A) 4 (B) 9 (C) 12 (D) 30 (E) 36

680 E13 X14

Dans une classe de 26 élèves, 6 sont enfants uniques, 13 ont au moins un frère et 14 ont au moins une sœur. Combien ont au moins un frère et une sœur ?

(A) 1 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 19

681 E13 X24

De combien de manières différentes un rectangle 6×1 peut-il être recouvert (sans lacune, chevauchement ni débordement) par des rectangles de taille 2×1 et de taille 1×1 ? (Cent rectangles de chaque type sont disponibles.)

(A) 13 (B) 12 (C) 10 (D) 8 (E) 5

682 E13 X30

Huit joueurs de tennis souhaitent se répartir en quatre paires en vue de participer à un tournoi de double. Combien existe-t-il de telles répartitions ?

(A) 70 (B) 105 (C) 1260 (D) 2520 (E) 40 320

683 D13 X09

De combien de manières différentes un rectangle 12×1 peut-il être pavé par des rectangles de tailles 2×1 ou 3×1 ? (Un nombre suffisant de rectangles de chacun des deux types est disponible.)

(A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 12

684 D13 X28

Sans réponse préformulée — Dans le plan muni d'un repère, chaque ensemble de points d'abscisses toutes différentes détermine un certain nombre de pentes, qui sont les pentes des droites joignant deux de ses points. Quel est le plus grand nombre de pentes déterminées par un ensemble de trente points du plan d'abscisses toutes différentes ?

685 E14 X09

Deux dés parfaitement équilibrés, à faces numérotées de 1 à 6, sont lancés. Quelle est la valeur la plus probable de la somme des points affichés par ces deux dés ?

(A) 2 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

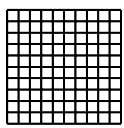
686 E14 X15

Quel est le plus petit nombre de couleurs requises pour colorier les sommets d'un cube de sorte que chaque sommet reçoive une couleur et que deux sommets non reliés par une arête reçoivent toujours deux couleurs différentes ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

687 E14 X25

Combien de carrés y a-t-il dans la figure ci-contre, formée de 10×10 petits carrés ?



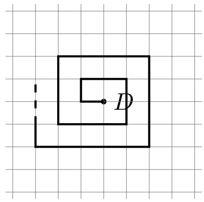
(A) 100 (B) 101 (C) 385 (D) 2014 (E) 2025

688 E14 X29

Sans réponse préformulée — Le plan muni d'un repère orthonormé est quadrillé par les droites horizontales d'ordonnées entières et par les droites verticales d'abscisses entières. Deux carrés ont leurs côtés inclus dans ces droites ; le grand a son côté double de celui du petit. Le nombre de nœuds du quadrillage intérieurs au grand carré dépasse de 96 le nombre de nœuds du quadrillage intérieurs au petit carré. (Les points du bord d'un carré n'en sont pas des points intérieurs.) Quel est le côté du petit carré ?

689 D14 X25

Sans réponse préformulée — Une fourmi se déplace le long d'un quadrillage de côté 1 en décrivant une spirale à partir d'un sommet de départ D, comme sur la figure ci-contre. Elle s'arrête dès qu'elle a parcouru un chemin de longueur totale 2014. Quel est le *carré* de la distance entre son point de départ D et son point d'arrivée ?



4.7 Analyse

690 E11 X11

Si f est une fonction impaire, laquelle des fonctions suivantes est également impaire ?

(A) $x \mapsto 1 - f(x)$ (B) $x \mapsto f(x) + 1$ (C) $x \mapsto -2f(x)$ (D) $x \mapsto (f(x))^2$

(E) Aucune des précédentes

691 E11 X14

Lorsque $ac < 0$, le graphe de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$

(A) Ne coupe pas l'axe Ox ;

(B) Coupe l'axe Ox en un point exactement ;

(C) Coupe l'axe Ox en deux points exactement ;

(D) Coupe l'axe Ox en une infinité de points ;

(E) Coupe l'axe Ox en un nombre de points qui dépend de b.

692 E11 X16

Si $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ est une suite géométrique de raison q, que vaut

$$t_1 + t_3 + t_5 + \cdots + t_{2n-1}\,?$$

(A) $t_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$

(B) $t_1 \dfrac{1-q^{2n}}{1-q}$

(C) $t_1 \dfrac{1-q^{2n+1}}{1-q}$

(D) $t_1 \dfrac{1-q^{2n+1}}{1-q^2}$

(E) $t_1 \dfrac{1-q^{2n}}{1-q^2}$

693 E11 X21

Si $f(x) = x + 2$ et que $(g \circ f)(x) = x^2 - 4$, que vaut $g(2)$?

(A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) 0 (E) 1

694 D11 X11

Sans réponse préformulée — Soit les propositions :

- Tout réel x strictement positif a une image par f ;
- Tout réel x tel que $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ a une image par f ;
- La fonction f est positive ;
- Il existe des réels négatifs qui ont une image par f.

Combien de ces propositions sont vraies si f est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2x} - 1}$?

695 D11 X14

Si S_n désigne la somme des n premiers termes de la suite arithmétique $(1, 5, 9, 13, 17, \ldots)$, alors $S_{2n} - S_n =$

(A) $n(2n-1)$

(B) $2n(4n-1)$

(C) $2n(4n+1)$

(D) $n(6n-1)$

(E) $n(6n+1)$

696 D11 X25

Sans réponse préformulée — Une fonction f est telle que $f(1) = f(2) =$ $= f(3) = 1$; de plus,

$$f(x+1) = \frac{f(x)f(x-1)+1}{f(x-2)}$$

pour tout $x \geqslant 3$. Que vaut $f(6)$?

697 E12 X08

Si f et g sont les deux fonctions réelles définies par $f : x \mapsto 2x^2 + 6$ et $g : x \mapsto 6/x$, que vaut $f(g(2))$?

(A) $3/7$ (B) 2 (C) $56/9$ (D) 14 (E) 24

698 E12 X11

Que vaut la somme des nombres entiers de -70 à 50 ?

(A) -1210 (B) -660 (C) -20 (D) 660 (E) 1210

699 E12 X19

Sans réponse préformulée — Une suite arithmétique a pour premiers termes 1, 5 et 9. Si la somme de ses termes est de 1540, combien de termes compte-t-elle ?

700 E12 X20

Si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction paire, toutes les suivantes le sont nécessairement aussi, sauf une. Laquelle ?

(A) $x \mapsto f(3x)$
(B) $x \mapsto f(|x| + 1)$
(C) $x \mapsto f(f(x))$
(D) $x \mapsto f(3 - x)$
(E) $x \mapsto f(-3x)$

701 E12 X24

Soit a et b deux réels non nuls. Si le graphe de f admet le point (a, b) pour centre de symétrie, l'une des fonctions suivantes est impaire. Laquelle ?

(A) $x \mapsto f(x - a) + b$
(B) $x \mapsto f(x - a) - b$
(C) $x \mapsto f(a - x) + b$
(D) $x \mapsto f(a + x) + b$
(E) $x \mapsto f(a + x) - b$

702 E12 X26

Le graphe de l'une des fonctions suivantes rencontre la première bissectrice des axes en un point exactement. Laquelle ?

(A) $x \mapsto 1 - 2|x - 1|$
(B) $x \mapsto 2 - 2|x - 1|$
(C) $x \mapsto 1 - |x - 1|$
(D) $x \mapsto 2 + 2|x - 1|$
(E) $x \mapsto 2|x - 1|$

703
D12
X08

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 2 + f(x-4)$, alors

(A) f est périodique de période 1 ;
(B) f est périodique de période 2 ;
(C) f est périodique de période 4 ;
(D) f est périodique de période 8 ;
(E) f n'est pas périodique.

704
D12
X16

Parmi les fonctions
$$f_k : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \cos^k x + \sin^k x,$$
où $k \in \mathbf{N}$, combien sont constantes ?

(A) Aucune
(B) 1
(C) 2
(D) Un nombre fini > 2
(E) Une infinité

705
D12
X29

Les suites a_n et b_n sont définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_{n+1} = a_n - b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. Que vaut a_{1000} ?

(A) 0
(B) 2^{500}
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 16^{125}$
(D) -16^{125}
(E) 3^{1000}

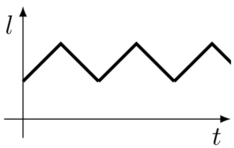
706
E13
X05

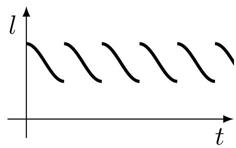
L'une des propositions suivantes est *fausse*. Laquelle ?

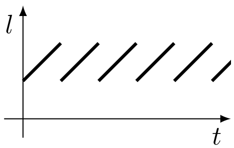
(A) Le produit de deux fonctions positives est une fonction positive.
(B) Le produit de deux fonctions constantes est une fonction constante.
(C) Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
(D) Le produit de deux fonctions paires est une fonction paire.
(E) Le produit de deux fonctions continues est une fonction continue.

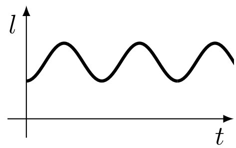
707
E13
X15

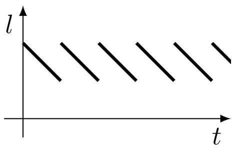
Lequel des graphiques suivants représente en fonction du temps, de la manière la plus plausible, la longueur des cheveux d'une personne qui passe régulièrement chez le coiffeur pour se faire couper les cheveux toujours de la même manière ?

(A)


(D)


(B)


(E)


(C)


708
E13
X18

Si une fonction f est telle que $f(2x-1) = \dfrac{10x-3}{2(2-x)}$, que vaut $f(x+1)$?

(A) $\dfrac{5x+2}{3-x}$ (B) $\dfrac{5x-3}{4-x}$ (C) $\dfrac{5x+7}{2-x}$ (D) $\dfrac{20x-13}{2(3-2x)}$

(E) Une autre réponse

709
D13
X19

Si elle existe, la dérivée d'une fonction impaire et croissante

(A) Est nécessairement impaire et négative ;

(B) Est nécessairement impaire mais pas nécessairement négative ;

(C) Est nécessairement positive mais pas nécessairement paire ;

(D) Est nécessairement paire et positive ;

(E) Ne possède aucune des propriétés précédentes.

710 D13 X20

La courbe plane représentée par l'équation $(x^2+y^2)^2 = 4x^2y^2$ peut aussi l'être par :

(A) $x = y$;
(B) $x + y = 0$;
(C) $x^2 = y^2$;
(D) $x^2 + y^2 = 2$;
(E) $x^2 + y^2 = 2xy$.

711 D13 X23

Le graphe de la fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto x^3$ est transformé en le graphe de la fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ par exactement

(A) Une symétrie axiale ;
(B) Une symétrie centrale ;
(C) Deux symétries axiales ;
(D) Deux symétries : l'une centrale et l'autre axiale ;
(E) Trois symétries : deux axiales et une centrale.

712 D13 X27

Sans réponse préformulée — Soit $(u_0, u_1, \ldots)$ la suite de nombres entiers définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n, u_{n+1} est le reste de la division de u_n^2 par 11. Que vaut u_{100} ?

713 E14 X10

Que vaut $\sin 20° \cdot \left(\operatorname{tg} 10° + \dfrac{1}{\operatorname{tg} 10°}\right)$?

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) 2 (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

714 E14 X11

L'image du graphe de la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par la symétrie centrée à l'origine est toujours le graphe de

(A) $x \mapsto f(x)$;
(B) $x \mapsto f(-x)$;
(C) $x \mapsto -f(x)$;
(D) $x \mapsto -f(-x)$;
(E) Aucune des précédentes.

715 E14 X21

Le domaine de définition maximal de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ est un intervalle. Quelle en est la longueur ?

(A) 3 (B) 3,5 (C) 4 (D) 4,5

(E) Aucune des réponses précédentes

716 E14 X26

Soit a, b, c et d des nombres réels ; si $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$, l'équation $f(g(x)) = g(f(x))$ admet une solution (au moins)

(A) Quels que soient a, b, c, d ;

(B) Si et seulement si $a = c$ et $b = d$;

(C) Si et seulement si $ad - bc = 0$;

(D) Si et seulement si $b(1-c) = d(1-a)$;

(E) Si et seulement si $(1-b)(1-c) = (1-a)(1-d)$.

717 D14 X19

La courbe d'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$, avec $a > 0$,

(A) A un axe de symétrie au moins si et seulement si $b^2 \geqslant 4ac$;

(B) A un axe de symétrie au moins si et seulement si $b^2 > 4ac$;

(C) A toujours deux axes de symétrie exactement ;

(D) A toujours deux axes de symétrie au moins ;

(E) A toujours quatre axes de symétrie exactement.

718 D14 X23

Définissons une fonction f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ par $f(n) = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du réel x, c'est-à-dire l'unique entier appartenant à $]\,x-1; x\,]$. Combien possède de solutions l'équation $f(f(f(n))) = 4$, d'inconnue naturelle n ?

(A) Aucune

(B) Une et une seule

(C) Entre 2 et 1000

(D) Entre 1001 et 100 000

(E) Plus de 100 001

719
D14
X27

Dans le plan muni d'un repère, une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points est définie par : $P_0 = (1,2)$ et si $P_n = (x,y)$, alors $P_{n+1} = (x-y, x+y)$. Que vaut P_{2014} ?

A $(2^{1006}, -3\cdot 2^{1006})$

B $(3\cdot 2^{1007}, 2^{1007})$

C $(2^{1008}, -2^{1007})$

D $(2^{1008}, 2^{1009})$

E $(2^{2014}, 2^{2015})$

720
D14
X30

Sans réponse préformulée — Pour un entier naturel n, a_n désigne le nombre entier le plus proche de $\sqrt{n}$. On calcule

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2014}}$$

et on simplifie au maximum. Quel est le dénominateur de la fraction obtenue ?

4.8 Tableau des réponses

X	11		12		13		14	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	B	E	C	2	B	E	2	35
2	E	A	D	20	D	341	44	37
3	D	A	49	6	B	120	B	B
4	A	B	C	98	A	50	A	27
5	E	B	B	4	C	D	E	561
6	D	50	E	C	C	927	A	D
7	B	D	E	E	E	B	36	D
8	D	6	E	E	E	A	25	474
9	B	D	B	30	D	E	C	C
10	C	D	C	2	D	D	C	E
11	C	2	A	C	34	4	D	621
12	C	E	C	D	630	C	65	7
13	C	159	D	A	A	E	D	B
14	C	D	B	60	B	D	C	320
15	C	A	B	C	B	36	C	B
16	E	891	D	C	B	841	A	C
17	A	C	A	332	B	30	22	1
18	46	6	B	E	C	A	C	C
19	210	E	28	A	B	D	E	D
20	D	C	D	E	B	C	A	E
21	A	A	C	A	C	E	C	1
22	C	4	B	50	64	A	B	A
23	95	6	435	6	C	C	D	E
24	A	C	E	12	A	B	B	18
25	B	7	17	E	C	C	C	628
26	C	72	A	D	C	36	D	7
27	D	320	D	C	D	9	A	C
28	E	B	C	E	E	435	32	D
29	17	120	B	B	24	C	6	211
30	B	C	D	B	B	54	D	45

Chapitre 5

Finales miNi

5.1 Finale 2011

1. Sur cette petite ile vivent trois populations de canards : des fuligules milouinans, des garrots sonneurs et des harles huppés ; ci-dessous, il ne sera question que des femelles. Chaque année, en avril, les fuligules pondent 5 œufs, les garrots 3 œufs et les harles 1 œuf. Cette année, le nombre de harles vaut les deux tiers de la somme du nombre de fuligules et du nombre de garrots ; en outre, il y a un total de 495 fuligules et garrots, qui ont pondu 2011 œufs.

Combien y a-t-il de femelles de chaque espèce, avant l'éclosion des œufs ?

2. a) Le nombre 999 est multiplié par 198, puis tous les chiffres de ce produit sont additionnés. Quelle est leur somme ?

b) Le nombre 9999 est multiplié par 198, puis tous les chiffres de ce produit sont additionnés. Quelle est leur somme ?

c) Le nombre $\underbrace{99\ldots999}_{\text{2011 chiffres 9}}$ est multiplié par 198, puis tous les chiffres de ce produit sont additionnés. Quelle est leur somme ?

3. Soit un triangle ABC.

a) Le milieu du côté $[BC]$ est nommé A' et celui du côté $[AC]$, B'. Comparer les aires des triangles $AA'B$ et $AB'B$. En déduire une propriété des droites AB et $A'B'$. Énoncer de manière générale la propriété ainsi établie.

b) Soit encore C' le milieu de $[AB]$. La parallèle à AA' menée par C' coupe $A'B'$ en P. Comparer les longueurs des côtés du triangle CPC' aux longueurs des médianes du triangle ABC.

4. Si n est un naturel non nul, $n!$ désigne le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

a) Que vaut $5!$? Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de ce nombre ?

b) Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de $25!$?

c) Existe-t-il un naturel n pour lequel l'écriture décimale de $n!$ se termine par 5 zéros exactement ?

d) Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de $2011!$?

5.2 Finale 2012

1. Soit

- La somme à 1 terme 1×1 ;
- La somme à 2 termes $1 \times 2 + 2 \times 1$;
- La somme à 3 termes $1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1$;
- La somme à 4 termes $1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1$;
- La somme à 5 termes $1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 1$;
- ...

a) Écrire la somme à 9 termes.

b) La somme à 2012 termes est-elle un nombre pair ou un nombre impair ?

c) Pour quels naturels non nuls n la somme à n termes est-elle impaire ?

2. Soit A un point sur un cercle de centre O et de rayon r.

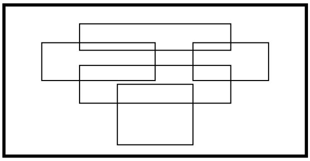
a) Soit encore B un point du cercle, tel que $|AB| = |OA|$. La perpendiculaire à OB par A recoupe le cercle en B'. Le quadrilatère $OABB'$ est-il (i) un trapèze ? (ii) un parallélogramme ? (iii) un losange ? (iv) un rectangle ? (v) un carré ? Justifier.

b) Soit encore C un point du cercle, tel que $|AC| < |OA|$. La perpendiculaire à OC par A recoupe le cercle en C'. Le quadrilatère $OACC'$ est-il (i) un trapèze ? (ii) un parallélogramme ? (iii) un losange ? (iv) un rectangle ? (v) un carré ? Justifier.

c) Pour quelle mesure de l'angle $\widehat{ACC'}$ le quadrilatère $OACC'$ a-t-il une aire de $r^2/2$?

3. Justin souhaite fixer cinq documents rectangulaires (de dimensions quelconques), éventuellement superposés, partiellement ou totalement, à un tableau métallique rectangulaire en plaçant des aimants, cela de sorte que chacun des documents soit coincé entre le tableau et trois aimants au moins.

a) Dans le cas de la disposition suivante des cinq documents, combien d'aimants doit-il utiliser au minimum ?



b) Quel est le plus petit nombre d'aimants qui permettra de fixer toute configuration de cinq documents ? Donner un exemple de configuration de cinq documents qui requiert ce nombre minimal d'aimants.

c) Existe-t-il une configuration de cinq documents pour laquelle le plus petit nombre d'aimants requis est huit ?

4. Johan, plus âgé que Fabrice, remarque qu'en permutant les deux chiffres de son âge, il obtient celui de Fabrice. Ce dernier, quant à lui, observe que la différence entre les carrés de leurs âges est le carré d'un naturel non nul. Quels sont leurs âges respectifs ?

5.3 Finale 2013

1. Un professeur de français adopte une nouvelle manière d'évaluer les dictées. Il applique la formule suivante :

$$\text{Note} = 20 \times \left(1 - \frac{40 \times \text{Nombre de fautes}}{\text{Nombre de mots du texte}}\right).$$

a) Quelle sera la note pour une dictée comportant 6 fautes dans un texte de 400 mots ?

b) Est-il possible d'obtenir une note de 20 ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

c) Est-il possible d'obtenir une note négative ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

d) Martin a obtenu une note de 12 pour un texte de 200 mots. Combien a-t-il fait de fautes ?

e) Adeline a obtenu 16 et a fait 4 fautes. Combien la dictée comptait-elle de mots ?

2. Quatre individus, dont un et un seul a commis un vol, sont arrêtés par la police. Ils font les déclarations suivantes :

- Andrée : « Benoit est coupable. »
- Benoit : « Lise est coupable. »
- Charles : « Je ne suis pas coupable. »
- Lise : « Benoit ment lorsqu'il dit que je suis coupable. »

a) L'inspecteur Sylvain croit qu'une seule de ces personnes dit la vérité. Qui croit-il coupable ?

b) L'inspecteur Jean-Paul croit qu'une seule de ces personnes ment. Qui croit-il coupable ?

3. Toutes mes interros de math sont notées sur 20. Avec le 17 que je viens d'avoir à la dernière, ma moyenne est remontée de 14 à 15.

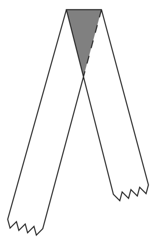
a) Combien d'interros y avait-il déjà eu (avant la dernière) dans la période ?

b) Ma moyenne peut-elle remonter à 16 après la prochaine interro ? Si oui, combien dois-je y obtenir ?

c) Ma moyenne peut-elle remonter à 17 après la prochaine interro ? Si oui, combien dois-je y obtenir ?

d) Ma moyenne peut-elle remonter à 17 après les deux prochaines interros ? Si oui, combien dois-je y obtenir ?

4. Une bande de papier de largeur constante égale à 6 cm est pliée suivant un pli non perpendiculaire aux bords (voir la figure). La superposition détermine un triangle.



a) Justifier que ce triangle est toujours isocèle.

b) Un point A est marqué sur un des bords de la bande et le pli doit passer par ce point. Construire précisément un des triangles obtenus par pliage dont un sommet est A et dont l'aire vaut 24 cm^2. Justifier la construction proposée.

c) Existe-t-il d'autres triangles obtenus par un pliage passant par A et dont l'aire vaut 24 cm^2 ? Combien ? Les construire tous.

d) Quelle est l'aire minimale possible pour un triangle obtenu par un tel pliage ?

N.B. : Expliquez et dessinez vos constructions. Ne joignez pas de modèle à votre copie !

5.4 Finale 2014

1. Le réservoir de la mobylette de Claude a une capacité de 6 L. Le carburant à utiliser est un mélange d'essence sans plomb et d'huile de synthèse. À la station-service du village de Claude, il n'y a que deux types de mélange essence-huile : le mélange « A » qui contient 7 % d'huile et le mélange « B » qui en contient 2 %.

a) Claude achète 3 L de chaque mélange. Quel est le pourcentage d'huile dans le mélange obtenu ?

b) Claude sait que le mélange idéal pour sa mobylette contient 3 % d'huile. Pour obtenir 6 L d'un tel mélange, quelle quantité de « A » et quelle quantité de « B » devra-t-il acheter ?

c) Dans son réservoir vide, Claude a déjà versé 1 L de « A » et 2 L de « B ». Comment doit-il compléter pour avoir un plein à 3 % d'huile ?

2. Nicole a effectué une division écrite au crayon. Pour l'ennuyer, Jules gomme grossièrement quelques chiffres et les remplace par des lettres. Ci-contre se trouve l'opération ainsi maltraitée.

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
A & B & C & \mathbf{9} & \mathbf{4} & & \mathbf{2} & \mathbf{3} & D & E \\ \cline{7-10}
F & G & H & I & & & \mathbf{1} & \mathbf{2} & & \\ \cline{1-4}
& J & K & L & M & & & & & \\
& N & O & P & Q & & & & & \\ \cline{2-5}
& & & \mathbf{3} & \mathbf{0} & & & & &
\end{array}$$

a) Le chiffre des unités du diviseur peut-il être 3 ? 6 ?

b) Quel aurait pu être le calcul de Nicole ? Justifier chaque remplacement de lettre par un chiffre. S'il y a plusieurs solutions, envisager toutes les possibilités.

3. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ se coupent en P, sans être perpendiculaires. Soit H l'orthocentre du triangle ABP (c.-à-d. le point d'intersection de ses hauteurs), I celui de BCP, J celui de CDP et K celui de DAP.

a) Quelle est la nature du quadrilatère si H, J et P sont alignés ?

b) Quelle est la nature du quadrilatère si H, J et P sont alignés, ainsi que I, K et P ?

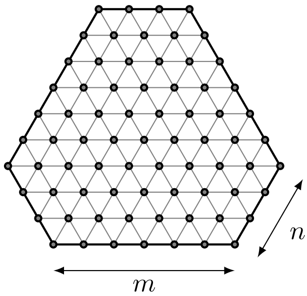
c) Si $ABCD$ est un rectangle, quelle est la nature de $HIJK$?

4. Soit m, n deux naturels non nuls. On construit un hexagone dont les angles sont de 120° et dont les côtés mesurent alternativement m et n. Cet hexagone est pavé par des triangles équilatéraux de côté 1, et tous les sommets de ces triangles sont marqués.

a) Dessiner l'hexagone et le pavage pour $m = 4$ et $n = 2$.

b) Combien a-t-on marqué de points, lorsque $m = 4$ et $n = 2$?

c) Combien a-t-on marqué de points, lorsque $m = 100$ et $n = 33$?



Chapitre 6

Finales miDi

6.1 Finale 2011

1. Soit C_1, C_2 et C_3 trois cercles de même rayon r, tangents deux à deux. Combien existe-t-il de cercles tangents à ces trois cercles ? Quels sont leurs rayons ?

2. Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2011}$.

3. Soit a et b deux réels non nuls de somme strictement positive. Montrer que

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

et déterminer dans quels cas il est vrai que

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

4. Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle B coupe $[AC]$ en D. Le cercle circonscrit au triangle ADB coupe $[BC]$ en F et le cercle circonscrit au triangle BDC coupe $[AB]$ en E. Démontrer que $|AE| = |CF|$.

6.2 Finale 2012

1. Soit a et b des entiers qui diffèrent d'un multiple de 3.

a) Le nombre $\frac{2}{3}(a^2+ab+b^2)$ est-il toujours somme de deux carrés d'entiers ?

b) Est-il toujours somme de trois carrés d'entiers ?

2. Augustin, Bérénice, Coralie et Damien choisissent des nombres non nécessairement distincts a, b, c et d puis se les communiquent les uns aux autres. Ils constatent que les nombres de choix de 0, de 1, de 2 et de 3 valent justement a, b, c et d (mais pas nécessairement dans cet ordre). Quelles sont toutes les listes (a, b, c, d) compatibles avec ces informations ?

3. Un hexagone $ABCDEF$ est dit *sympa* s'il est inscrit à un cercle et que les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{CDE}$ et $\widehat{EFA}$ passent toutes trois par le centre O de ce cercle.

a) Prouver que, si $ABCDEF$ est sympa, alors $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$.

b) Existe-t-il des hexagones sympas non réguliers ? Si oui, construire une figure en montrant un. (Expliquer la construction effectuée.)

c) Démontrer que les trois grandes diagonales $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ d'un hexagone sympa sont concourantes.

d) Soit B, D et F trois points non alignés. Construire (« à la règle et au compas ») trois points A, C et E tels que l'hexagone $ABCDEF$ soit sympa.

4. Les mesures des trois côtés d'un triangle isocèle sont respectivement 29, 29 et 40.

a) Calculer son périmètre et son aire.

b) Existe-t-il un triangle isocèle ayant même périmètre et même aire, bien que les mesures de ses côtés soient différentes de celles du triangle précédent ? Si oui, donner tous les triangles isocèles qui conviennent.

6.3 Finale 2013

1. a) Une interrogation comporte 5 questions, notées respectivement sur 10, 10, 35, 25 et 20 points. (Le total maximal est donc de 100 points.) Le professeur corrige ces questions dans l'ordre.

i. Un élève a obtenu 5, 3 et 10 aux trois premières questions. Est-il encore possible qu'il ait au moins 50 au total ?

ii. À la fin de la correction de ces trois premières questions, quel total partiel un élève doit-il avoir au moins obtenu pour pouvoir encore espérer que son total final soit au moins 50 ? Et à la fin de la correction des k premières questions ($k = 1, 2, 4$) ?

b) Une interrogation comporte n questions, notées respectivement sur m_1, …, m_n points. (Le total maximal est donc $m = m_1 + \cdots + m_n$.) Le professeur corrige ces questions dans l'ordre. À la fin de la correction des k premières questions ($1 \leqslant k < n$), quel total partiel un élève doit-il avoir au moins obtenu pour pouvoir encore espérer que son total final soit au moins $m/2$?

2. a) Donner deux exemples où la différence des carrés de deux nombres impairs est divisible par 8.

b) La différence des carrés de deux nombres impairs a et b est-elle toujours divisible par 8 ? Justifier.

c) Donner un exemple où la différence des cubes de deux nombres impairs est divisible par 8.

d) La différence des cubes de deux nombres impairs a et b est-elle toujours divisible par 8 ? Sinon, donner une condition sur a et b pour qu'elle le soit.

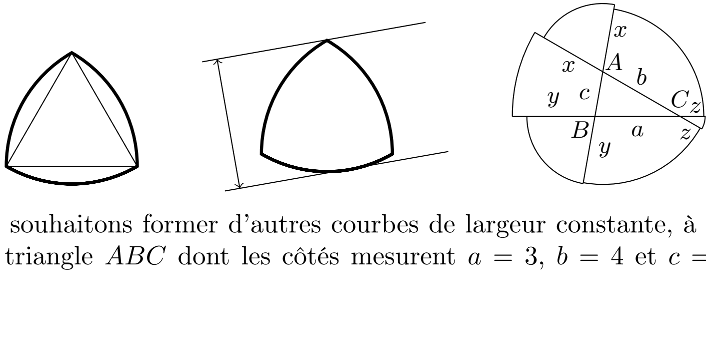
3. a) Soit S la somme des nombres entiers de 1 à 20 et S' la somme des nombres entiers de 21 à 40. Que vaut $S' - S$?

b) Et que vaut $T' - T$ si $T = 1 + 2 + \cdots + 2013$ et $T' = 2014 + 2015 + \cdots + 4026$?

c) Si $N = 1 + 2 + \cdots + n$ et $N' = (n+1) + (n+2) + \cdots + 2n$, est-il vrai que $N' - N$ est carré parfait quel que soit le naturel non nul n ?

d) Soit $k \geqslant 2$ un naturel. Si $N = 1 + 2 + \cdots + n$ et $N_k = (n+1) + (n+2) + \cdots + kn$ (avec n naturel non nul), établir une formule exprimant N_k en fonction de N, n et k. Est-il vrai que $N_k - N$ est carré parfait quel que soit n ?

4. a) Le triangle de Reuleaux, construit à partir d'un triangle équilatéral, est la réunion de trois arcs de cercle d'amplitude 60° (voir la figure de gauche). Montrer que sa largeur est la même dans toute direction (voir la figure du centre).



b) Nous souhaitons former d'autres courbes de largeur constante, à partir d'un triangle ABC dont les côtés mesurent $a = 3$, $b = 4$ et $c = 2$ en traçant six arcs de cercle comme dans la figure de droite : chaque côté du triangle est prolongé dans les deux sens ; chaque sommet devient le centre de deux arcs de cercle « de part et d'autre » dont les rayons, par exemple autour de A, valent x et $b+z$.

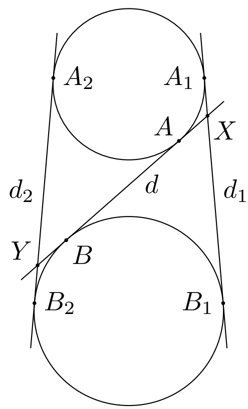
i. Pour ces valeurs de a, b et c, montrer qu'il existe au moins un choix de valeurs de x, y et z qui donne une courbe continue.

ii. Pour ces valeurs de a, b et c, quels sont tous les choix de valeurs pour x, y et z qui donnent une courbe continue ?

iii. Quel est le périmètre de la figure continue ainsi tracée ? Montrer que sa largeur est la même dans toute direction.

6.4 Finale 2014

1. Les droites d_1 et d_2 sont tangentes extérieurement à deux cercles de rayons distincts, tandis que d leur est tangente intérieurement. La droite d est tangente aux cercles en A et B, la droite d_1 en A_1 et B_1 et la droite d_2 en A_2 et B_2. La droite d coupe d_1 en X et d_2 en Y.



a) Supposons d'abord que, en outre, les deux cercles sont tangents l'un à l'autre.

i. Adapter la figure à ce cas particulier.

ii. Exprimer alors $|A_1B_1|$ en fonction des rayons des deux cercles.

b) Dans le cas général, prouver que

i. $|A_1B_1| = |A_2B_2|$;

ii. $|A_1B_1| = |XY|$.

2. Soit le système

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2(xy+4) \\ x+y+z = 2014, \end{cases}$$

dans lequel x, y et z sont entiers.

a) Le résoudre, par rapport aux inconnues x et y, lorsque $z=2$.

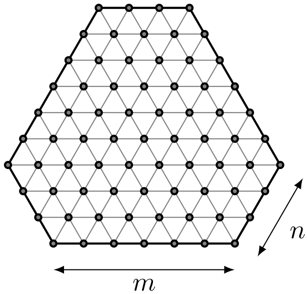
b) Le résoudre, par rapport aux inconnues x et y, lorsque $z=0$.

c) Le résoudre, en général, par rapport aux inconnues x, y et z.

3. Soit m, n deux naturels non nuls. On construit un hexagone dont les angles sont de 120° et dont les côtés mesurent alternativement m et n. Cet hexagone est pavé par des triangles équilatéraux de côté 1, et tous les sommets de ces triangles sont marqués.

a) Combien a-t-on marqué de points, lorsque $m = 20$ et $n = 14$?

b) Combien a-t-on marqué de points, dans le cas général ?



4. Dans une classe de n élèves, l'amitié est symétrique : si A est l'ami de B, alors B est l'ami de A ; de plus, A n'est pas considéré comme un ami de A. Est-il toujours vrai que :

a) Si $n \geqslant 2$, au moins deux élèves ont le même nombre d'amis ?

b) Le nombre d'élèves ayant un nombre pair d'amis est impair ?

c) Le nombre d'élèves ayant un nombre impair d'amis est pair ?

d) Si chaque élève a au moins deux amis, alors il existe un élève A qui est un ami d'un ami d'un ami... d'un ami de A lui-même, les amis impliqués dans cette chaine en dehors de A, tous distincts, étant au moins 2 ?

e) S'il y a strictement plus de $(n-1)(n-2)/2$ paires d'amis dans la classe, alors pour deux élèves A et B distincts quelconques, A est un ami d'un ami d'un ami... d'un ami de B, le nombre d'amis impliqués dans cette chaine en dehors de A et de B étant au moins 0 ?

Chapitre 7

Finales maXi

7.1 Finale 2011

1. a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que, pour tous réels x et y,

$$f(x+y) = 2011^y \cdot f(x) + 2012^x \cdot f(y).$$

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que, pour tous réels x, y et z,

$$f(x+y+z) = 2010^y \cdot f(x) + 2011^z \cdot f(y) + 2012^x \cdot f(z).$$

2. Soit $ABCD$ un rectangle. Les points K, L, M et N sont respectivement choisis sur les côtés $]AB[$, $]BC[$, $]CD[$ et $]DA[$. Le point d'intersection de KM et LN est noté P.

a) $KM \perp LN$ et $P \in BD$ entrainent-ils que $KL \mathbin{//} MN$?

b) $P \in BD$ et $KL \mathbin{//} MN$ entrainent-ils que $KM \perp LN$?

c) $KL \mathbin{//} MN$ et $KM \perp LN$ entrainent-ils que $P \in BD$?

3. Onze concurrents (Alexandre, Bérénice, ..., Knud) participent à un tournoi où ils s'affrontent par joutes à cinq, de manière que, à la fin du tournoi, chacun ait affronté exactement deux fois chacun de ses dix adversaires.

a) À combien de joutes participe un concurrent ?

b) De combien de joutes est constitué ce tournoi ?

c) Peut-il se faire que trois concurrents se soient trouvés ensemble dans plusieurs joutes ?

d) Indiquer une organisation pour les joutes d'un tel tournoi.

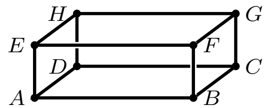
4. Soit x un réel.

a) Il existe trois entiers distincts a, b et c tels que $a+x$, $b+x$ et $c+x$ soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique ; cela entraine-t-il que le nombre x est rationnel ?

b) Si le nombre x est rationnel, existe-t-il trois entiers distincts a, b et c tels que $a+x$, $b+x$ et $c+x$ soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?

7.2 Finale 2012

1. Soit un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.



a) Si ce parallélépipède est un cube, que vaut l'amplitude de l'angle $\widehat{FCH}$?

b) Les longueurs des arêtes de ce parallélépipède peuvent-elles être choisies de manière que l'angle $\widehat{FCH}$ mesure 45° ?

c) Quelles sont toutes les valeurs que peut prendre l'amplitude de l'angle $\widehat{FCH}$?

2. Soit l'équation $pq + qr + pr + 1 = pqr$ en les inconnues p, q, r, qui sont des nombres premiers.

a) En donner une solution.

b) Montrer que, dans chacune de ses solutions, p, q et r sont distincts.

c) Donner toutes ses solutions.

3. Dans une salle de spectacle se trouvent 20 rangées de 12 fauteuils chacune, les fauteuils formant aussi 12 colonnes. Lorsqu'ils prennent place, les spectateurs s'assoient toujours de sorte à former dans chaque rangée un intervalle (c'est-à-dire que les sièges d'une rangée entre deux sièges occupés sont eux-mêmes tous occupés). Une fois les spectateurs assis, on compte pour chaque colonne le nombre de sièges qui y sont occupés, ce qui fournit une liste de 12 naturels. Les listes de 12 nombres naturels qui sont obtenues de cette manière sont dites *réalisables*.

a) La liste $(5, 5, 5, 5, 2, 1, 0, 2, 3, 6, 7, 5)$ est-elle réalisable ? Et la liste $(1, 2, 8, 1, 7, 4, 1, 6, 1, 1, 4, 1)$?

b) Toute liste de 12 nombres naturels tous inférieurs à 5 est-elle réalisable ?

c) Quel est le plus grand nombre naturel k tel que toute liste de 12 nombres naturels tous compris entre 0 et k est réalisable ?

d) Quel est le plus petit nombre naturel k tel que toute liste de 12 nombres naturels tous compris entre k et 20 est réalisable ?

e) Donner un test (portant uniquement sur les 12 nombres n_k) permettant de déterminer si une liste $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12})$ est réalisable ou non.

4. Un disque ouvert (c'est-à-dire sans son bord) de rayon 1 est partagé en régions ouvertes par deux droites.

a) Si les deux droites sont parallèles, existe-t-il toujours un disque ouvert de rayon $1/3$ qui est entièrement contenu dans l'une de ces régions ?

b) Si les deux droites sont perpendiculaires, existe-t-il toujours un disque ouvert de rayon $1/3$ qui est entièrement contenu dans l'une de ces régions ?

c) Existe-t-il toujours un disque ouvert de rayon $1/3$ qui est entièrement contenu dans l'une de ces régions, quelle que soit la position des deux droites ?

7.3 Finale 2013

1. Soit a, $b \in \mathbf{R}$.

a) Si $a \neq b$ et si les nombres $a - b$ et $a^2 - b^2$ sont rationnels, en est-il de même de $a + b$?

b) Si les nombres $a + b$ et $a^2 + b^2$ sont rationnels, en est-il de même de $a^3 + b^3$? et de $a^4 + b^4$?

c) Si les nombres $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ et $a^4 + b^4$ sont rationnels, en est-il de même de $a + b$?

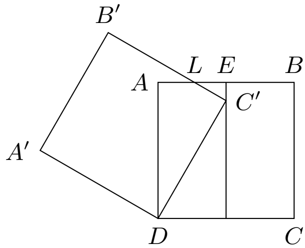
2. Une urne contient m boules mauves et n boules noires. Le couple (m, n) d'entiers naturels est *adéquat* lorsque le nombre d de couples de boules de couleurs différentes présents dans cette urne est égal au nombre e de couples de boules distinctes mais de même couleur.

a) Montrez que le couple $(10, 15)$ est adéquat.

b) Si $m = 6$, quels sont tous les couples adéquats $(6, n)$?

c) Combien existe-t-il de couples (m, n) adéquats ? Décrire leur ensemble.

3. Soit $ABCD$ un carré de côté 1 et $A'B'C'D$ son image par une rotation r de centre D. L'intersection de ces deux carrés est le quadrilatère $DALC'$. Par C', on mène la parallèle à AD, qui coupe AB en E.



a) Quelle est l'aire du quadrilatère $DALC'$ si E est le milieu de $[AB]$?

b) Déterminer la position de E sur $[AB]$ pour que l'aire de $DALC'$ soit la moitié de l'aire du carré initial.

c) Déterminer la position de E sur $[AB]$ pour que l'aire de $DALC'$ soit $1/3$, $1/4$, …, $1/m$ de l'aire du carré initial (m étant un naturel non nul).

4. a) Existe-t-il un multiple de 11 dont la somme des chiffres vaut 6 ?

b) Existe-t-il un multiple de 11 dont la somme des chiffres vaut 11 ?

c) Existe-t-il un multiple de 11 dont la somme des chiffres vaut 3 ?

d) Trouver tous les entiers naturels n pour lesquels il existe un multiple de 11 dont la somme des chiffres est égale à n.

7.4 Finale 2014

1. Les Babeleirs parlent la babelangue, qui s'écrit au moyen d'un alphabet de deux lettres, A et B. Les mots de leur lexique sont tous ceux qui découlent des règles suivantes, et uniquement ceux-là :

R1. Le mot d'une seule lettre B appartient au lexique.

R2. Si un mot du lexique contient un B, le mot obtenu en remplaçant ce B par ABA appartient aussi au lexique.

R3. Si un mot du lexique contient deux A successifs, alors le mot obtenu en les remplaçant par un B appartient aussi au lexique.

R4. Si un mot du lexique contient deux B successifs, alors le mot obtenu en les supprimant appartient aussi au lexique.

a) Le mot AA appartient-il au lexique de la babelangue ?

b) Le mot AAA appartient-il au lexique ?

c) Le mot vide (formé de zéro lettre) appartient-il au lexique ?

d) Le mot $BABA$ appartient-il au lexique ?

e) Décrire l'ensemble des mots du lexique comportant exactement deux B.

f) Combien y a-t-il de mots de n lettres dans le lexique de la babelangue ?

2. Soit $\mathcal{S}$ une sphère de rayon R tangente à un plan π. Huit autres sphères de même rayon r sont tangentes à π et tangentes à $\mathcal{S}$; elles forment un « collier » dans lequel chacune est tangente à ses deux voisines. Exprimer r en fonction de R.

3. On considère le système d'équations suivant, d'inconnues entières x et y :

$$\begin{cases} x^2 + y = a \\ x + y^2 = b \end{cases}$$

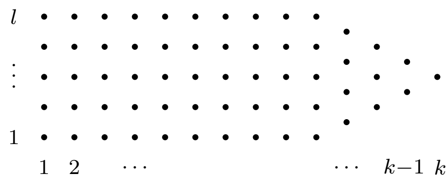
où a et b sont deux paramètres entiers.

a) Montrer que le système n'a pas de solution si a et b sont de parités différentes.

b) Trouver un couple (a, b) avec a et b distincts mais de même parité pour lequel le système n'admet pas de solution.

c) Montrer que le système possède au plus une solution pour tout couple (a, b) tel que $a \neq b$.

4. Un *nombre-crayon* est un « nombre figuré » de la forme suivante :



Par exemple, la figure qui précède montre que $60 = \mathrm{nc}(14, 5)$. Si n est un naturel non nul, une *écriture-crayon* de n est un couple (k, l) de naturels, avec $k \geqslant l \geqslant 1$, tels que $n = \mathrm{nc}(k, l)$. Tout naturel non nul n possède au moins une écriture-crayon, puisque $n = \mathrm{nc}(n, 1)$.

a) Combien d'écritures-crayons possèdent 2 ? 8 ? 15 ?

b) Combien d'écritures-crayons possède 2014 ?

c) Exprimer le nombre d'écritures-crayon d'un naturel non nul en fonction de sa décomposition en facteurs premiers.