Olympiades Mathématiques Belges

Recueil de questions 2015 – 2018

Collationné par P. Dupont

Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française
(ASBL)

Table des matières

Chapitre 1

Présentation

Depuis la fondation de l'Olympiade mathématique belge, en 1976, ses questions sont consciencieusement recueillies en volumes quadriennaux publiés par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, ASBL.

Leur objectif est double : d'une part, enseignants et élèves peuvent y puiser une importante collection d'exercices plus ou moins « décalés » par rapport à l'habituel drill scolaire (qui conserve son importance : nous ne prônons pas son abolition !), aux énoncés parfois plus ludiques.

D'autre part, les quelque 26 000 participants à l'Olympiade y trouvent la matière d'une préparation aux épreuves, sans doute indispensable pour ceux qui visent un classement au meilleur niveau.

C'est donc le succès de ses huit prédécesseurs qui nous a encouragé à préparer ce nouveau volume, consacré aux années 2015 à 2018. Toutes les questions d'éliminatoire et de demi-finale posées ces quatre dernières années y sont classées par niveau et par thème. Les questions de finale sont ensuite regroupées en fin de volume.

Pascal DUPONT

1.1 L'Olympiade Mathématique Belge

C'est en 1976, à l'initiative du Professeur Francis BUEKENHOUT (ULB), que la SBPMef a créé une épreuve annuelle : l'Olympiade Mathématique Belge (OMB). Cette extraordinaire aventure s'est poursuivie grâce au formidable travail fourni par l'importante équipe de bénévoles qui gèrent cette compétition — tout à fait amicale — aussi bien sur le plan administratif que sur le plan scientifique, ainsi que grâce à l'enthousiasme des élèves participants et de leurs professeurs qui les incitent à s'inscrire et qui les motivent.

Elle est ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire francophone belge ou luxembourgeois (tous réseaux, tous niveaux). Dès 1977, elle se subdivise en deux catégories, « miNi » et « maXi », respectivement réservées aux élèves des trois classes inférieures et des trois classes supérieures. En 1996, une catégorie intermédiaire est créée et désormais, l'Olympiade est subdivisée en trois catégories : « miNi », « miDi » et « maXi », destinées respectivement aux élèves des 1er, 2e et 3e degrés de l'enseignement secondaire. Les participants trouvent ainsi dans le questionnaire qui leur est destiné une source de matières qui les ciblent au mieux.

Le *jury national* est composé de professeurs des enseignements secondaire, supérieur et universitaire ainsi que d'inspecteurs et de conseillers pédagogiques. Il a en charge la responsabilité générale de l'organisation de l'Olympiade et est secondé matériellement par le secrétariat de la SBPMef qui se charge des expéditions. Le jury a plus particulièrement la lourde charge de la création et de la rédaction précise des questions des diverses compétitions.

Pour la période 2015–2018, ce jury était composé des personnes suivantes : Benoit Baudelet, Andrée Bogaerts, Francis Buekenhout, Sylvain Courtois, Géry Debongnie, Brigitte De Coninck, Marc De Neef (trésorier), Jean-Paul Doignon (président), Pascal Dupont (secrétaire), Bernard Felten, Nicolas Franco, Yvan Haine, Lionelle Lamy, Charles Leytem, Jules Miéwis, Éveline Moitroux, Philippe Niederkorn, Lise Ponselet, Michel Sebille (responsable national), Nicole Seronveaux et Pascal Zeihen.

Le jury est secondé par des *membres correspondants*. En effet, à voir et revoir les mêmes questions dans leurs différentes versions au cours de leur élaboration, le jury n'est parfois plus à même de repérer certaines fautes ou inexactitudes. Les membres correspondants reçoivent du jury la version finale des questionnaires. Leurs regards neufs sont à même de voir des problèmes jusque là passés inaperçus.

Pour la période qui nous concerne, les membres correspondants étaient : Dominique Buset, Martine Devillers, Jean Doyen, Françoise Duchêne, Pierre-Alain Jacqmin, Dany Legrand, Boris Meynsbrughen, Monique Milcamps, Nicolas Radu, Yolande Roch, Simone Trompler et Claude Villers.

L'*éliminatoire* se déroule dans chaque école inscrite sous la responsabilité d'un professeur qui réceptionne les questionnaires, début janvier ; il est chargé de la bonne organisation de l'éliminatoire au sein de son école. Le grand nombre d'inscrits impose de recourir à des questionnaires à choix multiples pour cette éliminatoire (actuellement, une réponse valable à trouver parmi cinq proposées). Le jury s'efforce néanmoins de donner aux questions un caractère « peu scolaire » de façon à obliger les élèves à faire preuve de leur capacité à appliquer leurs connaissances et à les transposer à des situations nouvelles. La durée de l'épreuve, 90 minutes pour répondre à 30 questions, les oblige à traiter d'abord les questions les plus accessibles. Afin d'éviter les choix au hasard, une réponse erronée à une question est pénalisée par rapport à une absence de réponse. De plus, le jury prévoit toujours huit questions ne soient pas à choix multiples, mais nécessitent une réponse qui est un nombre entier compris entre 0 et 999. Aidé de grilles de correction extrêmement précises, le professeur responsable organise dans son établissement la correction de cette première épreuve. Il envoie les résultats à son secrétaire régional. Il y a actuellement dix secrétaires régionaux qui ont en charge de lourdes responsabilités. Ce sont eux qui sélectionnent les demi-finalistes sur base des résultats communiqués par les écoles. Ils rédigent les statistiques année par année pour leur région et expédient ces données dans les écoles. Ils convoquent les demi-finalistes et organisent les demi-finales.

Pour la période 2015–2018, les responsables régionaux étaient les personnes suivantes : Bernadette PETIT et Xavier HAINAUT (Arlon), Brigitte BONNEWYN et Vincent DE CLERCK (Bruxelles), Vincent CORBISIER et Valérie BAS (Charleroi), Pierre PAQUAY et Yvan HAINE (Liège), Jean-Pierre TURPIN (Louvain-la-Neuve), Mike DOSTERT (Grand-Duché), Sylvia PONTHIER (Famenne), Stéphanie BRIDOUX (Mons), Pascal HENRY (Namur) et Pierre DUFRASNE (Tournai).

Les épreuves de la *demi-finale* sont du même type (avec une moitié de questions à choix multiples et l'autre moitié des questions dont la réponse est un nombre entier compris entre 0 et 999) que lors des éliminatoires, mais les questions présentent un degré de difficulté légèrement supérieur. Enfin, les responsables régionaux et leurs équipes corrigent les épreuves et transmettent les résultats au responsable national.

C'est ensuite au jury national qu'il appartient de déterminer quels seront les *finalistes*. Ceux-ci sont invités en un lieu central (en principe Namur) et travaillent pendant 4 heures à la résolution de problèmes difficiles. Il est conseillé aux finalistes de mettre par écrit toutes les démarches qu'ils entreprennent car le jury valorise les idées intéressantes, y compris celles dont il n'était pas évident *a priori* qu'elles n'aboutiraient pas. Le jury national corrige ces épreuves finales et détermine les lauréats. Si la compétition a ainsi successivement un caractère local, puis régional et enfin communautaire, tous les élèves sont néanmoins confrontés aux mêmes difficultés puisque toutes les questions sont préparées par le même jury national.

Depuis quelques années, tous les finalistes sont invités à la proclamation solennelle des résultats et y reçoivent un diplôme de participation ainsi que de nombreux prix. La SBPMef est à ce niveau aidée par de généreux mécènes qui soutiennent la compétition. Des prix spéciaux sont en outre attribués aux élèves de 1^{e}, 3^{e} et 5^{e} années parvenus en finale et ayant fait montre d'un talent mathématique précoce et prometteur. Le prix Willy Vanhamme récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues.

Le but poursuivi par la SBPMef en organisant l'Olympiade est triple : intéresser les élèves à l'activité mathématique par le biais d'une compétition, d'un grand jeu qui les passionne ; mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation mathématique des élèves en proposant des problèmes qui font appel à la créativité, à l'imagination, aux capacités réelles de raisonnement ; fournir aux professeurs un choix d'exercices non élémentaires, originaux, d'un type différent de ceux figurant dans la plupart des manuels — bien que, *a posteriori*, certains manuels reprennent des questions de l'OMB !

Depuis la fin des années 90, la Fédération Wallonie-Bruxelles a segmenté l'enseignement des mathématiques en trois « compétences ». Rien de véritablement neuf sur le fond. En effet, ces trois compétences se résument parfois en la trilogie théorie-exercice-problème : les mathématiques utilisent ces concepts depuis des siècles. La nouveauté réside dans un « référentiel » entrant plus dans les détails. Même s'il est imposé par les décrets, l'usage de ce découpage en compétences a tardé à se généraliser.

Mais dès ses débuts en 1976, l'Olympiade a effectivement créé un nombre assez considérable de questions rentrant dans ces catégories.

La compétence 1, classiquement résumée par « théorie » est celle qui est la moins directement présente dans les questionnaires. Mais elle l'est évidemment par bien des questions de manière indirecte. Chaque terme mathématique tel que « médiatrice » nécessite la maitrise de sa définition. Néanmoins quelques questions sont réellement théoriques. La question 6 de la demi-finale maXi de 2018 en est un parfait exemple.

La compétence 2, correspondant plutôt aux « exercices » est déjà plus travaillée. Ainsi, les questionnaires commencent par quelques questions faxciles. Très souvent des exercices de calcul, de simplification, d'application de règles permettent de rentrer dans le questionnaire. Si les exercices constituent une étape indispensable de l'apprentissage des mathématiques, ils n'en constituent pas l'essence. Les développements de l'informatique peuvent même, aux yeux du grand public, les faire passer pour inutiles. Pourquoi résoudre une certaine quantité d'équations du second degré si un logiciel fait cela très bien tout seul ? Ils constituent néanmoins une étape indispensable de l'apprentissage d'une notion préalable à la résolution de tâches plus complexes.

La compétence 3 est, comme de juste, la reine de l'Olympiade. Elle recouvre toutes les questions qui sont véritablement des « problèmes ». Les nombreuses personnes qui utilisent les mathématiques dans leur profession ne vont pas passer l'essentiel de leur temps à résoudre des exercices, mais bien à transformer une situation propre à leur métier en énoncés mathématiques. Les problèmes constituent le cœur de l'Olympiade ; la finale en est même exclusivement constituée. Ce sont eux qui poussent à une véritable réflexion en profondeur.

Il est en effet possible de résoudre des exercices quasiment sans les comprendre. On apprend ainsi différentes techniques de calcul écrit. Comment expliquer que les multiples étapes dont elles sont constituées produisent la bonne réponse ? Ou même, sans entrer dans les détails, combien de personnes sachant effectuer un calcul écrit pourraient expliquer pourquoi les techniques d'addition, de soustraction et de multiplication fonctionnent de droite à gauche tandis que la division fonctionne de gauche à droite ? Un élève voulant réduire les mathématiques à un ensemble de trucs à appliquer, se trouvera fort démuni face à un problème. Ce problème parle-t-il de géométrie, d'algèbre, d'analyse, de probabilités, d'autre chose ou d'un mélange de ces branches ? Si c'est de la géométrie, est-ce de la géométrie synthétique, vectorielle, cartésienne, ou encore une autre sous-branche ? Si le problème parle d'une médiatrice d'un segment, utilise-t-il le fait que c'est la perpendiculaire par le milieu, un axe de symétrie du segment, le lieu des points équidistants de ses sommets ou un lien entre ces différentes propriétés ? En réduisant les mathématiques à un ensemble de trucs ou de recettes, il est quasiment impossible à un élève de naviguer aisément dans toutes ces questions.

Outre le fait qu'ils constituent l'essence même des mathématiques, les problèmes ont pour l'Olympiade l'avantage qu'on peut bien souvent les rendre ludiques. Le but n'est effectivement pas de consacrer une heure trente de plus aux maths, mais de donner de l'attrait à celles-ci. Les participants doivent s'amuser à s'essayer au questionnaire. Citons ici le mathématicien français Gaston DARBOUX (1842–1917) :

> *Je compterai toujours, pour ma part, au nombre des heures les plus douces, les plus heureuses de ma vie, celles où j'ai pu saisir dans l'espace et étudier sans trêve quelques-uns de ces êtres géométriques qui flottent en quelque sorte autour de nous.*

Pour l'élève, l'Olympiade correspond aussi à une évaluation sans stress de ses capacités mathématiques (à moins qu'on ne lui ait imposé sa participation !). Les interrogations, tests et examens, même « formatifs », comportent toujours une part de jugement. À l'heure où on souhaite promouvoir de plus en plus d'évaluations externes, l'Olympiade peut se présenter comme précurseur sur ce point. Mais sans sanction aucune.

Au final, l'impact de l'Olympiade sur l'enseignement n'est pas négligeable. On constate en effet que nombre d'enseignants réutilisent, dans le cadre de leurs cours, des questions posées à l'Olympiade. Espérons que ce recueil les encouragera à continuer en ce sens.

1.2 Tableau des nombres de participants

Entre parenthèses : les nombres de demi-finalistes.

Année	miNi		miDi		maXi	
1976	—		—		760	
1977	893		—		1130	
1978	1012		—		1271	
1979	1204		—		1447	
1980	1390		—		1778	
1981	1482		—		1849	
1982	3021	(570)	—		3164	(693)
1983	3010	(664)	—		3292	(689)
1984	4424	(871)	—		3933	(782)
1985	5563	(926)	—		4621	(836)
1986	6339	(981)	—		5146	(871)
1987	7779	(1249)	—		6285	(1088)
1988	8149	(1125)	—		6834	(1086)
1989	9140	(1250)	—		7632	(1140)
1990	10488	(1195)	—		8236	(1154)
1991	7517	(1074)	—		5568	(973)
1992	9967	(1266)	—		6715	(984)
1993	11020	(1215)	—		7941	(1006)
1994	10498	(1314)	—		7288	(1065)
1995	11082	(1373)	—		7423	(1082)
1996	8909	(959)	7129	(919)	4937	(730)
1997	8993	(954)	6838	(972)	5038	(765)
1998	9805	(979)	6786	(842)	5376	(730)
1999	9934	(925)	6365	(719)	4995	(654)
2000	10306	(980)	6603	(770)	4811	(662)
2001	10576	(1022)	6598	(825)	4592	(650)
2002	10758	(1030)	6675	(786)	4463	(637)
2003	10912	(1022)	6604	(814)	4589	(652)
2004	12987	(1024)	8062	(765)	5697	(598)
2005	13289	(1073)	8833	(798)	5968	(669)
2006	13332	(1073)	8026	(795)	5819	(691)
2007	12991	(977)	8524	(748)	5881	(620)
2008	13849	(1115)	8258	(808)	6134	(698)
2009	13604	(1108)	8019	(758)	5860	(667)

Année	miNi		miDi		maXi	
2010	13416	(1060)	7507	(705)	5922	(658)
2011	13436	(1038)	7421	(679)	6008	(688)
2012	13285	(998)	7408	(666)	5961	(681)
2013	13532	(998)	7062	(558)	6346	(617)
2014	13219	(1021)	7171	(654)	6394	(722)
2015	12502	(933)	7206	(627)	6391	(702)
2016	12218	(940)	7116	(609)	6110	(697)
2017	12053	(904)	6930	(623)	6069	(672)
2018	12697	(1007)	7009	(626)	6295	(699)

1.3 Les compétitions internationales

Les meilleurs finalistes de l'Olympiade sont invités à des stages de mathématiques organisés à Wépion dans un centre de la fédération Wallonie-Bruxelles. Six à sept fois par an, ils participent à des week-ends de cours de mathématiques orientés vers les sujets des questions des Olympiades internationales. Même s'il sont finalistes de l'OMB, même s'ils sont parmi les plus doués dans leur école, sans formation supplémentaire, ces élèves auraient du mal ne serait-ce qu'à comprendre certaines des questions posées dans ces compétitions internationales. Et que dire alors d'y répondre...

Les personnes qui ont encadré les concurrents des différentes épreuves internationales pour la période 2015–2018 sont : Hoang-Phung BUI, Pierre-Alain JACQMIN, Jessica MULPAS, Philippe NIEDERKORN, Nicolas RADU, Michel SEBILLE et Gérald TROESSAERT.

1.3.1 L'Olympiade Mathématique Internationale

En juillet 2018, l'OMI, organisée depuis 1959, en était à sa 59e édition. Plus d'une centaine de pays et de 600 élèves y participent.

Comme c'est le cas depuis plusieurs années maintenant, l'équipe belge était composée de six étudiants : trois néerlandophones et trois francophones. L'épreuve consiste en la résolution de six problèmes ; chaque problème est noté sur sept points. Lorsque les corrections sont terminées, le jury de l'OMI définit les seuils d'attribution des médailles de la façon suivante : la moitié des participants au plus sont médaillés. Parmi les médaillés, un tiers au plus obtiennent une médaille d'argent et un sixième au plus une médaille d'or. Une mention honorable est attribuée pour avoir obtenu sept points sur sept pour l'un des problèmes au moins.

1.3.2 L'Olympiade Mathématique du Benelux

Organisée depuis 2009, la BxMO en était donc à sa dixième édition en 2018. Cette compétition est une bonne manière de préparer à l'OMI. Les questions sont plus difficiles qu'à l'Olympiade belge, mais moins qu'à l'Olympiade internationale.

Une équipe compte dix participants ; l'équipe belge est composée de cinq néerlandophones et de cinq francophones. L'épreuve consiste en la résolution de quatre problèmes, chaque problème étant noté sur sept points. Les médailles sont attribuées de la même manière qu'à l'OMI.

La BxMO intervient dans la sélection des participants pour l'OMI.

1.3.3 L'European Girl's Mathematical Olympiad

La participation féminine aux Olympiades internationales est faible voire pour certains pays quasiment inexistante. Il s'est ainsi récemment écoulé 16 années sans participation d'une Belge aux OMI jusqu'à ce qu'une participante néerlandophone prenne part à l'édition 2016 à Hong Kong et une francophone à l'édition 2017 à Rio de Janeiro.

Afin d'encourager une participation féminine à ces compétitions (ainsi qu'aux études de mathématiques !), il a été décidé d'organiser, à partir de 2012, une compétition réservée exclusivement aux filles. Celle-ci fut baptisée « European Girl's Mathematical Olympiad ».

En 2018, 195 participantes venant de 52 pays se sont affrontées (36 pays européens et 16 pays invités) en Italie. L'épreuve consiste en la résolution de six problèmes (et, selon l'usage international, chaque problème est noté sur sept points). Les médailles sont attribuées de la même manière qu'à l'OMI.

1.4 La SBPMef

La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde.

La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un art qui a sa vie propre et son histoire, avec les problèmes épistémologiques qu'elle suscite. Par là, elle a une valeur culturelle incontestable. D'où l'importance de l'objectif que s'est fixé la SBPMef.

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française est née en 1974 à la suite d'une restructuration linguistique de la Société Belge des Professeurs de Mathématique créée elle-même en 1953. Son but principal est de contribuer à la promotion et à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique.

Cette société s'est constituée en une ASBL qui tend à représenter l'ensemble des professeurs de mathématique de la partie francophone du pays. Elle rassemble en effet des enseignants de tous les réseaux (officiel, libre, communal et provincial) et de tous les niveaux d'enseignement (instituteurs, AESI, AESS, professeurs de Haute École ou d'Université).

Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des chercheurs participent régulièrement à ses activités. Regroupant ainsi différentes forces de l'enseignement de la mathématique, la SBPMef peut s'affirmer comme un représentant privilégié des professeurs de mathématique auprès du (ou des) Ministère(s) qui ont en charge l'Éducation, la Recherche et la Formation dans notre Communauté française de Belgique ainsi qu'auprès de divers organismes concernés par l'enseignement des mathématiques. Elle peut ainsi promouvoir, et le cas échéant, défendre valablement sa conception d'un enseignement assurant une large place au développement des capacités créatrices des élèves.

Le nombre de membres de la SBPMef oscille autour de 600, tous professeurs de mathématique en Communauté française de Belgique. Son conseil d'administration comprend 24 membres élus qui se partagent l'organisation des activités principales de la Société.

La SBPMef a participé à la création de la *Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs* (la CAPP) en Communauté française de Belgique. Elle tient également sa place au niveau de la Communauté mathématique internationale ; elle est membre fondateur de la *Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques* (la FEAPM) et de la récente Fédération francophone des associations pour l'enseignement des mathématiques (FFAEM). Elle est aussi membre du Comité international des Jeux mathématiques (CIJM).

Mentionnons un important travail de publication : des revues périodiques et d'autres plus ponctuelles, notamment des dossiers d'exploration didactique destinés à aider à la conception et à l'animation de l'enseignement de la mathématique.

La SBPMef est le maitre d'œuvre de plusieurs compétitions et organise la participation de nos élèves à plusieurs épreuves internationales. L'OMB, qui concerne, comme on l'a vu, environ 26 000 étudiants (éliminatoires dans les établissements, demi-finales régionales et finale communautaire) ne serait pas possible sans la participation bénévole d'équipes régionales particulièrement dynamiques. Nos meilleurs étudiants participent à l'Olympiade Mathématique

Internationale ainsi qu'à l'Olympiade du Benelux, mais également à l'EGMO pour les filles. Depuis 2004, la Société encourage la participation de classes de l'enseignement fondamental et du premier degré du secondaire au *Rallye Mathématique transalpin*.

Enfin, la Société organise chaque année un Congrès qui se réunit trois jours durant à la fin du mois d'aout alternativement dans des locaux de l'un de nos trois principaux réseaux d'enseignement : conférences, exposés, ateliers et expositions sont au menu.

Michel SEBILLE

RENSEIGNEMENTS PRATIQUES :

Siège administratif :	Campus de l'UMons, Bâtiment 4
	Avenue Maistriau 19
	7000 MONS
Téléphone & fax :	065.31.91.80
Courriel :	`sbpm@sbpm.be`
Adresse Internet :	`http://www.sbpm.be`

En consultant les pages de ce site, vous pourrez trouver tous les renseignements utiles concernant les activités et les publications de la SBPMef.

1.5 Conventions utilisées

Les notations chiffrées qui figurent en regard de chacune des questions permettent de déterminer s'il s'agit d'une question d'éliminatoire ou d'une question de demi-finale, le niveau concerné et le numéro de la question dans le questionnaire original.

- Ea : Éliminatoire de l'année a,
  Da : Demi-finale de l'année a ;
- Nq : Niveau miNi, question q,
  Dq : Niveau miDi, question q,
  Xq : Niveau maXi, question q.

EXEMPLE : Le cartouche

230
D15
N05

signifie que la 230^e^ question de ce recueil provient de la demi-finale 2015 de la miNi Olympiade : elle y est la question 05.

Chapitre 2

Éliminatoires et demi-finales miNi

2.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

N	15		16		17		18	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	1	14	24	37	50	61	77	90
2	2	184	25	196	51	210	217	91
3	107	15	189	38	203	62	78	92
4	177	115	26	133	52	63	218	93
5	108	230	27	39	204	64	176	94
6	3	116	28	40	140	65	79	95
7	4	16	125	236	205	152	219	96
8	109	17	190	134	141	211	159	224
9	110	231	29	135	53	153	80	97
10	5	185	30	197	54	212	81	98
11	6	117	191	41	55	66	82	168
12	111	186	126	136	56	154	160	99
13	178	18	192	42	142	213	220	100
14	179	19	127	137	206	155	83	169
15	180	118	31	43	57	156	161	239
16	7	119	193	138	143	214	84	101
17	228	187	128	198	58	157	85	170
18	112	120	32	44	144	67	221	102
19	181	121	33	45	207	158	222	171
20	8	20	194	199	145	68	86	103
21	9	21	129	46	208	69	162	172
22	229	122	195	200	146	70	87	104
23	10	232	175	201	147	71	88	173
24	113	123	130	47	59	215	163	225
25	11	22	34	202	209	216	89	105
26	12	233	131	48	148	72	164	226
27	182	23	235	139	149	73	223	240
28	114	188	35	237	150	74	165	174
29	183	234	132	49	60	75	166	227
30	13	124	36	238	151	76	167	106

2.2 Algèbre & arithmétique

001 E15 N01

Lequel de ces nombres est le plus grand ?

(A) -2015 (B) -1999 (C) -10 (D) -6 (E) -3

002 E15 N02

Lequel des cinq nombres ci-dessous faut-il écrire dans le cadre pour que l'égalité $3 \times (16 - \square \times 2) + 6 = 24$ soit correcte ?

(A) 13 (B) 12 (C) 10 (D) 7 (E) 5

003 E15 N06

$(1+3+5+7+\cdots+2015)-(2+4+6+\cdots+2014) =$

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 1007 ; (D) 1008 ; (E) 1009.

004 E15 N07

Sans réponse préformulée — Un bidule vaut deux trucs. Une chose vaut douze bidules. Un machin vaut cinq choses. Un bazar vaut trois machins. Combien de trucs vaut un bazar et demi ?

005 E15 N10

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit nombre naturel à trois chiffres dont la somme et le produit des chiffres valent tous deux 6 ?

006 E15 N11

Sans réponse préformulée — Le nombre $0{,}4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ est écrit sous forme de fraction irréductible. Quel est le numérateur de cette fraction ?

007 E15 N16

Soit trois nombres naturels a, b et c. Nous savons que $ab = 6$, $bc = 10$ et $ac = 15$; que vaut $a+b+c$?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

008 E15 N20

Sans réponse préformulée — Combien mesure, en centimètres, le plus grand côté d'un rectangle de périmètre 56 cm et d'aire 192 cm^2, sachant que les mesures en centimètres des deux côtés sont entières ?

009 E15 N21

Soit $N = 4^5 \cdot 5^{12}$; combien de chiffres comprend l'écriture décimale de N ?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

010
E15
N23

Un nombre naturel non nul n'a pas d'autre diviseur impair que 1 si et seulement s'il

(A) Est pair ;
(B) Est impair ;
(C) Est multiple de 3 ;
(D) N'est pas multiple de 3 ;
(E) Est une puissance de 2.

011
E15
N25

$(3+a)b$ est égal à $3+ab$ uniquement

(A) Lorsque $b = 0$;
(B) Lorsque $b \neq 1$;
(C) Lorsque $3+a = 0$;
(D) Lorsque $a = 1$;
(E) Lorsque $b = 1$.

012
E15
N26

Si $3a = 8b = 5c$, avec a, b, c strictement positifs, alors

(A) $c < a < b$;
(B) $b < c < a$;
(C) $b < a < c$;
(D) $a < b < c$;
(E) $a < c < b$.

013
E15
N30

Sans réponse préformulée — Si je dispose mes pions en un carré (plein) aussi grand que possible, il m'en reste 7. Si j'avais 6 pions de plus, je pourrais disposer sans reste l'ensemble de mes pions en un carré (plein) dont le côté aurait un pion de plus. Combien ai-je de pions ?

014
D15
N01

$-(2-3-4) =$

(A) -5 ; (B) -3 ; (C) 2 ; (D) 3 ; (E) 5.

015
D15
N03

Par quelle opération doit-on remplacer le symbole ▲ pour que l'égalité

$$\frac{12}{7} \blacktriangle \frac{21}{18} = 2$$

soit correcte ?

(A) Une addition
(B) Une soustraction
(C) Une multiplication
(D) Une division
(E) Aucune des quatre précédentes

016 D15 N07

$2015 \times 2016 - 2014 \times 2015 - 2 \times 2015 =$

(A) 2000 ; (B) 1000 ; (C) 2 ; (D) 1 ; (E) 0.

017 D15 N08

Soit g le plus grand entier positif à 4 chiffres distincts et p le plus petit. Que vaut $g - p$?

(A) 8999 (B) 8853 (C) 8765 (D) 8646 (E) 8642

018 D15 N13

Un rectangle est divisé en carrés de même taille : 5 carrés en longueur et 4 en largeur. La mesure du côté de ces petits carrés est un nombre entier. Un des nombres suivants ne peut pas être le périmètre du rectangle. Lequel ?

(A) 261 (B) 270 (C) 918 (D) 1782 (E) 2016

019 D15 N14

Sans réponse préformulée — Un nombre est diminué de 7 et la différence obtenue est multipliée par 7 pour donner 21. Quel est le nombre initial ?

020 D15 N20

Sans réponse préformulée — Dans une classe de 10 élèves, l'instituteur change les places chaque semaine, selon la règle suivante. L'élève en place 1 déménage vers la place numéro 4, ce que nous notons $1 \mapsto 4$; de même, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 6$, $4 \mapsto 5$, $5 \mapsto 2$, $6 \mapsto 7$, $7 \mapsto 9$, $8 \mapsto 3$, $9 \mapsto 10$ et $10 \mapsto 8$. Après combien de semaines les élèves occuperont-ils à nouveau et pour la première fois les mêmes places que la première semaine ?

021 D15 N21

Sans réponse préformulée — Que vaut $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)$ si $x = 10$, $y = 100$ et $z = 1000$?

022 D15 N25

Si $a^2 = a + 2$, alors $a^3 =$

(A) $2a + 4$; (B) $2a + 2$; (C) $4a$; (D) $a + 4$; (E) $3a + 2$.

023 D15 N27

Les nombres a, b, c, d et e, tous distincts, vérifient les égalités

$$a - 2c + e = 0, \quad b - 2c + d = 0, \quad c - 2d + e = 0.$$

Le plus petit et le plus grand de ces cinq nombres sont :

(A) a et b (B) a et e (C) b et d (D) d et e (E) Une autre paire

024 E16 N01

Quel est le carré du quart du tiers de 144 ?

(A) 3 (B) 144 (C) 1296 (D) 2304 (E) Une autre réponse

025 E16 N02

Quel est le plus petit des nombres suivants ?

(A) 1,1 (B) 1,0101 (C) 1,0001 (D) 1,0111 (E) 1,00101

026 E16 N04

Parmi les nombres suivants, lequel est multiple de 9 ?

(A) 23459 (B) 34216 (C) 45234 (D) 52813 (E) 65436

027 E16 N05

Par lequel des chiffres suivants un carré parfait *ne* peut-il *pas* se terminer ?

(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

028 E16 N06

Sans réponse préformulée — Quel nombre faut-il inscrire dans le cadre pour rendre correcte l'égalité suivante ?

$$\frac{7}{\square} = \frac{35}{20}$$

029 E16 N09

Sans réponse préformulée — Quel est le plus grand nombre premier à deux chiffres ?

030 E16 N10

6,3 : 0,09 =

(A) 0,7 (B) 6,21 (C) 7 (D) 70 (E) 700

031 E16 N15

Quel est le plus grand nombre impair divisant 2016 ?

(A) 3 (B) 7 (C) 9 (D) 63 (E) Un autre nombre

032 E16 N18

Quels que soient les nombres x et y, si $x > y$, alors il est toujours vrai que

(A) $-x < -y$; (B) $-x < y$; (C) $-x > y$; (D) $x > -y$; (E) $-x > -y$.

033
E16
N19

Par quel chiffre se termine l'écriture de 2016^{2017} ?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) Un autre chiffre

034
E16
N25

Sans réponse préformulée — Un nombre de trois chiffres est multiple de 2, de 3 et de 7. De plus, son premier chiffre et son dernier sont identiques. Quel est ce nombre ?

035
E16
N28

Quel est le 2016e chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de $\frac{3}{7}$?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 7

036
E16
N30

De combien de manières 60 peut-il s'écrire comme somme de deux nombres premiers ? (Deux sommes qui ne diffèrent que par l'ordre des termes sont considérées comme identiques.)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 6

037
D16
N01

J'écris 1 sur chaque case blanche d'un échiquier 8×8 et -1 sur chaque case noire. Que vaut le produit des 64 nombres écrits ?

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) Une autre valeur

038
D16
N03

Sans réponse préformulée — Que vaut la somme de tous les multiples de 3 compris entre 17 et 76 ?

039
D16
N05

Sans réponse préformulée — Si $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + \cdots + (n-1) + n)^2$, que vaut n ?

040
D16
N06

La décomposition en facteurs premiers d'un nombre a est $2^3 \times 3 \times 5$. Parmi ces cinq nombres, lequel *n*'est *pas* diviseur de a ?

(A) 30 (B) 20 (C) 15 (D) 12 (E) 9

041
D16
N11

Trois nombres premiers p, q et r vérifient $p + q = r$ et $p < q$. Que vaut p ?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

042 D16 N13 *Sans réponse préformulée* — Quel est le chiffre des unités de 2^{2016} ?

043 D16 N15 De combien de manières peut-on écrire 35 comme somme d'au moins deux naturels consécutifs ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

044 D16 N18 Que faut-il ajouter au double de $n-4$ pour obtenir le double de $n+1$?

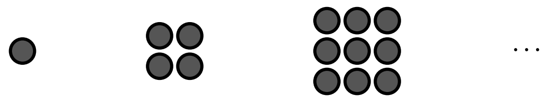
(A) 10 (B) $n-10$ (C) n (D) $n+2$ (E) $n+4$

045 D16 N19 *Sans réponse préformulée* — On multiplie tous les nombres impairs entre 216 et 2016. Quel sera le chiffre des unités du nombre ainsi obtenu ?

046 D16 N21 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre entier strictement positif k tel que $k \cdot 198$ soit un carré parfait ?

047 D16 N24 *Sans réponse préformulée* — Si $n = 125 \times 524 \times 8$, que vaut $n/2000$?

048 D16 N26 *Sans réponse préformulée* — Albert, toujours lui, dispose des jetons en carrés de la manière suivante :



Il construit le premier carré, puis le deuxième à côté du premier, puis le troisième à côté des deux premiers, et ainsi de suite. S'il dispose de 200 jetons, combien de figures entières pourra-t-il ainsi créer ?

049 D16 N29 *Sans réponse préformulée* — Combien de naturels non nuls inférieurs à 100 sont diviseurs de 2016 ?

050 E17 N01 Combien y a-t-il de zéros dans le résultat de la multiplication

$$125 \times 8000\ ?$$

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 100 000 (E) 1 000 000

051 E17 N02

$1{,}5 + 2{,}5 \times 4 - 2{,}5 =$

(A) 5,25 (B) 6 (C) 9 (D) 13,5 (E) 14

052 E17 N04

Un seul des nombres suivants est premier ; lequel ?

(A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

053 E17 N09

On écrit, en bloc et de manière répétée, toujours dans le même ordre, les cinq premières lettres de l'alphabet :

$$ABCDEABCDEABCDE\ldots$$

Quelle est la 2017$^{\text{e}}$ lettre qui sera écrite ?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

054 E17 N10

La somme de trois nombres naturels consécutifs vaut 63. Que vaut leur produit ?

(A) 6840 (B) 7980 (C) 9240 (D) 9261 (E) 10 626

055 E17 N11

Sans réponse préformulée — Si $11x + 7 = 100$, alors que vaut $22x - 7$?

056 E17 N12

Parmi les nombres suivants, un seul est multiple de 15 mais non multiple de 18. Lequel ?

(A) 450 (B) 540 (C) 990 (D) 1530 (E) 1950

057 E17 N15

Sans réponse préformulée — À l'olympiade mathématique intersidérale, la moitié des participants sont médaillés, d'or, d'argent ou de bronze. Il y a deux fois plus de médaillés de bronze que de médaillés d'argent et deux fois plus de médaillés d'argent que de médaillés d'or. Si, en 2017, il y a 686 participants, combien se verront attribuer une médaille d'or ?

058 E17 N17

Que vaut la somme de tous les chiffres du nombre $2^{13} \times 5^{8}$?

(A) 5 (B) 6 (C) 10 (D) 19 (E) 32

059 E17 N24 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre naturel divisible par 7 et par 17 dont le reste de la division par 3 vaut 1 ?

060 E17 N29 Mère-Grand adore les devinettes. Lorsqu'on lui demande son âge, elle répond cette année :
« L'an prochain, mon âge sera divisible par 2 ; dans 2 ans, mon âge sera divisible par 3 ; dans 3 ans, mon âge sera divisible par 4 ; dans 4 ans, mon âge sera divisible par 5 ; et j'ai moins de 97 ans ! »
Quel est l'âge de Mère-Grand, en années ?

(A) 57 (B) 58 (C) 59 (D) 61 (E) 91

061 D17 N01 *Sans réponse préformulée* — Que vaut $1111 - 999$?

062 D17 N03 *Sans réponse préformulée* — Deux nombres ont pour somme 134. Le plus petit des deux est -67. Quel est l'autre ?

063 D17 N04 *Sans réponse préformulée* — Combien de diviseurs naturels admet le nombre 72 ?

064 D17 N05 $(-2)^2 + 2^0 - 2^1 + 2^7 =$

(A) 67 (B) 123 (C) 131 (D) 256 (E) 4034

065 D17 N06 *Sans réponse préformulée* — Si $2M + N = 23$ et $N = 7$, que vaut M ?

066 D17 N11 La somme de 8 888 888 888 et 3 333 333 333, deux nombres formés chacun de dix chiffres, est l'un des nombres à onze chiffres suivants. Lequel ?

(A) 11 111 111 111
(B) 11 111 222 221
(C) 11 222 222 221
(D) 12 222 222 221
(E) 22 222 222 221

067 D17 N18

Sans réponse préformulée — Une horloge sonne un coup au quart d'heure, deux coups à la demie, trois coups à l'heure moins le quart et, à l'heure, quatre coups, puis, après une petite interruption, autant de coups qu'il y a d'heures (de 1 à 12). Combien de coups sonne-t-elle par journée de 24 heures ?

068 D17 N20

Si $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, quelle est la valeur de c lorsque $a = \frac{15}{2}$ et $b = \frac{25}{2}$?

(A) $\frac{4}{75}$ (B) $\frac{4}{73}$ (C) $\frac{73}{4}$ (D) $\frac{75}{4}$ (E) 20

069 D17 N21

Quel est le chiffre des unités de $2^{2017} + 2017^2$?

(A) 9 (B) 7 (C) 5 (D) 3 (E) 1

070 D17 N22

Si deux termes sont supprimés de l'addition

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12},$$

la somme de la nouvelle addition vaut 1. Quels sont ces deux termes ?

(A) $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{12}$

071 D17 N23

Pour faire une soupe, Claude ajoute un litre (c.-à-d. un kilo) d'eau à un kilo de légumes constitués à 80 % d'eau. La cuisson du mélange fait s'évaporer 5/9 de l'eau totale. Quel est, après cette cuisson, le pourcentage d'eau dans la soupe ?

(A) 90 (B) 80 (C) 70 (D) 60 (E) 50

072 D17 N26

Roger Atosthène se trouve devant un tableau sur lequel sont inscrits les nombres de 2 à 100. Un seul type d'action lui est proposé : effacer tous les multiples d'un nombre naturel n qui figure au tableau, à l'exception de n lui-même. Par exemple, face au tableau initial, puisque 15 est présent, une action permise est d'effacer les nombres 30, 45, 60, 75 et 90. Combien d'actions au minimum sont nécessaires afin qu'il n'y ait plus que des nombres premiers inscrits au tableau ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 13
(E) Ce but est impossible à atteindre.

073 D17 N27

Sans réponse préformulée — Bruxelles et Paris sont reliées par une voie ferrée double de 300 km. Un train part de Bruxelles en direction de Paris à une vitesse de 200 km/h. Au même moment, un train de marchandises part de Paris en direction de Bruxelles à une vitesse de 50 km/h. Au bout de combien de minutes se croiseront-ils ?

074 D17 N28

Sans réponse préformulée — Si $9^3 \cdot 81^5 = 9^n$, que vaut n ?

075 D17 N29

Sans réponse préformulée — Lise a dix cartons numérotés alignés devant elle. Ils sont disposés dans cet ordre, de gauche à droite :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Elle veut les ranger par ordre croissant, toujours de gauche à droite. Le seul mouvement dont elle dispose consiste à échanger la place de deux cartons. Combien de mouvements au minimum lui sont nécessaires pour parvenir au rangement souhaité ?

076 D17 N30

Si x et y sont des nombres naturels tels que $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 0{,}95$, que vaut $x + y$?

(A) 95 (B) 19 (C) 12 (D) 10 (E) Une autre valeur

077 E18 N01

$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{5}{4}$

078 E18 N03

Sans réponse préformulée — Un type de car peut transporter 62 personnes assises (en plus du chauffeur). Si une école de 692 élèves et 35 de leurs professeurs doivent partir en excursion, combien faudra-t-il de cars de ce type, au minimum, pour que tous aient une place assise ?

079 E18 N06

Sans réponse préformulée — La somme des chiffres de 2018 est divisible par 11. Combien d'années faudra-t-il attendre pour que cela se reproduise pour la première fois ?

080 E18 N09

Pierre et Paul fêtent ensemble leurs anniversaires au restaurant avec quelques amis. S'ils divisent l'addition entre tous, la part de chacun est de 30 €. Mais à la fin du diner, les amis insistent pour que Pierre et Paul ne paient pas ; chacun des autres paie alors 40 €. Combien de personnes étaient présentes à ce repas, en plus de Pierre et de Paul ?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 30 (E) 40

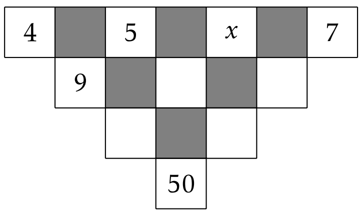
081 E18 N10

Quel est le double de $2{,}3 \times 10^4$?

(A) $4{,}6 \times 10^4$
(B) $2{,}3 \times 10^8$
(C) $4{,}6 \times 10^8$
(D) $2{,}3 \times 20^4$
(E) $4{,}6 \times 20^4$

082 E18 N11

Dans le tableau ci-dessous, un nombre dans une case blanche est la somme des nombres situés dans les deux cases blanches les plus proches de la rangée précédente (au-dessus) ; par exemple, le 9 est la somme de 4 et de 5. Que vaut x ?



(A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 10

083 E18 N14

Si m et n désignent des nombres naturels impairs, alors, parmi les nombres suivants, lequel est forcément impair ?

(A) $m+n$ (B) $m-n$ (C) $m \cdot n$ (D) $3m+7n$
(E) Aucun des précédents

084 E18 N16

Que vaut $ab-(a+b)$ si $a=7$ et $b=11$?

(A) 715 (B) 693 (C) 634 (D) 81 (E) 59

085 E18 N17

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit nombre naturel non nul divisible par 8, 12 et 30 ?

086 E18 N20

Quel est l'encadrement correct de la fraction $\frac{3}{7}$?

(A) $\frac{1}{4} < \frac{3}{7} < \frac{1}{3}$
(B) $\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{2}{5}$
(C) $\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$
(D) $\frac{1}{2} < \frac{3}{7} < \frac{3}{5}$
(E) $\frac{3}{5} < \frac{3}{7} < \frac{2}{3}$

087 E18 N22

Dans l'écriture $17{,}3\overline{765}$, la partie surlignée indique la partie périodique de 17,3765765765… Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand ?

(A) $17{,}3765$
(B) $17{,}376\overline{5}$
(C) $17{,}37\overline{65}$
(D) $17{,}3\overline{765}$
(E) $17{,}\overline{3765}$

088 E18 N23

Quel est le pourcentage d'une réduction unique qui équivaut à des réductions successives de 10 % et de 20 % ?

(A) 30 % (B) 28 % (C) 25 % (D) 24 % (E) 15 %

089 E18 N25

Si p est un diviseur premier de 240, alors forcément

(A) p divise 30 ;
(B) p divise 48 ;
(C) p divise 75 ;
(D) p divise 80.
(E) Aucune des réponses précédentes

090 D18 N01

$8^1 : 1^8 =$

(A) 1 ; (B) 8 ; (C) 18 ; (D) $\frac{1}{8}$. (E) Une autre réponse

091 D18 N02

Un nombre de quatre chiffres est tel que :
•Son dernier chiffre (celui des unités) est la moitié de son troisième chiffre ;
•Son troisième chiffre est la moitié de son deuxième ;
•Son deuxième chiffre est la moitié de son premier ;
•La somme de ses quatre chiffres est 15.
Quel est ce nombre ?

(A) 1248 (B) 1842 (C) 2148 (D) 8412 (E) 8421

092 D18 N03

Les nombres a, b, c, d et e vérifient les équations :

$$a \cdot 2c \cdot e = 1, \quad b \cdot 2c \cdot d = 1, \quad c \cdot 2d \cdot e = 1.$$

Laquelle des égalités suivantes s'en déduit ?

(A) $a = b$ (B) $a = e$ (C) $b = d$ (D) $b = e$ (E) $d = e$

093 D18 N04

Les âges de trois amis sont trois nombres entiers impairs consécutifs. Si a désigne l'âge du plus jeune d'entre eux, de quelle manière s'exprime la somme de leurs âges ?

(A) $a(a+1)(a+2)$ (B) $3(a+2)$ (C) $3(a+1)$ (D) $3(a+1)+1$
(E) Aucune des réponses précédentes

094 D18 N05

Une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 15 % équivaut à

(A) Une baisse de 6,5 % ;
(B) Une baisse de 5,5 % ;
(C) Une baisse de 5 % ;
(D) Une baisse de 4,5 % ;
(E) Une baisse de 2,5 %.

095 D18 N06

Si $4x + 4 = y^2$, alors $x =$

(A) $\dfrac{y^2}{4} - 4$; (B) $y^2 - 8$; (C) $y^2 - 4$; (D) $\dfrac{(y-2)(y+2)}{4}$; (E) $\dfrac{y^2+4}{4}$.

096 D18 N07

Sans réponse préformulée — Combien y a-t-il de nombres carrés parfaits strictement compris entre 5^4 et 4^5 ?

097 D18 N09

Sans réponse préformulée — Quel nombre donne le même résultat s'il est multiplié par $\frac{999}{998}$ ou si $\frac{999}{998}$ lui est ajouté ?

098 D18 N10

Dans la frise illimitée vers la droite

$\odot$ ♣ $\triangle$ ● ♡ $\odot$ ♣ $\triangle$ ● ♡ $\odot$ ♣ $\triangle$ ● ...

les cinq mêmes figures sont répétées indéfiniment, toujours dans le même ordre. Quelle est la 2018ᵉ figure de cette frise ?

(A) $\odot$ (B) ♣ (C) $\triangle$ (D) ● (E) ♡

099 D18 N12

$(1 + a^2)(1 - a^3) =$

(A) $1 + a^2 - a^3 - a^6$
(B) $1 + a^2 - a^3 + a^6$
(C) $1 + a^2 - a^3 - a^5$
(D) $1 + a^2 - a^3$
(E) $1 - a^6$

100 D18 N13

Sans réponse préformulée — Si 1 est solution de l'équation $x^2 - mx + 6 = 0$, d'inconnue x, que vaut le paramètre m ?

101 D18 N16

Sans réponse préformulée — La somme de deux nombres naturels est 11. Quelle est la valeur maximale de leur produit ?

102 D18 N18

Si $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, alors $x =$

(A) $\frac{1}{10}$; (B) $\frac{1}{7}$; (C) $\frac{7}{10}$; (D) $\frac{10}{7}$; (E) 7.

103 D18 N20

Sans réponse préformulée — Un nombre premier p est dit *nombre premier de Sophie Germain* lorsque $2p+1$ est également premier. Quel est le 5e nombre premier de Sophie Germain ?

104 D18 N22

Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de couples (a,b) de naturels tels que $ab = 75$?

105 D18 N25

Un nombre *gentil* est un naturel strictement supérieur à 1 qui est le produit de tous ses diviseurs différents de lui-même. Quelle est la somme des cinq plus petits nombres gentils ?

(A) 53 (B) 55 (C) 60 (D) 65 (E) 66

106 D18 N30

$\frac{8^{16}+8^{16}}{2^{16}\times 4^{16}} =$

(A) 2 ; (B) 4 ; (C) 2^{16} ; (D) 4^{16} ; (E) 8^{16}.

2.3 Géométrie

107 E15 N03

Trois angles consécutifs d'un quadrilatère mesurent 70°, 75° et 80° ; quelle est la mesure du quatrième angle ?

(A) 135° (B) 130° (C) 90° (D) 85° (E) 65°

108 E15 N05

Les côtés d'un triangle ont comme longueurs 7, 8 et 12. Un triangle équilatéral a le même périmètre. Quelle est la longueur d'un de ses côtés ?

(A) 27 (B) 12 (C) 9 (D) 8 (E) 7

109 E15 N08

Un quadrilatère dont les deux diagonales sont perpendiculaires est nécessairement un :

(A) Losange ; (B) Carré ; (C) Rectangle ; (D) Parallélogramme.

(E) Aucune des réponses précédentes

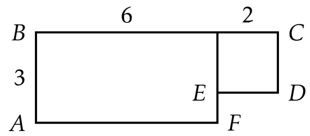
110 E15 N09

Parmi les arêtes d'un cube, combien est-il possible d'en sélectionner, au maximum, s'il faut que deux quelconques des arêtes choisies n'aient pas de point commun ?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12

111 E15 N12

L'hexagone $ABCDEF$ est formé par la juxtaposition d'un rectangle de côtés 6 et 3, et d'un carré de côté 2 ; quel est son périmètre ?



(A) 11 (B) 13 (C) 22

(D) Une autre valeur

(E) Les données ne sont pas suffisantes pour le calculer.

112 E15 N18

Soit PRT un triangle équilatéral et PTQ le triangle isocèle et rectangle en Q extérieur à PRT ; le triangle QTV est isocèle en Q et extérieur aux deux triangles précédents. L'angle $\widehat{TQV}$ vaut 30°. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{RTV}$?

(A) 75° (B) 135° (C) 150° (D) 160° (E) 180°

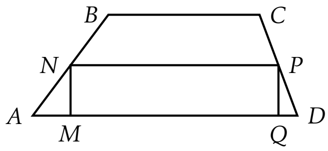
113 E15 N24

Six cercles sont centrés aux six sommets d'un hexagone régulier ; leurs rayons sont égaux au côté de cet hexagone. Combien de points du plan appartiennent à au moins deux de ces cercles ?

(A) 1 (B) 7 (C) 12 (D) 13 (E) 18

114
E15
N28

Soit $ABCD$ un trapèze et $MNPQ$ un rectangle ; les sommets M et Q sont sur la grande base $[AD]$ du trapèze ; les sommets N et P sont les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Si l'aire de ce rectangle est de 20 cm^2, quelle est, en centimètres carrés, l'aire du trapèze $ABCD$?



(A) 80 (B) 60 (C) 50 (D) 40
(E) Il manque des informations pour la déterminer.

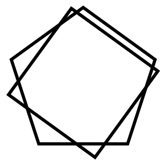
115
D15
N04

Quelle est la longueur de l'arête d'un cube dont le volume est de 27 dm^3 ?

(A) 3 cm (B) 27 cm (C) 30 cm (D) 300 cm (E) 3000 cm

116
D15
N06

La figure ci-contre est formée d'un pentagone régulier et d'un carré de même centre, dont un côté est parallèle à un côté du pentagone. Combien d'axes de symétrie possède cette figure ?



(A) 20 (B) 9 (C) 4 (D) 1 (E) 0

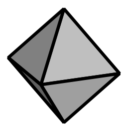
117
D15
N11

Une pyramide à base carrée possède une hauteur de 12 m et un volume de 100 m^3. Lequel des nombres suivants est le plus proche de la longueur du côté de sa base, exprimée en mètres ?

(A) 3 (B) 4,2 (C) 5 (D) 6,4 (E) 10

118
D15
N15

Dans un octaèdre régulier, de combien de manières peut-on choisir 8 arêtes formant une pyramide à base carrée ?



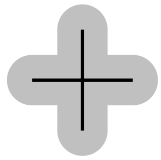
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

119
D15
N16

Sans réponse préformulée — Pascal possède une boite en forme de parallélépipède rectangle de dimensions intérieures 13 cm, 8 cm et 7 cm. Il dispose de nombreux cubes en bois, les uns de 2 cm d'arête, les autres d'1 cm d'arête. Pour remplir complètement la boite avec le moins possible de cubes, combien doit-il en placer ?

120 D15 N18

Un symbole « + » est formé de deux segments perpendiculaires de longueur 4 se coupant en leur milieu. Quelle est l'aire de la surface (ombrée dans la figure ci-contre) constituée par les points à distance au plus 1 de ce symbole ?



(A) $28+2\pi$ (B) $12+2\pi$ (C) $10+2\pi$ (D) $8+2\pi$ (E) 20

121 D15 N19

Le pourcentage d'une côte se calcule en divisant la dénivellation (en mètres) par la distance *horizontale* entre le pied de la côte et son sommet (en mètres également). Quel est l'angle que fait avec l'horizontale une côte à 100 % ?

(A) $0°$ (B) $1°$ (C) $45°$ (D) $90°$ (E) Une autre valeur

122 D15 N22

Sans réponse préformulée — Partant d'un sommet d'un tétraèdre régulier d'arête 1, un scarabée se balade sur ses arêtes et uniquement sur celles-ci. Quelle est la longueur du plus court circuit qui parcourt chaque arête au moins une fois et revient au point de départ ?

123 D15 N24

Sans réponse préformulée — Une figure est formée
— D'un hexagone régulier $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$;
— De ses trois grandes diagonales $[P_1P_4]$, $[P_2P_5]$ et $[P_3P_6]$;
— Des segments de perpendiculaires abaissés de P_1 sur P_2P_5, de P_2 sur P_3P_6, …, de P_6 sur P_1P_4.
Quel est le nombre d'axes de symétrie de cette figure ?

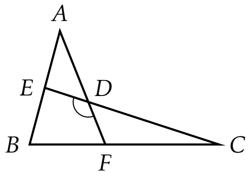
124 D15 N30

Soit ABC un triangle. Les points D et E appartiennent à $[AB]$ et les points F et G appartiennent à $[AC]$; de plus, $3|AD| = |AE| = 3|AF| = |AG|$. À quelle droite remarquable du triangle ABC l'intersection de DG et EF appartient-elle obligatoirement ?

(A) À la médiane issue de A
(B) À la bissectrice de l'angle $\hat{A}$
(C) À la hauteur issue de A
(D) À la médiatrice de $[BC]$
(E) À aucune de ces droites

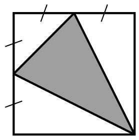
125 E16 N07

Sans réponse préformulée — Dans la configuration ci-contre, si $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{B} = 70°$ et $\widehat{C} = 20°$, quelle est, en degrés, l'amplitude de $\widehat{EDF}$?



126 E16 N12

Sans réponse préformulée — Si l'aire du carré est 16, quelle est celle du triangle ombré ?



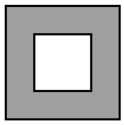
127 E16 N14

Parmi les polygones suivants, quel est celui qui *ne* permet *pas* de paver le plan par des copies isométriques ?

(A) Un triangle équilatéral
(B) Un rectangle non carré
(C) Un hexagone régulier
(D) Un octogone régulier
(E) Un parallélogramme dont un angle mesure 135°

128 E16 N17

Dans la figure ci-contre, l'aire de la zone ombrée vaut trois fois celle du carré central. Quel est le rapport du côté du grand carré à celui du petit ?



(A) 3/2 (B) 2 (C) 5/2 (D) 4 (E) Une autre valeur

129 E16 N21

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ d'un quadrilatère $ABCD$ sont perpendiculaires et mesurent 4 cm et 6 cm. Quelle est l'aire de ce quadrilatère ?

(A) 8 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 24 cm^2 (D) 48 cm^2 (E) Une autre réponse

130 E16 N24

Une piscine de forme rectangulaire est longue de 12 m et large de 5 m ; son fond descend en pente rectiligne depuis la petite profondeur de 1 m vers la grande profondeur de 2 m. Quelle est la capacité de cette piscine, en mètres cubes ?

(A) 40 (B) 60 (C) 70 (D) 90 (E) 120

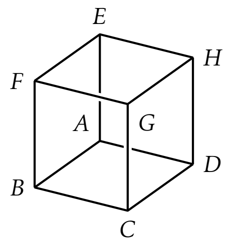
131 E16 N26

Dans un carré $ABCD$ est construit intérieurement le triangle équilatéral AMB. Quelle est l'amplitude de l'angle $\widehat{CMD}$?

(A) 120° (B) 130° (C) 135° (D) 140° (E) 150°

132 E16 N29

Dans le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre, que vaut l'angle $\widehat{EBG}$?



(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 70° (E) 90°

133 D16 N04

Le centre du cercle inscrit à un triangle

(A) Est le point d'intersection de ses médianes ;

(B) Est le point d'intersection de ses hauteurs ;

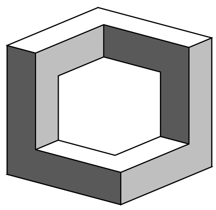
(C) Est le point d'intersection de ses médiatrices ;

(D) Est le point d'intersection de ses bissectrices.

(E) Aucune des réponses précédentes

134 D16 N08

Sans réponse préformulée — Le solide ci-contre est symétrique ; toutes ses faces sont en forme de **L**. Combien en a-t-il ?



135 D16 N09

Un tiers d'un vase est rempli d'eau. Une quantité d'eau égale aux deux tiers du volume libre restant est ajoutée. Au total, quelle part du volume du vase est alors remplie d'eau ?

(A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{7}{9}$ (E) 1

136 D16 N12

Le point P appartient à la droite d ; l'image P' du point P par la symétrie orthogonale d'axe m appartient encore à d

(A) Si, et uniquement si, m passe par P ;

(B) Si, et uniquement si, m et d sont perpendiculaires ;

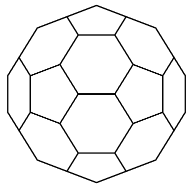
(C) Si, et uniquement si, m et d sont confondues ;

(D) Si, et uniquement si, m passe par P ou est perpendiculaire à d ;

(E) Si, et uniquement si, m et d sont perpendiculaires ou confondues.

137 D16 N14

Sans réponse préformulée — Un icosaèdre tronqué est un polyèdre en forme de ballon de football qui possède 32 faces : 20 sont des hexagones réguliers et 12 des pentagones réguliers. Combien ce solide a-t-il de sommets ?



138 D16 N16

Sans réponse préformulée — Un cube a un volume de 0,125 m^3 ; quelle est, en mètres, la somme des longueurs de ses arêtes ?

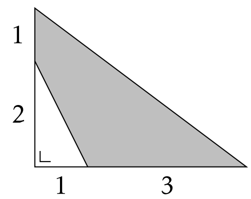
139 D16 N27

Dans le plan, quel est le plus grand nombre de points communs à deux hexagones réguliers convexes qui se coupent en un nombre fini de points ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 12

140 E17 N06

Quelle est l'aire du quadrilatère ombré ?

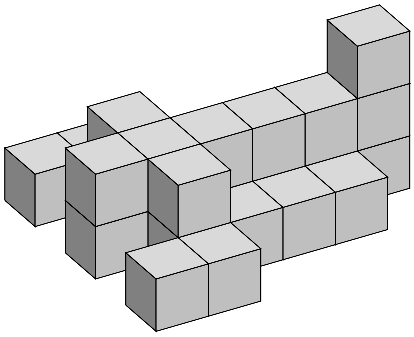


(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 10

141 E17 N08 Les points A, B et C ne sont pas alignés. De combien de parallélogrammes sont-ils des sommets ?

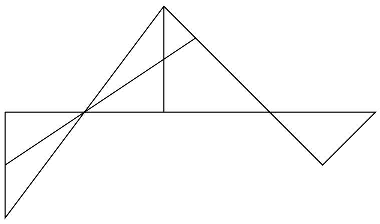
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

142 E17 N13 Combien de cubes composent ce solide sachant qu'il est rempli et symétrique ?



(A) 24 (B) 25 (C) 26 (D) 27 (E) 28

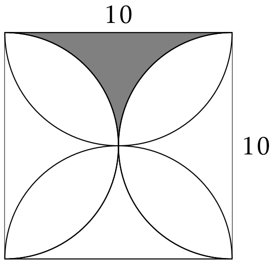
143 E17 N16 Combien y a-t-il de triangles dans la figure ci-dessous ?



(A) 7 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

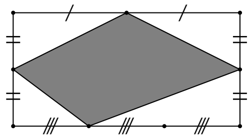
144 E17 N18 *Sans réponse préformulée* — A, B, C, D sont quatre points placés dans cet ordre sur une droite. Si $|AC| = 17$, $|BD| = 19$ et $|AD| = 23$, que vaut $|BC|$?

145 E17 N20 Quel est, à un dixième près, le périmètre de la région ombrée dans la figure ci-dessous ?



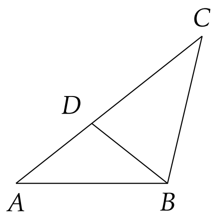
(A) 25,7 (B) 25,9 (C) 26,1 (D) 26,3 (E) 26,5

146 E17 N22 L'aire du rectangle ci-dessous vaut 396 cm^2. Que mesure, en centimètres carrés, l'aire du quadrilatère ombré ?



(A) 132 (B) 148 (C) 165 (D) 180 (E) 198

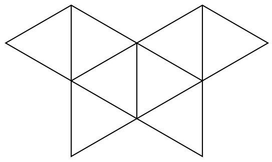
147 E17 N23 *Sans réponse préformulée* — Dans le triangle ABC, $|AB| = |BC|$ et $|AD| = |DB|$. De plus, $\widehat{BDC} = 74°$. Quelle est, en degrés, l'amplitude de $\widehat{DBC}$?



148 E17 N26 Le périmètre d'un rectangle est de 120 cm. Si on triple sa largeur, on obtient sa longueur augmentée de 4 cm. Quelle est, en centimètres, la longueur de ce rectangle ?

(A) 16 (B) 22 (C) 44 (D) 46 (E) 89

149 E17 N27 Combien de sommets possède le polyèdre convexe dont voici un développement ?

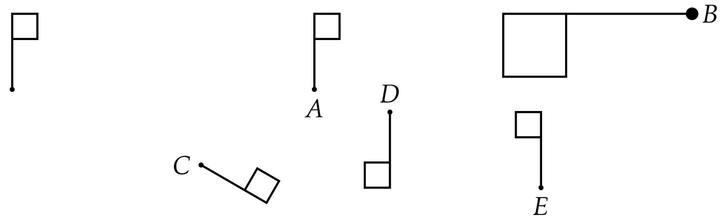


(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

150 E17 N28 L'aire du disque tangent aux quatre côtés d'un carré vaut 9π. Le périmètre de ce carré vaut

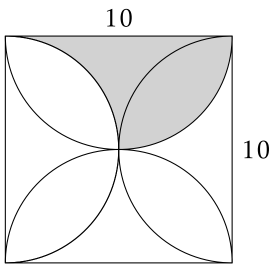
(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24 (E) 36

151 E17 N30 Lequel des drapeaux A, B, C, D, E est l'image du drapeau non étiqueté (situé à gauche) par une rotation ?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

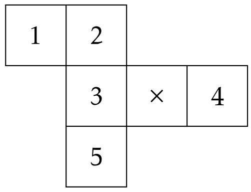
152 D17 N07 Quelle est l'aire de la région ombrée dans la figure suivante ?



(A) $\frac{25}{4}\pi$ (B) $\frac{25}{2}\pi$ (C) 25π (D) 50π (E) Une autre réponse

153 D17 N09

Sans réponse préformulée — Sur le développement (ou patron) de cube que voici, une face est marquée d'une croix ; quel chiffre est écrit sur la face opposée ?



154 D17 N12

Sans réponse préformulée — Soit XYZ un triangle et T le point de $[XY]$ tel que $|XT| = 2|TY|$. Si l'aire du triangle YTZ est de 103 cm^2, que vaut, en centimètres carrés, l'aire de XYZ ?

155 D17 N14

Sans réponse préformulée — Le triangle ABC est isocèle en A. Les points D sur $[AC]$ et E sur $[AB]$ sont tels que $\widehat{CBD} = \widehat{BCE} = \widehat{BAC}$. Si $\widehat{BAC}$ mesure 32°, que mesure $\widehat{BDE}$, en degrés ?

156 D17 N15

Un carré de côté 10 est agrandi en un carré de côté 12. En pourcentage, de combien l'aire du carré a-t-elle augmenté ?

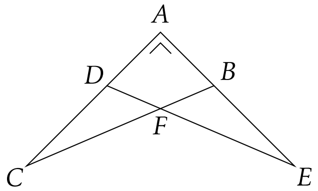
(A) De 20 % (B) De 40 % (C) De 44 % (D) De 50 %
(E) Une autre réponse

157 D17 N17

Deux droites AB et CD sont parallèles. Le triangle ACD est rectangle en C, $|CD| = 12$ et $|AC| = 9$. Quelle est l'aire du triangle BCD ?

(A) 54 (B) 56 (C) 106 (D) 108
(E) Les données sont insuffisantes.

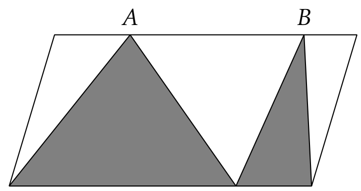
158 D17 N19 La figure ci-dessous est constituée de deux triangles rectangles : ABC, de côtés a, b et c, avec $a > b > c$, et ADE, isométrique à ABC. À quelle condition l'aire du quadrilatère $ADFB$ est-elle égale à la somme des aires des deux triangles CFD et BFE ?



(A) $c = \frac{2b}{3}$ (B) $c = \frac{b}{2}$ (C) $c = \frac{b}{3}$ (D) $c = \frac{b}{4}$ (E) $c = \frac{b}{5}$

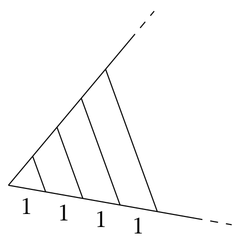
159 E18 N08 *Sans réponse préformulée* — La longueur des arêtes d'un cube est multipliée par 5. Par combien est multiplié son volume ?

160 E18 N12 L'aire du parallélogramme ci-dessous est 6. Que vaut l'aire ombrée ?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Elle dépend des positions de A et B.

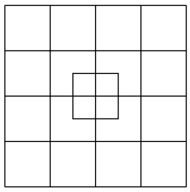
161 E18 N15 *Sans réponse préformulée* — À un triangle équilatéral de côté 1 sont accolés des trapèzes isocèles dont les côtés non parallèles sont de longueur 1, de manière à former des triangles équilatéraux emboités. Que mesure la grande base du trapèze dont l'aire vaut 21 fois celle du triangle initial ?



162 E18 N21 Si $ABCDEF$ est un hexagone régulier d'aire 60, que vaut l'aire du triangle ACF ?

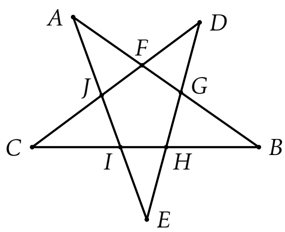
(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 30

163 E18 N24 Combien compte de carrés la figure suivante ?



(A) 18 (B) 20 (C) 22 (D) 31 (E) 35

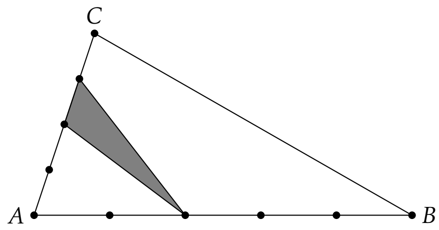
164 E18 N26 *Sans réponse préformulée* — Dans la figure imprécise suivante, l'angle $\widehat{AFD}$ mesure 94° et les angles $\widehat{CIJ}$ et $\widehat{CJI}$ mesurent 80°. Que mesure, en degrés, $\widehat{FGH} + \widehat{GHI}$?



165 E18 N28 Le trapèze $ABCD$ vérifie : $AB \parallel DC$, $|AB| = |AD|$ et $|DB| = |BC|$. Si l'angle $\widehat{DAB}$ mesure 110°, que mesure l'angle $\widehat{ABC}$?

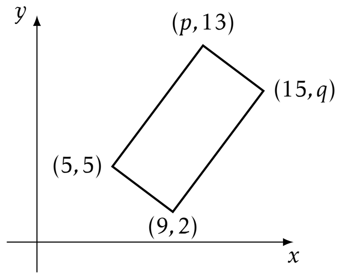
(A) 135° (B) 140° (C) 145° (D) 150° (E) Une autre réponse

166 E18 N29 Dans la figure suivante, les points partagent les côtés sur lesquels ils se trouvent en segments de mêmes longueurs. L'aire du triangle ABC est 180 ; quelle est celle du triangle gris ?



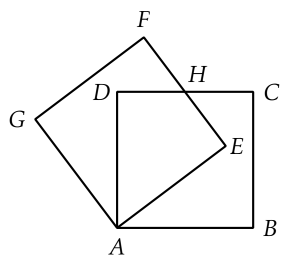
(A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36 (E) 45

167 E18 N30 La figure ci-dessous est un rectangle ; que vaut $p+q$?



(A) 17 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 22

168 D18 N11 *Sans réponse préformulée* — Dans la figure de droite, $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés dont les côtés sont de longueur 8 ; H est le milieu de $[CD]$ et de $[EF]$. Quelle est l'aire de l'hexagone $ABCHFG$?



169 D18 N14

Une droite ne coupe jamais un parallélogramme en :

(A) Deux triangles ;

(B) Deux parallélogrammes ;

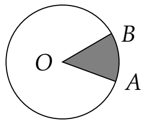
(C) Un triangle et un pentagone ;

(D) Deux trapèzes non parallélogrammes ;

(E) Un triangle et un parallélogramme.

170 D18 N17

Sans réponse préformulée — L'aire du secteur ombré représente 15 % de l'aire du disque de centre O. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{AOB}$?



171 D18 N19

Un triangle a ses trois sommets sur un demi-cercle de rayon r. Quelle est, au maximum, l'aire de ce triangle ?

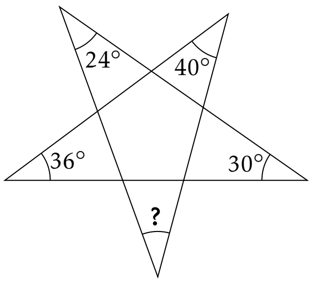
(A) $\frac{1}{2}r^2$ (B) r^2 (C) $\frac{\pi}{2}r^2$ (D) $2r^2$ (E) πr^2

172 D18 N21

Sans réponse préformulée — Outre les diagonales de ses faces, un cube a de grandes diagonales qui joignent deux sommets en passant par le centre du cube. Combien sont-elles ?

173 D18 N23

Sans réponse préformulée — Quatre des angles d'un pentagone étoilé mesurent 24°, 30°, 36° et 40°. Que mesure le cinquième, en degrés ?



174 D18 N28

Si un plan parallèle à une arête coupe un cube, la section est toujours

(A) Un carré ;

(B) Un rectangle ;

(C) Un hexagone ;

(D) Un parallélogramme qui n'est pas un rectangle ;

(E) Un trapèze qui n'est pas un parallélogramme.

2.4 Logique

175 E16 N23

Un tiroir contient 32 chaussettes éparses, appartenant à 16 paires ; les deux chaussettes d'une paire quelconque sont de la même couleur, qui diffère des couleurs des autres paires. Combien de chaussettes au minimum dois-je prendre, à l'aveuglette, dans le tiroir pour être certain d'avoir une paire de chaussettes de la même couleur ?

(A) 32 (B) 17 (C) 16 (D) 9 (E) 2

176 E18 N05

Une grille 3×3 est remplie par les nombres un, deux et trois écrits de trois manières : en chiffres indo-arabes, en chiffres romains et en faces de dés. Dans chaque ligne et dans chaque colonne se trouvent les trois valeurs et les trois écritures. Que contient la case centrale (grisée) ?

1		II
		⚀
⚁		

(A) 2 (B) 3 (C) ⚂ (D) I (E) III

2.5 Problèmes — Divers

177 E15 N04 Je veux visionner les six épisodes d'une série, qui durent chacun 48 minutes, en m'octroyant chaque fois une pause de 7 minutes entre deux épisodes. Combien de temps dois-je prévoir ?

- (A) 5 heures et 23 minutes
- (B) 5 heures et 30 minutes
- (C) 5 heures et 40 minutes
- (D) 5 heures et 50 minutes
- (E) 6 heures

178 E15 N13 Si mon argent de poche était triplé, je pourrais m'acheter exactement 12 chocolats de plus. Combien de chocolats puis-je acheter avec tout mon argent de poche ?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) Il manque une donnée

179 E15 N14 Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante : « Découpe dans ces plaques des carrés aussi grands que possible, tous identiques, dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de centimètres, de façon à ne pas avoir de pertes. ». Combien y aura-t-il de carrés par plaque ?

(A) 80 (B) 40 (C) 22 (D) 20 (E) 10

180 E15 N15 Quelle tablette de chocolat contient le plus de cacao ?

- (A) Une tablette de 200 g à 40 % de cacao
- (B) Une tablette de 150 g à 55 % de cacao
- (C) Une tablette de 100 g à 70 % de cacao
- (D) Une tablette de 120 g à 30 % de cacao
- (E) Une tablette de 50 g à 80 % de cacao

181 E15 N19 Charles possède trois fois autant d'argent que Brigitte. Mais si Charles donnait 115 € à Brigitte, ils auraient tous les deux le même montant. En euros, quel est l'avoir de Brigitte ?

(A) 115 (B) 230 (C) 345 (D) 690 (E) 1035

182 E15 N27 En 2003, lors de la fête d'anniversaire de Bernard, la somme des âges des convives vaut 1321. Douze ans plus tard, le même groupe se retrouve pour fêter l'anniversaire de Bernard, et la somme des âges vaut alors 1633. Combien y a-t-il de convives ?

(A) 8 (B) 12 (C) 13 (D) 26 (E) 52

183 E15 N29 *Sans réponse préformulée* — Marie-Caroline a cueilli 84 trèfles ; certains ont 3 feuilles, les autres 4 feuilles. Il y a en tout 258 feuilles. Combien y a-t-il de trèfles à 4 feuilles ?

184 D15 N02 *Sans réponse préformulée* — Dans la norme française, 3 pointures de chaussure correspondent à 2 cm de longueur de pied. Quelle est, en centimètres, la longueur du pied correspondant à une pointure 39 ?

185 D15 N10 *Sans réponse préformulée* — Marc veut payer 2160 € en utilisant uniquement des billets de 10 € et de 50 €. Il paye avec quatre fois plus de billets de 10 € que de billets de 50 €. Combien utilisera-t-il de billets de 50 € ?

186 D15 N12 Monsieur Pasdedétail, lorsqu'il interroge, n'attribue que trois notes : 0/20, 10/20 et 20/20. Dans une classe où 20 élèves ont été notés, 2 ont obtenu 0/20 et 12 ont obtenu 10/20. Que vaut la moyenne arithmétique des notes de ces 20 élèves ?

(A) 6/20 (B) 9/20 (C) 10/20 (D) 12/20 (E) 14/20

187 D15 N17 *Sans réponse préformulée* — Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à 200. Combien des numéros de page contiennent au moins un chiffre 7 ?

188 D15 N28 *Sans réponse préformulée* — Par temps neigeux, le train *Fyra* doit respecter la consigne de réduire sa vitesse habituelle de 40 %. S'il ne la réduit que de 25 %, sa vitesse est trop élevée par rapport à la vitesse imposée. De combien de pour cent ?

189 E16 N03 *Sans réponse préformulée* — Tous les billets pour les 250 places d'une salle de cinéma ont été vendus au prix unitaire de 8,50 €. Quelle aurait été, en euros, l'augmentation de la recette si le prix du billet avait été porté à 9,00 € ?

190 E16 N08 Un prix augmente de 20 % puis de 30 %. Quelle est la hausse globale ?

(A) 50 % (B) 54 % (C) 55 % (D) 56 % (E) 60 %

191 E16 N11 Une marchandise est soumise à une TVA de 21 %. Elle coute 133,10 € TVA comprise. Quel est son prix hors TVA ?

(A) 105,15 € (B) 110 € (C) 112,10 € (D) 154,10 € (E) $1{,}21 \times 133{,}10$ €

192 E16 N13 *Sans réponse préformulée* — Un troupeau de 275 moutons doit être embarqué dans un train, les bêtes étant réparties aussi également que possible entre les huit wagons de ce train. Combien y a-t-il de moutons dans un des wagons les plus remplis ?

193 E16 N16 Le bus A passe toutes les 10 min à la gare. Le bus B passe toutes les 20 min à la même gare et le bus C toutes les 35 min. Les trois bus quittent la gare à 9 h. Combien de temps faudra-t-il pour que les trois bus quittent à nouveau la gare ensemble pour la première fois ?

(A) 70 min (B) 140 min (C) 200 min (D) 350 min (E) 7000 min

194 E16 N20 Douze adultes et dix-huit enfants ont payé 420 € pour entrer au parc d'attractions. Le tarif enfant est la moitié du tarif adulte. Quel est, en euros, le prix de l'entrée pour un adulte ?

(A) 10 (B) 14 (C) 15 (D) 20 (E) 30

195 E16 N22

Pour le repas d'une fête familiale, il y a 65 ans, les arrière-grands-parents avaient fait des achats pour la somme de 1056 francs. Depuis lors, les prix ont été multipliés par 15 et l'euro, qui a remplacé le franc, vaut 40 francs. Combien payeraient, de nos jours, les arrière-petits-enfants pour les mêmes achats ?

(A) 1,76 € (B) 26,40 € (C) 30,36 € (D) 396 € (E) 15 840 €

196 D16 N02

Le prix d'un pantalon subit une augmentation de 15 % suivie d'une baisse de 15 %. Finalement, son prix

(A) Est resté inchangé ;
(B) A augmenté de 2,25 % ;
(C) A diminué de 2,25 % ;
(D) A augmenté de 3 % ;
(E) A diminué de 3 %.

197 D16 N10

Au jeu « Ça passe ou ça casse », on double ses gains à chaque bonne réponse et on perd tout à la première erreur. À la première réponse, si elle est exacte, on gagne 100 €. Il est permis d'arrêter pour repartir avec ses gains après chaque question. À combien de questions a répondu correctement un joueur qui a gagné 3200 € ?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 16 (E) 32

198 D16 N17

Sans réponse préformulée — Un professeur a acheté des billets de train pour les 27 élèves de sa classe, au prix total de 360 €. Si 6 élèves viennent s'ajouter, quel sera, en euros, le nouveau prix total, sachant que chacun des 33 billets coute le même prix unitaire ?

199 D16 N20

Dans une kermesse, Zébulon va au stand de tir à la carabine. Il achète cinq plombs. À chaque fois qu'il touche la cible, il en reçoit deux autres. S'il a en tout tiré 47 fois, et qu'il n'a alors plus aucun plomb, combien de fois a-t-il touché la cible ?

(A) 21 (B) 26 (C) 42 (D) 47 (E) 52

200 D16 N22

Si, dans une population, le nombre de femmes augmente de 10 % et que le nombre d'hommes diminue de 10 %, comment varie la population ?

(A) Elle baisse de 10 %.
(B) Elle ne diminue ni ne croît.
(C) Elle augmente de 10 %.
(D) Elle augmente d'un autre pourcentage (bien déterminé).
(E) Elle varie d'une manière que les données de la question ne permettent pas de déterminer.

201 D16 N23

Sans réponse préformulée — Un hectolitre de froment pèse 75 kg ; 100 kg de froment donnent 80 kg de farine, 4 kg de farine se transforment en 5 kg de pain et le pain vendu rapporte 0,80 €/kg à la boulangerie. Combien d'euros rapporte le pain obtenu à partir d'un demi mètre cube de froment ?

202 D16 N25

Albert a devant lui un certain nombre de tirelires et un certain nombre de pièces d'un euro. Il aurait 3 pièces de trop s'il en plaçait 5 par tirelire. Et il lui manque 5 pièces pour en placer 6 par tirelire. Combien a-t-il de pièces ?

(A) 8 (B) 27 (C) 43 (D) 54 (E) 55

203 E17 N03

Sans réponse préformulée — Bruno vend le quart de ses pommes ; il lui en reste 15. Combien avait-il de pommes ?

204 E17 N05

Ma note chez l'épicier s'élève à 15,37 €, mais le caissier a compté trois fois le même pamplemousse au prix unitaire de 0,80 € alors que je n'en ai pris qu'un seul. Après rectification, combien dois-je réellement payer ?

(A) 12,97 € (B) 13,77 € (C) 14,57 € (D) 16,97 €
(E) Un autre montant

205 E17 N07 Quentin travaille le week-end. Il a gagné 20 € de plus le dimanche que le samedi. Sur les deux jours, il a gagné 200 €. Combien d'euros a-t-il gagnés le samedi ?

(A) 1100 (B) 120 (C) 110 (D) 90 (E) 80

206 E17 N14 *Sans réponse préformulée* — Ali a choisi trois nombres dont la somme est 136. Le premier est 43. Le deuxième est le double du troisième. Que vaut le plus grand de ces trois nombres ?

207 E17 N19 *Sans réponse préformulée* — Un réservoir d'essence est rempli au sixième de sa capacité. Si on ajoute 2 litres à son contenu, il se trouve être rempli au quart de sa capacité. Quelle est, en litres, la capacité totale de ce réservoir ?

208 E17 N21 L'éliminatoire de l'olympiade mathématique syldave comporte 20 questions, chacune rapportant 9 points pour une réponse correcte, 3 points pour une abstention et 0 point pour une réponse fausse. Un des nombres suivants n'est jamais le score final d'un concurrent ; lequel ?

(A) 120 (B) 108 (C) 102 (D) 101 (E) 99

209 E17 N25 Le prix d'un produit dérivé du pétrole a augmenté de 60 % durant l'année 1973. Pour revenir à sa valeur initiale, ce prix devrait baisser de :

(A) 70 % (B) 62,5 % (C) 60 % (D) 40 % (E) 37,5 %

210 D17 N02 Une maison de 10 m × 10 m est construite sur un terrain rectangulaire de 20 m × 30 m. Quelle est, en mètres carrés, la superficie de la partie du terrain non occupée par la maison ?

(A) 100 (B) 200 (C) 450 (D) 500 (E) 560

211 D17 N08 *Sans réponse préformulée* — Marie possède 2 billes bleues, 3 rouges et 4 noires, numérotées dans cet ordre de 1 à 9. Elle observe l'un après l'autre tous les groupes de trois billes de couleurs différentes qu'elle peut former et note, pour chacun, la somme des nombres inscrits sur les billes. Quel est le plus grand des nombres qu'elle a notés ?

212 D17 N10 *Sans réponse préformulée* — Une camionnette transporte 20 caisses de deux masses et de deux couleurs : les rouges ont une masse de 28 kilos et les bleues de 16 kilos. Le chauffeur a pesé son chargement : il transporte une masse totale de 416 kilos. Combien y a-t-il de caisses bleues dans la camionnette ?

213 D17 N13 Aline a acheté une voiture neuve valant 16 000 €. La première année, ce modèle perd 30 % de sa valeur. La deuxième année, il perd 25 % de sa valeur de l'année précédente. Quelle sera la valeur de cette voiture au bout de 2 ans ?

(A) 12 000 € (B) 11 200 € (C) 8 800 € (D) 8 400 € (E) 7 200 €

214 D17 N16 *Sans réponse préformulée* — Dans un club sportif, un douzième des adhérents ont 15 ans ou moins et les trois quarts des autres ont 20 ans ou plus. Combien d'adhérents ont entre 16 et 19 ans si on sait qu'il y a 240 adhérents ?

215 D17 N24 Si la moyenne (arithmétique) des n nombres $1, 2, 3, \ldots, n$ vaut 50, que vaut la moyenne des $n+1$ nombres $1, 2, 3, \ldots, n, n+1$?

(A) 50,02 (B) 50,2 (C) 50,5 (D) 50,75 (E) 51

216 D17 N25 *Sans réponse préformulée* — Le lièvre court à la vitesse constante de 36 km/h durant 10 s, puis s'endort. Aussitôt la tortue démarre du même endroit que le lièvre et avance à la vitesse de 1 km en 2 h pour le rejoindre. Combien de temps, exprimé en minutes, dure la course de la tortue ?

217 E18 N02 Combien de lundis peut-il y avoir au maximum dans une période de 75 jours consécutifs ?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 15

218 E18 N04 Une salle de cinéma compte onze rangées de sièges, numérotées de 1 à 11. Les rangées dont le numéro est impair ont 15 sièges chacune, tandis que les rangées dont le numéro est pair ont 16 sièges chacune. Combien y a-t-il de sièges dans le cinéma ?

(A) 76 (B) 165 (C) 170 (D) 171 (E) 186

219 E18 N07 *Sans réponse préformulée* — Fred ouvre sa tirelire. Il y découvre 11,20 € en pièces de monnaie. Il y a le même nombre de pièces de 1 centime, de 5 centimes et de 10 centimes ; il n'y a pas de pièce d'une autre valeur. Combien y a-t-il de pièces de monnaie de chaque sorte ?

220 E18 N13 Sur une ligne de chemin de fer, la distance entre les villes A et B est de 70 km. Une ville C est située sur la ligne, entre A et B, à 40 km de A. Si un train, roulant à vitesse constante, est parti de A à 10 h 07 et arrivé en B à 10 h 49, à quelle heure est-il passé en C ?

(A) 10 h 21 (B) 10 h 24 (C) 10 h 27 (D) 10 h 31 (E) 10 h 35

221 E18 N18 *Sans réponse préformulée* — Le premier jour, il pleuvait ; le marchand de crème glacée a peu vendu. Le deuxième et le troisième jour, il a doublé chaque fois sa vente du jour précédent et, mieux encore, le quatrième jour et le cinquième jour il a chaque fois triplé la vente de la veille. Sa vente du 5^{e} jour étant de 396 glaces, combien a-t-il vendu de glaces sur les cinq jours ?

222 E18 N19 Bill change 600 dollars en euros au taux de 1,25 $ par euro. Ayant annulé son voyage, il reconvertit tous ces euros en dollars au nouveau taux de 1,20 $ par euro. Combien reçoit-il de dollars ?

(A) 576 (B) 600 (C) 625 (D) 630 (E) 720

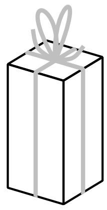
223 E18 N27 Audrey a aligné vingt pièces de 0,20 € sur une table. Bernard a alors remplacé une pièce sur quatre, à partir de la 4^{e}, par une pièce de 0,50 €. Ensuite, Charlotte a remplacé une pièce sur trois, à partir de la 3^{e}, par une pièce de 1 €. Finalement, David a remplacé une pièce sur six, à partir de la 6^{e}, par une pièce de 2 €. Quel est maintenant le montant total de la rangée de pièces de monnaie ?

(A) 10,5 € (B) 12,2 € (C) 13 € (D) 13,5 €
(E) Une autre réponse

224 D18 N08 *Sans réponse préformulée* — Un panneau publicitaire rectangulaire mesure 9 m sur 16 m. En son centre, une zone carrée est destinée à contenir une annonce. La bordure qui entoure cette zone doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m. Quelle est, au maximum, l'aire disponible pour l'annonce (en mètres carrés) ?

225 D18 N24 *Sans réponse préformulée* — Il y a eu, à ce concert, 350 entrées à 40 € et 150 entrées à 30 €. Quel prix unique (en euros) aurait permis d'obtenir la même recette ?

226 D18 N26 *Sans réponse préformulée* — Un cadeau en forme de prisme à base carrée est entouré, comme sur la figure ci-contre, d'un ruban de 68 cm, dont 20 cm pour le nœud de décoration. Sachant que la hauteur est le double du côté de la base, quel est, en centimètres cubes, le volume du cadeau ?



227 D18 N29 *Sans réponse préformulée* — Loubna a maintenant un sixième de l'âge de Chloé. Dans huit ans, elle aura la moitié de l'âge de Chloé. Quel âge a Chloé maintenant (en années) ?

2.6 Combinatoire & probabilités

228 E15 N17 *Sans réponse préformulée* — Dans une classe de 26 élèves, 18 étudient le latin, 16 étudient le grec et 10 étudient le latin et le grec. Combien d'élèves n'étudient ni le latin, ni le grec ?

229 E15 N22 *Sans réponse préformulée* — Un singe place au hasard 40 jetons dans 20 boites. Il met 1, 2 ou 3 jetons par boite (et ne laisse aucune boite vide). Combien de boites au maximum contiennent 3 jetons ?

230 D15 N05 *Sans réponse préformulée* — Un entier est dit *ascendant* si, à partir du deuxième, chacun de ses chiffres est strictement supérieur au chiffre situé à sa gauche. Combien de nombres ascendants sont compris entre 4000 et 5000 ?

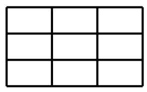
231 D15 N09 *Sans réponse préformulée* — Dans un auditoire qui compte 13 rangées de 20 sièges, quel est le plus grand nombre d'élèves que l'on peut asseoir en respectant les deux conditions suivantes :
— Si une rangée est occupée par au moins un élève, toute rangée voisine est complètement inoccupée ;
— Entre deux élèves assis à une même rangée il y a au moins deux sièges libres ?

232 D15 N23 *Sans réponse préformulée* — Dans un ensemble de n personnes, chacune possède un nombre entier d'euros compris entre 0 et 500 (inclus). Quelle est la plus petite valeur de n permettant d'être certain que deux personnes possèdent la même somme ?

233 D15 N26 *Sans réponse préformulée* — Une voiture est vendue avec 4 accessoires optionnels : chacun d'eux peut être inclus ou non. En combien de modèles cette voiture est-elle disponible ?

234 D15 N29 *Sans réponse préformulée* — Quatre cases alignées sont numérotées de 1 à 4, de gauche à droite. Elles doivent être colorées, l'une en bleu, une autre en jaune, une en rouge, et la dernière en vert, en respectant les règles suivantes :
— Si la case 1 est verte, alors la case 4 est rouge ;
— Si la case 2 est à côté de la case rouge, alors la case 4 est verte ;
— La case 3 est jaune.
Combien de coloriages conviennent ?

235 E16 N27 *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de rectangles dans la figure ci-contre ?

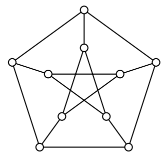


236 D16 N07 *Sans réponse préformulée* — Un nombre *ascendant* est un nombre naturel dont les chiffres vont strictement croissant de gauche à droite : par exemple, 124 (car $1 < 2 < 4$) ou 1259 (car $1 < 2 < 5 < 9$). Combien y a-t-il de nombres ascendants à deux chiffres ?

237 D16 N28 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre minimal de personnes qu'il faut réunir pour être certain qu'au moins 4 d'entre elles soient nées le même mois ?

238 D16 N30

Les sommets (les petits disques) du graphe ci-contre sont coloriés de telle sorte que deux sommets reliés par un segment ne soient jamais de la même couleur. De combien de couleurs a-t-on besoin au minimum ?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

239 D18 N15

Un dé parfaitement équilibré porte sur ses faces les nombres 1, 1, 1, 2, 3 et 3. Quelles sont les chances d'obtenir un nombre impair en jetant une fois ce dé ?

(A) 1 chance sur 6
(B) 1 chance sur 3
(C) 1 chance sur 2
(D) 2 chances sur 3
(E) 5 chances sur 6

240 D18 N27

Sans réponse préformulée — Arthur a, dans un grand bidon, 3 L de dégivrant pour lave-glace dilué à 10 %. Il dispose, par ailleurs, de dégivrant dilué à 80 % ; combien de litres doit-il en verser dans le grand bidon pour obtenir un mélange dilué à 50 % ?

2.7 Tableau des réponses

N	15		16		17		18	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	E	E	B	C	C	112	D	B
2	E	26	C	C	C	D	B	E
3	A	C	125	930	20	201	12	D
4	A	C	C	D	B	12	C	B
5	C	10	E	4	B	C	A	A
6	D	D	4	E	B	8	9	D
7	540	E	120	36	D	E	70	6
8	E	B	D	12	C	16	125	36
9	B	49	97	D	B	1	A	999
10	123	24	D	B	C	12	A	C
11	14	C	B	A	179	D	D	96
12	C	D	6	D	E	309	C	C
13	B	A	35	6	D	D	D	7
14	D	10	D	60	62	32	C	E
15	B	D	D	D	49	C	11	E
16	C	224	B	6	C	55	E	30
17	2	38	B	440	A	A	120	54
18	E	B	A	A	13	396	605	D
19	A	C	C	5	24	B	A	B
20	16	12	D	A	A	D	C	23
21	C	0	B	22	D	E	C	4
22	10	8	D	E	E	D	D	6
23	E	502	B	300	69	B	B	50
24	D	0	D	262	238	C	E	37
25	E	E	252	C	E	12	A	A
26	B	16	E	7	C	B	246	128
27	D	B	36	E	A	72	C	4
28	D	25	A	37	D	13	C	B
29	6	4	C	24	D	9	B	12
30	43	B	E	B	D	E	D	A

Chapitre 3

Éliminatoires et demi-finales miDi

3.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

D	15		16		17		18	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	241	254	265	277	446	302	457	327
2	338	468	358	368	290	390	316	412
3	242	255	359	278	291	303	317	462
4	426	256	360	279	292	391	318	413
5	339	350	437	280	379	304	400	328
6	340	257	438	442	380	305	319	414
7	341	469	266	475	447	306	320	415
8	342	258	439	281	381	452	401	416
9	243	351	267	282	382	453	458	329
10	343	431	440	369	293	307	321	417
11	244	259	268	283	294	308	459	463
12	245	470	425	370	295	392	402	418
13	344	471	269	284	296	393	322	464
14	246	260	270	443	383	309	403	330
15	247	432	441	478	448	310	404	419
16	427	261	361	371	384	454	460	331
17	248	472	271	285	449	394	405	420
18	249	352	362	372	385	311	323	465
19	250	262	473	286	450	395	477	332
20	345	433	363	373	386	312	406	421
21	428	434	272	374	387	396	324	466
22	251	353	273	375	297	455	325	467
23	429	435	364	444	298	397	407	422
24	252	263	474	376	299	479	461	333
25	346	436	365	287	476	398	408	334
26	430	354	274	377	388	313	409	423
27	347	355	275	445	451	399	410	335
28	348	264	366	288	389	314	326	424
29	349	356	276	378	300	315	480	336
30	253	357	367	289	301	456	411	337

3.2 Algèbre & arithmétique

241
E15
D01

Sans réponse préformulée — Un bidule vaut deux trucs. Une chose vaut douze bidules. Un machin vaut cinq choses. Un bazar vaut trois machins. Combien de trucs vaut un bazar et demi ?

242
E15
D03

$\left(-2\sqrt{2}\right)^5 =$

(A) 1024 (B) $128\sqrt{2}$ (C) $-32\sqrt{2}$ (D) $-128\sqrt{2}$ (E) -1024

243
E15
D09

L'illusionniste à un spectateur : « Pensez un nombre n, ajoutez 5, multipliez par 2, ajoutez 30, divisez par 2, retirez n. J'écris la réponse au dos de cette ardoise, donnez à présent la vôtre ! ». Le spectateur : « 20 » ; l'illusionniste retourne l'ardoise vers la salle : il y a écrit « 20 ». Sur quelle formule repose ce tour ?

(A) $n+5\times 2+\frac{30}{2}-n=20$

(B) $(n+5)\times 2+\frac{30}{2}-n=20$

(C) $((n+5)\times 2+30)/2-n=20$

(D) $\dfrac{n+5\times 2+30}{2}=20$

(E) $n+\dfrac{5\times 2+3}{2}-n=20$

244
E15
D11

$\dfrac{1+2+3+\cdots+2015}{1+2+3+\cdots+2014}=$

(A) 1 ; (B) 2015 ; (C) $\dfrac{2015}{2014}$; (D) $\dfrac{2016}{2015}$; (E) $\dfrac{1008}{1007}$.

245
E15
D12

Lorsque n est divisé par 6, le reste est 5. Quel est le reste de la division de $3n$ par 6 ?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 15

246
E 15
D 14

Si a est un nombre entier, le nombre $1 + a + a^2 + a^3$ est

(A) Toujours pair ;

(B) Toujours impair ;

(C) Pair si a est pair et impair si a est impair ;

(D) Impair si a est pair et pair si a est impair.

(E) Aucune des réponses précédentes

247
E 15
D 15

Soit trois nombres naturels a, b et c. Nous savons que $ab = 48$, $bc = 54$ et $ac = 72$; que vaut $a + b + c$?

(A) 6 (B) 12 (C) 19 (D) 23 (E) 36

248
E 15
D 17

Quel que soit le réel x, si $-2 < x < 1$, alors :

(A) $0 < x^2 < 1$;

(B) $0 \leqslant x^2 < 4$;

(C) $1 < x^2 < 4$;

(D) $1 \leqslant x^2 < 4$;

(E) $-4 < x^2 < 1$.

249
E 15
D 18

Un nombre naturel non nul n'a pas d'autre diviseur impair que 1 si et seulement s'il

(A) Est pair ;

(B) Est impair ;

(C) Est multiple de 3 ;

(D) N'est pas multiple de 3 ;

(E) Est une puissance de 2.

250
E 15
D 19

Sans réponse préformulée — Le double du carré d'un nombre entier est inférieur de 7 unités à 15 fois ce nombre. Quel est ce nombre ?

251 E15 D22

Si $k = \sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}}$, alors

(A) $k = 2$;
(B) $k = 3$;
(C) $k = \sqrt{6} + \sqrt{7} + 2$;
(D) k est négatif ;
(E) k n'est pas un réel.

252 E15 D24

Combien y a-t-il de couples de naturels dont le produit égale le double de la somme ?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) Une infinité

253 E15 D30

Quelle est la somme des chiffres du nombre $10^{2015} - 2015$?

(A) 9 (B) 18 (C) 18 110 (D) 18 119 (E) 18 128

254 D15 D01

Par quelle opération doit-on remplacer le symbole ▲ pour que l'égalité

$$\frac{12}{7} \blacktriangle \frac{21}{18} = 2$$

soit correcte ?

(A) Une addition
(B) Une soustraction
(C) Une multiplication
(D) Une division
(E) Aucune des quatre précédentes

255 D15 D03

$2015 \times 2016 - 2014 \times 2015 - 2 \times 2015 =$

(A) 2000 ; (B) 1000 ; (C) 2 ; (D) 1 ; (E) 0.

256 D15 D04

Soit a, b, c, d, e des réels tels que $0 < a < b < c < 1 < d < e$. Laquelle des inégalités suivantes n'est pas vraie ?

(A) $\frac{ab}{c} < \frac{ad}{c}$ (B) $\frac{ac}{d} < \frac{ac}{b}$ (C) $\frac{ac}{b} < \frac{ad}{b}$ (D) $\frac{cd}{a} < \frac{de}{a}$ (E) $\frac{ae}{b} < \frac{ae}{c}$

257 D15 D06

Soit g le plus grand entier positif à 4 chiffres distincts et p le plus petit. Que vaut $g - p$?

(A) 8999 (B) 8853 (C) 8765 (D) 8646 (E) 8642

258 D15 D08 Un rectangle est divisé en carrés de même taille : 5 carrés en longueur et 4 en largeur. La mesure du côté de ces petits carrés est un nombre entier. Un des nombres suivants ne peut pas être le périmètre du rectangle. Lequel ?

(A) 261 (B) 270 (C) 918 (D) 1782 (E) 2016

259 D15 D11 *Sans réponse préformulée* — Dans une classe de 10 élèves, l'instituteur change les places chaque semaine, selon la règle suivante. L'élève en place 1 déménage vers la place numéro 4, ce que nous notons $1 \mapsto 4$; de même, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 6$, $4 \mapsto 5$, $5 \mapsto 2$, $6 \mapsto 7$, $7 \mapsto 9$, $8 \mapsto 3$, $9 \mapsto 10$ et $10 \mapsto 8$. Après combien de semaines les élèves occuperont-ils à nouveau et pour la première fois les mêmes places que la première semaine ?

260 D15 D14 Si $a^2 = a + 2$, alors $a^3 =$

(A) $2a + 4$; (B) $2a + 2$; (C) $4a$; (D) $a + 4$; (E) $3a + 2$.

261 D15 D16 Pour combien de valeurs du naturel n le nombre $n^2 - 40$ est-il un carré parfait ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Une infinité

262 D15 D19 Soit a, b et c trois réels distincts ; si $a + b = 2c$, alors $\dfrac{a}{a-c} + \dfrac{c}{b-c}$

(A) Vaut -4 ; (B) Vaut -2 ; (C) Vaut 1 ; (D) Vaut 2 ;
(E) Peut prendre plusieurs valeurs.

263 D15 D24 *Sans réponse préformulée* — Deux nombres naturels possèdent respectivement 4 et 5 diviseurs. Combien de diviseurs au minimum possède leur produit ?

264 D15 D28 Dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, quelle est la longueur de la plus longue liste de nombres distincts tels que chacun (sauf le dernier) divise le suivant ?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

265 E16 D01

$\sqrt{20^{16}} =$

(A) 10^8 ; (B) 20^4 ; (C) 10^{16} ; (D) $2^{16}5^8$; (E) Un autre réel.

266 E16 D07

Quels que soient les nombres x et y, si $x > y$, alors il est toujours vrai que

(A) $-x < -y$; (B) $-x < y$; (C) $-x > y$; (D) $x > -y$; (E) $-x > -y$.

267 E16 D09

Sans réponse préformulée — Combien le nombre 2016 admet-il de diviseurs naturels ?

268 E16 D11

Sans réponse préformulée — Que vaut $\dfrac{2000^2 - 16^2}{2 \times 2016}$?

269 E16 D13

Sans réponse préformulée — Un nombre de trois chiffres est multiple de 2, de 3 et de 7. De plus, son premier chiffre et son dernier sont identiques. Quel est ce nombre ?

270 E16 D14

$\dfrac{\left(10^{-3}\right)^2 \times 10^4}{10^5} =$

(A) 10^{-7} (B) 10^{-15} (C) 10^3 (D) 1 (E) 0

271 E16 D17

Quel est le 2016ᵉ chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de $\dfrac{3}{7}$?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 7

272 E16 D21

De combien de manières 60 peut-il s'écrire comme somme de deux nombres premiers ? (Deux sommes qui ne diffèrent que par l'ordre des termes sont considérées comme identiques.)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 6

273 E16 D22 Parmi les nombres suivants, un seul est la quatrième puissance d'un naturel. Lequel ?

(A) 268 435 453
(B) 268 435 454
(C) 268 435 456
(D) 268 435 457
(E) 268 435 458

274 E16 D26 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre premier divisant $2015^{2016} + 2017^{2016}$?

275 E16 D27 Soit a et b des nombres réels strictement positifs. Que vaut l'opposé de l'inverse de $a^{-1} + b^{-1}$?

(A) $-(a+b)$ (B) $-\dfrac{ab}{a+b}$ (C) $a+b$ (D) $\dfrac{ab}{a+b}$ (E) $-\dfrac{a+b}{ab}$

276 E16 D29 Quelle est la valeur maximale de $a(b+c) - b(a+c)$, si a, b et c sont des entiers distincts compris entre 1 et 16 (inclus) ?

(A) 196 (B) 224 (C) 225 (D) 226 (E) 256

277 D16 D01 J'écris 1 sur chaque case blanche d'un échiquier 8×8 et -1 sur chaque case noire. Que vaut le produit des 64 nombres écrits ?

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) Une autre valeur

278 D16 D03 Trois nombres premiers p, q et r vérifient $p + q = r$ et $p < q$. Que vaut p ?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

279 D16 D04 *Sans réponse préformulée* — Quel est le chiffre des unités de 2^{2016} ?

280 D16 D05 De combien de manières peut-on écrire 35 comme somme d'au moins deux naturels consécutifs ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

281 D16 D08 *Sans réponse préformulée* — Quel est le chiffre des unités de

$$3^{101}5^{102}7^{103} ?$$

282 D16 D09 *Sans réponse préformulée* — Combien de naturels non nuls inférieurs à 100 sont diviseurs de 2016 ?

283 D16 D11 *Sans réponse préformulée* — Pour tout naturel non nul n, la *factorielle* de n, notée $n!$, est le produit $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Si S est la somme $1! + 2! + 3! + \cdots + 2015! + 2016!$, quel est le chiffre des unités de S ?

284 D16 D13 Le nombre $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$

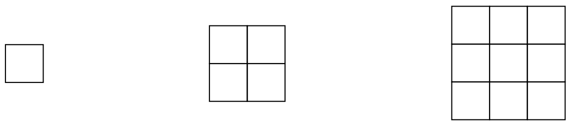
- (A) Est divisible par 7 ;
- (B) Est divisible par 8 ;
- (C) Est divisible par 11 ;
- (D) Est divisible par un nombre premier strictement compris entre 11 et 100 ;
- (E) Est premier.

285 D16 D17 Si p est un nombre premier impair, lequel des nombres suivants est nécessairement non premier ?

(A) $2p+1$ (B) $3p+2$ (C) p^2+1 (D) p^3+2 (E) $5p+4$

286 D16 D19 *Sans réponse préformulée* — Le reste de la division du naturel x par 9 est 5. Quel est le reste de la division de $3(3x+1)$ par 9 ?

287 D16 D25 *Sans réponse préformulée* — Un enfant construit des figures carrées de la manière suivante :



Pour la première figure, il utilise 4 allumettes, pour la deuxième 12 allumettes, ...Il construit la première figure, puis la deuxième figure à côté de la première, puis la troisième à côté des deux premières, etc. S'il dispose de 2016 allumettes, combien de figures entières pourra-t-il ainsi créer ?

288 D16 D28 Quelle est la somme des diviseurs naturels de 2016 ?

(A) 36 (B) 2064 (C) 2065 (D) 5032 (E) 6552

289 D16 D30 *Sans réponse préformulée* — Soit deux nombres premiers distincts p et q. Quel est le nombre de diviseurs premiers communs à $p^3 + pq + q^3$ et $pq(p+q)$?

290 E17 D02 Si $a \neq 0$, $\frac{a^3 - a^2}{a^2} =$

(A) a (B) 0 (C) a^2 (D) $\sqrt{a}$ (E) $a-1$

291 E17 D03 On écrit, en bloc et de manière répétée, toujours dans le même ordre, les cinq premières lettres de l'alphabet :

$$ABCDEABCDEABCDE\ldots$$

Quelle est la 2017e lettre qui sera écrite ?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

292 E17 D04 Laquelle des expressions suivantes représente le double du cube de l'opposé de 0,1 ?

(A) $(2 \cdot 0{,}1)^3$
(B) $2^3 \cdot (-0{,}1)$
(C) $(2 \cdot (-0{,}1))^3$
(D) $2 \cdot (-0{,}1)^3$
(E) $-2^3 \cdot (0{,}1)$

293 E17 D10 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre naturel divisible par 7 et par 17 dont le reste de la division par 3 vaut 1 ?

294 E17 D11 Lequel des nombres suivants est toujours divisible par 3, quel que soit le naturel n ?

(A) $n(n+1)(n+4)$
(B) $n(n+2)(n+4)$
(C) $n(n+2)(n+3)$
(D) $n(n+3)(n-3)$
(E) $(n+2)(n+3)(n+5)$

295
E17
D12

Dans un livre de physique, on apprend, au chapitre électricité, que lorsque deux résistances R_1 et R_2 sont couplées en parallèle, la résistance équivalente R se calcule à l'aide de la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Si chacune des résistances R_1 et R_2 augmente de 25 %, alors :

(A) R augmente de 25 % ;

(B) R diminue de 25 % ;

(C) R augmente de 20 % ;

(D) R diminue de 20 %.

(E) Aucune des réponses précédentes

296
E17
D13

Sans réponse préformulée — Si $x^2 + 5x + 6 = 20$, que vaut $3x^2 + 15x + 17$?

297
E17
D22

Un professeur calcule la moyenne arithmétique des notes de ses 100 élèves pour une interrogation notée sur 20 points. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

(A) Si 51 élèves ont obtenu des notes supérieures à 10, alors la moyenne est supérieure à 10.

(B) Si 50 élèves ont obtenu la note 19, alors la moyenne est supérieure à 10.

(C) Si la moyenne est supérieure à 10, alors les notes des élèves sont toutes supérieures à 10.

(D) Si les notes des élèves sont toutes supérieures à 10, alors la moyenne est supérieure à 10.

(E) Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

298 E17 D23 La proposition : « Pour tous réels a et b, $a < b \Rightarrow a^2 > b^2$. » est fausse. Par quoi suffit-il d'y remplacer le mot *réels* pour obtenir une proposition vraie ?

(A) Par *réels de même signe* ;
(B) Par *réels de signes opposés* ;
(C) Par *réels positifs* ;
(D) Par *réels strictement positifs* ;
(E) Par *réels négatifs*.

299 E17 D24 Quel est le produit de tous les diviseurs naturels de 144 ?

(A) 12^8 (B) 12^{10} (C) 12^{15} (D) 12^{16} (E) 12^{17}

300 E17 D29 Si $x^2 + y^2 = 42$ et $x + y = 8$, que vaut xy ?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

301 E17 D30 Soit r et s deux nombres entiers ; $\dfrac{6^{r+s} \cdot 12^{r-s}}{8^r \cdot 9^{r+2s}}$ est un nombre entier si

(A) $s \leqslant 0$; (B) $r \leqslant 0$; (C) $r \geqslant s$; (D) $r + s \leqslant 0$; (E) $r^2 + s^2 \geqslant 0$.

302 D17 D01 *Sans réponse préformulée* — Que vaut $1111 - 999$?

303 D17 D03 La somme de 8 888 888 888 et 3 333 333 333, deux nombres formés chacun de dix chiffres, est l'un des nombres à onze chiffres suivants. Lequel ?

(A) 11 111 111 111
(B) 11 111 222 221
(C) 11 222 222 221
(D) 12 222 222 221
(E) 22 222 222 221

304 D17 D05 *Sans réponse préformulée* — Une horloge sonne un coup au quart d'heure, deux coups à la demie, trois coups à l'heure moins le quart et, à l'heure, quatre coups, puis, après une petite interruption, autant de coups qu'il y a d'heures (de 1 à 12). Combien de coups sonne-t-elle par journée de 24 heures ?

305 D17 D06

Quel est le chiffre des unités de $2^{2017} + 2017^2$?

(A) 9 (B) 7 (C) 5 (D) 3 (E) 1

306 D17 D07

Pour faire une soupe, Claude ajoute un litre (c.-à-d. un kilo) d'eau à un kilo de légumes constitués à 80 % d'eau. La cuisson du mélange fait s'évaporer 5/9 de l'eau totale. Quel est, après cette cuisson, le pourcentage d'eau dans la soupe ?

(A) 90 (B) 80 (C) 70 (D) 60 (E) 50

307 D17 D10

Sans réponse préformulée — Un nombre naturel est *abondant* lorsque la somme de ses diviseurs propres lui est strictement supérieure. Par exemple, 12 est abondant car $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$. Quel est le plus petit nombre abondant strictement supérieur à 12 ?

308 D17 D11

Sans réponse préformulée — Bruxelles et Paris sont reliées par une voie ferrée double de 300 km. Un train part de Bruxelles en direction de Paris à une vitesse de 200 km/h. Au même moment, un train de marchandises part de Paris en direction de Bruxelles à une vitesse de 50 km/h. Au bout de combien de minutes se croiseront-ils ?

309 D17 D14

Si x et y sont des nombres naturels tels que $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 0{,}95$, que vaut $x + y$?

(A) 95 (B) 19 (C) 12 (D) 10 (E) Une autre valeur

310 D17 D15

Si $\dfrac{2^{x-3}}{8^{2y-3}} = 16^{x-y}$, que vaut $3x + 2y$?

(A) -12 (B) -6 (C) 0 (D) 6 (E) 12

311 D17 D18

Sans réponse préformulée — L'égalité

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$$

est vérifiée lorsque $n = 0$, mais aussi pour une seconde valeur de n : laquelle ?

312 D17 D20 *Sans réponse préformulée* — Les naturels a, b et c satisfont les conditions suivantes : $\text{pgcd}(a,b) \neq 1$, $\text{pgcd}(b,c) \neq 1$, $\text{pgcd}(c,a) \neq 1$ et $\text{pgcd}(a,b,c) = 1$. Quelle est la valeur minimale du produit $a \cdot b \cdot c$?

313 D17 D26 Quelle est la somme des chiffres du plus petit naturel non nul qui ne s'écrit qu'avec des 0 et des 1 et qui est divisible par 225 ?

(A) 1 (B) 6 (C) 9 (D) 11 (E) 18

314 D17 D28 *Sans réponse préformulée* — Si $S(n)$ désigne la somme et $P(n)$ le produit de tous les diviseurs positifs d'un naturel n, quelle est la valeur de $S(P(S(8)))$?

315 D17 D29 Si $A = 2^{100}$, $B = 3^{75}$ et $C = 5^{50}$, alors

(A) $A < B < C$;
(B) $A < C < B$;
(C) $B < A < C$;
(D) $C < A < B$;
(E) $C < B < A$.

316 E18 D02 *Sans réponse préformulée* — Un type de car peut transporter 62 personnes assises (en plus du chauffeur). Si une école de 692 élèves et 35 de leurs professeurs doivent partir en excursion, combien faudra-t-il de cars de ce type, au minimum, pour que tous aient une place assise ?

317 E18 D03 Parmi les nombres suivants, quel est celui qui peut être considéré comme une taille normale pour un participant à l'Olympiade de mathématiques ?

(A) $0{,}000\,017 \times 10^4$ cm
(B) $0{,}017 \times 10^5$ mm
(C) $170\,000 \times 10^{-7}$ m
(D) 170×10^{-3} m
(E) $1{,}7 \times 10^{-4}$ km

318 E18 D04 $2018^2 - 2016 \times 2020 =$

(A) 2018 (B) 4 (C) 2 (D) 1 (E) 0

319 E18 D06

Pierre et Paul fêtent ensemble leurs anniversaires au restaurant avec quelques amis. S'ils divisent l'addition entre tous, la part de chacun est de 30 €. Mais à la fin du diner, les amis insistent pour que Pierre et Paul ne paient pas ; chacun des autres paie alors 40 €. Combien de personnes étaient présentes à ce repas, en plus de Pierre et de Paul ?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 30 (E) 40

320 E18 D07

Si m et n désignent des nombres naturels pairs, quel nombre parmi les suivants n'est jamais pair ?

(A) m^n
(B) $5m^3 + 7n^2$
(C) $m^2 \cdot n^3$
(D) $3m + 7n$
(E) $(2m - 1)(7m - 5)$

321 E18 D10

Si p est un diviseur premier de 240, alors forcément

(A) p divise 30 ;
(B) p divise 48 ;
(C) p divise 75 ;
(D) p divise 80.
(E) Aucune des réponses précédentes

322 E18 D13

Parmi les nombres suivants, quel est celui qui *n*'est *pas* la somme de quatre nombres entiers consécutifs ?

(A) 425 398 (B) 429 562 (C) 496 244 (D) 876 534 (E) 926 322

323 E18 D18

La somme des carrés de trois nombres entiers consécutifs

(A) Est toujours divisible par 3 ;
(B) Est divisible par 3 si le plus petit des nombres est divisible par 3 ;
(C) Est divisible par 3 si le nombre moyen est divisible par 3 ;
(D) Est divisible par 3 si le plus grand des nombres est divisible par 3 ;
(E) N'est jamais divisible par 3.

324 E18 D21 *Sans réponse préformulée* — Pascal (qui vit seul) vide invariablement un tube de dentifrice en 72 jours et un flacon de shampoing en 60 jours ; il use un savon en 40 jours. Aujourd'hui 17 janvier, il entame un nouveau flacon de shampoing alors que son savon et son tube de dentifrice sont exactement à la moitié de leurs existences. Dans combien de jours devra-t-il, pour la première fois à venir, entamer simultanément un nouveau savon, un nouveau tube de dentifrice et un nouveau flacon de shampoing ?

325 E18 D22 Un nombre *palindrome* est un nombre qui est le même quel que soit le sens de lecture, par exemple $A = 20\,177\,102$. Quelle est la différence entre le plus petit nombre palindrome strictement supérieur à A et le plus grand nombre palindrome strictement inférieur à A ?

(A) 10 001 (B) 11 000 (C) 11 011 (D) 22 000 (E) 22 022

326 E18 D28 Si n est un nombre naturel, quelle est la valeur de

$$\frac{2^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+3}+2^{n+4}}{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}}\,?$$

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 32 (E) La valeur dépend de n.

327 D18 D01 Les nombres a, b, c, d et e vérifient les équations :

$$a\cdot 2c\cdot e=1,\quad b\cdot 2c\cdot d=1,\quad c\cdot 2d\cdot e=1.$$

Laquelle des égalités suivantes s'en déduit ?

(A) $a=b$ (B) $a=e$ (C) $b=d$ (D) $b=e$ (E) $d=e$

328 D18 D05 *Sans réponse préformulée* — Quel nombre donne le même résultat s'il est multiplié par $\frac{999}{998}$ ou si $\frac{999}{998}$ lui est ajouté ?

329 D18 D09 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand nombre entier qui divise tous les produits $n(n+2)(n+4)$ où n est un naturel pair non nul ?

330 D18 D14 $\sqrt{27}+\sqrt{12}=$

(A) $\sqrt{39}$; (B) $\sqrt{75}$; (C) $\sqrt{150}$; (D) $\sqrt{324}$.
(E) Aucune des réponses précédentes

331 D18 D16 $2^{2n+1}+4^{n+2}=$

(A) 6^{3n+3} (B) 4^{2n+3} (C) $9\times 2^{2n+1}$ (D) $5\times 2^{4n+6}$ (E) $5\times 4^{n+3}$

332 D18 D19 Que vaut a^2+b^2 si (a,b) est une solution du système suivant ?

$$\begin{cases} ab=5 \\ a^2b+ab^2+2a+2b=42 \end{cases}$$

(A) 26 (B) 36 (C) 37 (D) $\dfrac{1764}{25}$ (E) $\dfrac{1514}{25}$

333 D18 D24 Quel est le reste de la division euclidienne de $x^{19}+1$ par x^2-1 ?

(A) 0 (B) 1 (C) $x+1$ (D) $x-1$ (E) Une autre réponse

334 D18 D25 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de couples (x,y) de naturels tels que $x^2-y^2=1600$?

335 D18 D27 *Sans réponse préformulée* — Quelle est la plus grande valeur du naturel n pour laquelle $\dfrac{n^2-6n+9}{n+17}$ est un nombre entier ?

336 D18 D29 *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme des coefficients dans l'expression développée de $(a+b)^9$, si les coefficients 1 ne sont pas pris en compte ?

337 D18 D30

Le système

$$\begin{cases} cx + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

a une solution unique (x, y) qui se trouve dans le premier quadrant ouvert (c'est-à-dire la partie du plan déterminée par $x > 0$ et $y > 0$) si et seulement si

(A) $c = -1$ (B) $c > -1$ (C) $c < \frac{3}{2}$ (D) $0 < c < \frac{3}{2}$ (E) $-1 < c < \frac{3}{2}$

3.3 Géométrie

338 E15 D02

Parmi les arêtes d'un cube, combien est-il possible d'en sélectionner, au maximum, s'il faut que deux quelconques des arêtes choisies n'aient pas de point commun ?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12

339 E15 D05

Soit PRT un triangle équilatéral et PTQ le triangle isocèle et rectangle en Q extérieur à PRT ; le triangle QTV est isocèle en Q et extérieur aux deux triangles précédents. L'angle $\widehat{TQV}$ vaut 30°. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{RTV}$?

(A) 75° (B) 135° (C) 150° (D) 160° (E) 180°

340 E15 D06

Partant d'un sommet d'un tétraèdre d'arête 1, un scarabée se balade sur ses arêtes et uniquement sur celles-ci. Quelle est la longueur du plus court trajet qui parcourt chaque arête au moins une fois ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

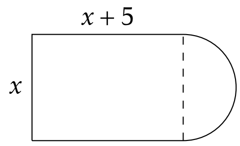
341 E15 D07

La diagonale d'un carré mesure 2 cm ; quelle est l'aire de ce carré ?

(A) 1 cm^2 (B) $\sqrt{2}$ cm^2 (C) 2 cm^2 (D) $2\sqrt{2}$ cm^2 (E) 4 cm^2

342 E15 D08

Quelle est l'expression littérale de l'aire de la figure ci-contre, formée d'un rectangle et d'un demi-cercle accolé à l'un de ses petits côtés ?



(A) $x^2 + 5x + \frac{\pi}{8}x^2$

(B) $x^2 + 5x + \frac{\pi}{4}x^2$

(C) $2x + 5 + \frac{\pi}{4}x^2$

(D) $x^2 + 5 + \pi x^2$

(E) Une autre expression

343 E15 D10

Sans réponse préformulée — Brad veut placer une échelle de 5 m sous la fenêtre de la chambre d'Angelina. À quelle distance du mur, en centimètres, doit-il placer le pied de son échelle pour pouvoir atteindre la fenêtre située à 4,80 m du sol ?

344 E15 D13

Dans le plan, combien deux cercles distincts possèdent-ils, au maximum, de tangentes communes ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

345 E15 D20

Six cercles sont centrés aux six sommets d'un hexagone régulier ; leurs rayons sont égaux au côté de cet hexagone. Combien de points du plan appartiennent à au moins deux de ces cercles ?

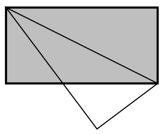
(A) 1 (B) 7 (C) 12 (D) 13 (E) 18

346 E15 D25

Sans réponse préformulée — Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est à 30 cm du côté $[AB]$, qui mesure 80 cm. Quel est, en centimètres, le rayon de ce cercle ?

347 E15 D27

La diagonale d'un rectangle fait un angle de 30° avec la longueur. Lorsque le rectangle est plié suivant cette diagonale, apparait un triangle extérieur au rectangle initial (en blanc ci-contre). Quel est le rapport de l'aire du rectangle à celle de ce triangle ?



(A) 8 (B) 6 (C) 5 (D) 9/2 (E) 4

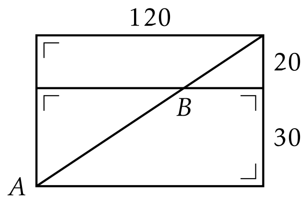
348 E15 D28

La droite symétrique de la droite d'équation $y = 2x + 2$ par rapport à la droite d'équation $y = 4$ a pour équation :

(A) $y = \frac{1}{2}x + 2$;
(B) $y = -\frac{1}{2}x + 4$;
(C) $y = -\frac{1}{2}x + 6$;
(D) $y = -2x + 4$;
(E) $y = -2x + 6$.

349 E15 D29

Sans réponse préformulée — Sur base des informations données par la figure ci-contre, que vaut $|AB|$?



350 D15 D05

Un avion vole au-dessus de Namur ; il doit atterrir dans un aéroport situé à 24 km de la ville. Lorsqu'il descend, en ligne droite, pour se poser, il parcourt 25 km. À quelle altitude volait-il au-dessus de Namur, lorsqu'il a entamé sa descente ?

(A) 5500 m (B) 6000 m (C) 6500 m (D) 7000 m (E) 7500 m

351 D15 D09

Sans réponse préformulée — Pascal possède une boite en forme de parallélépipède rectangle de dimensions intérieures 13 cm, 8 cm et 7 cm. Il dispose de nombreux cubes en bois, les uns de 2 cm d'arête, les autres d'1 cm d'arête. Pour remplir complètement la boite avec le moins possible de cubes, combien doit-il en placer ?

352 D15 D18

Soit ABC un triangle. Les points D et E appartiennent à $[AB]$ et les points F et G appartiennent à $[AC]$; de plus, $3|AD| = |AE| = 3|AF| = |AG|$. À quelle droite remarquable du triangle ABC l'intersection de DG et EF appartient-elle obligatoirement ?

(A) À la médiane issue de A
(B) À la bissectrice de l'angle $\hat{A}$
(C) À la hauteur issue de A
(D) À la médiatrice de $[BC]$
(E) À aucune de ces droites

353 D15 D22 *Sans réponse préformulée* — Deux poulies sont des cercles de rayons 1 et 4, dont les centres sont distants de 6. Une courroie est tendue autour de ces deux poulies, sans croisement. Quel est le rapport de la longueur de courroie en contact avec la grande poulie à la longueur de courroie en contact avec la petite poulie ?

354 D15 D26 *Sans réponse préformulée* — Dans le plan, soit A et B deux points dont la distance vaut 20 ; combien existe-t-il de points C pour lesquels ABC est un triangle rectangle en B dont les trois côtés ont des longueurs entières ?

355 D15 D27 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre d'angles obtus que peut avoir un octogone convexe (sans angle plat) ?

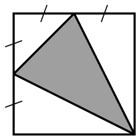
356 D15 D29 *Sans réponse préformulée* — Un cube tourne autour d'une de ses diagonales, dont le carré de la longueur est 18. Que vaut le carré du rayon du cercle décrit par un sommet n'appartenant pas à cette diagonale ?

357 D15 D30 Les points D, E et F se trouvent respectivement sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle ABC. On sait que $|BD| = 2$, $|DC| = 3$, $|CE| = 3$, $|EA| = 1$ et que l'aire du triangle ABC est le quadruple de celle du triangle DEF. Que vaut le rapport $|AF|/|AB|$?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

(E) Les données ne permettent pas de le savoir.

358 E16 D02 *Sans réponse préformulée* — Si l'aire du carré est 16, quelle est celle du triangle ombré ?



359 E16 D03

Parmi les polygones suivants, quel est celui qui *ne* permet *pas* de paver le plan par des copies isométriques ?

(A) Un triangle équilatéral
(B) Un rectangle non carré
(C) Un hexagone régulier
(D) Un octogone régulier
(E) Un parallélogramme dont un angle mesure 135°

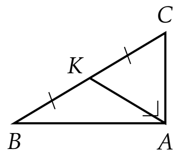
360 E16 D04

Si la diagonale d'un carré mesure 2016, que mesure le périmètre de ce carré ?

(A) 8064 (B) $8064\sqrt{2}$ (C) $4032\sqrt{2}$ (D) $2016\sqrt{2}$ (E) $1008\sqrt{2}$

361 E16 D16

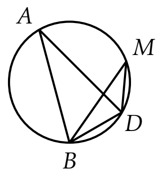
Dans ce triangle rectangle, $|AB| = 4$ et $|AC| = 3$. Que vaut $|AK|$?



(A) 2 (B) 2,5 (C) 3 (D) 4 (E) 5

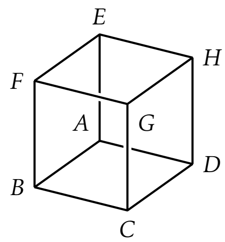
362 E16 D18

Sans réponse préformulée — Dans cette figure, $[AB]$ et $[AD]$ ont même longueur et $\widehat{ABD} = 75°$. Quelle est, en degrés, l'amplitude de $\widehat{BMD}$?



363 E16 D20

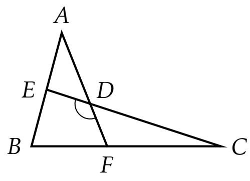
Dans le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre, que vaut l'angle $\widehat{EBG}$?



(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 70° (E) 90°

364 E 16 D23

Dans la configuration ci-contre, laquelle des égalités suivantes est nécessairement vraie ?



(A) $\widehat{EDF} = 180° - \widehat{B}$

(B) $\widehat{EDF} = 360° - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}$

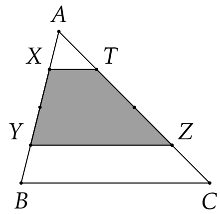
(C) $\widehat{EDF} = 2\widehat{B} - \widehat{A} - \widehat{C}$

(D) $\widehat{EDF} = \widehat{A} + \widehat{C}$

(E) $\widehat{EDF} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$

365 E 16 D25

L'aire du triangle ABC est 48. Les points T, X, Y, Z sont aux quarts des côtés. Quelle est l'aire du trapèze $XYZT$?



(A) 36 (B) 30 (C) 33 (D) 24 (E) 18

366 E 16 D28

Si p désigne le périmètre d'un triangle équilatéral inscrit à un cercle, quelle est l'aire du disque bordé par ce cercle ?

(A) $\dfrac{\pi p^2}{4}$ (B) $\dfrac{\pi p^2}{9}$ (C) $\dfrac{\pi p^2}{27}$ (D) $\dfrac{\pi p^2}{81}$ (E) $\dfrac{\pi p^2\sqrt{3}}{27}$

367 E 16 D30

Quatre cercles de même rayon sont placés à l'intérieur d'un carré de côté 1, de sorte que chacun est tangent à deux côtés du carré ainsi qu'à deux des autres cercles. Quel est le rayon du plus petit cinquième cercle tangent aux quatre précédents ?

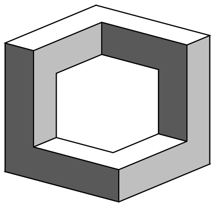
(A) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

(B) $\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)$

(C) $\dfrac{1}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)$

(D) $\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)$

(E) $\dfrac{1}{4}$



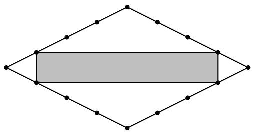
368 D16 D02 *Sans réponse préformulée* — Le solide ci-contre est symétrique ; toutes ses faces sont en forme de **L**. Combien en a-t-il ?

369 D16 D10 *Sans réponse préformulée* — Les points A, B, C sont trois points distincts d'un cercle. Les longueurs des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ valent deux fois la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (il s'agit chaque fois de l'arc le plus court entre les deux points indiqués). Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$?

370 D16 D12 Si le rayon d'un cylindre est doublé et sa hauteur diminuée de moitié, le rapport de l'aire d'une base au volume

- (A) Ne change pas ;
- (B) Est multiplié par 2 ;
- (C) Est multiplié par 4 ;
- (D) Est divisé par 2 ;
- (E) Est divisé par 4.

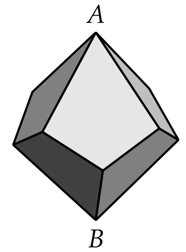
371 D16 D16 Quel est le rapport de l'aire du rectangle à celle du losange ci-contre, sachant que les sommets du rectangle se situent à un quart de la longueur des côtés du losange ?



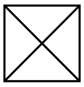
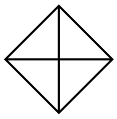
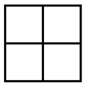
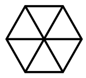
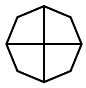
(A) $\frac{3}{16}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{5}{16}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{5}{8}$

372 D16 D18 *Sans réponse préformulée* — Soit un triangle ABC rectangle en B avec $|AB| = 24$ et $|BC| = 32$. La médiatrice de $[AC]$ coupe $[AC]$ en M et $[BC]$ en N. Quelle est l'aire du triangle MNC ?

373 D16 D20 Le polyèdre ci-dessous a huit faces qui sont des cerfs-volants isométriques.



Laquelle des figures suivantes rend le mieux compte de son aspect lorsqu'il est observé d'un point situé « très loin » sur la droite AB, du côté de A ?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

374 D16 D21 Pour toutes les valeurs suivantes de p, sauf une, $2p$ est un carré parfait et $4p$ un cube parfait. Quelle est l'exception ?

(A) 2^7 (B) 2^{13} (C) 2^{19} (D) 2^{25} (E) 2^{64}

375 D16 D22 Deux triangles équilatéraux ABP et CDQ sont construits intérieurement au carré $ABCD$ de côté 1. Que vaut la longueur $|PQ|$?

(A) $\sqrt{3}-1$ (B) $2(3-\sqrt{3})$ (C) $3-\sqrt{3}$ (D) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ (E) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

376 D16 D24 Six cercles distincts de rayon 1 sont tous tangents intérieurement à un grand cercle, chacun des cinq premiers étant tangent au suivant et le sixième au premier. Quel est le rayon du grand cercle ?

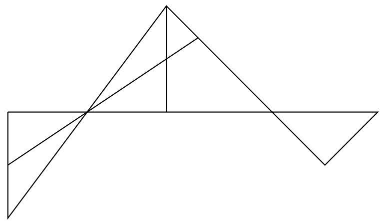
(A) 3 (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) $1+\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}-1$ (E) $3+\sqrt{3}$

377 D16 D26 *Sans réponse préformulée* — Quelle est, en centimètres carrés, l'aire d'un trapèze rectangle à diagonales perpendiculaires de grande base 16 cm et de hauteur 12 cm ?

378 D16 D29 Quel est le point symétrique de $(3,4)$ par rapport à la droite d'équation $3x+4y=50$?

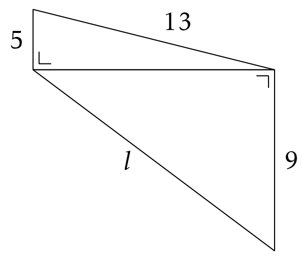
(A) $(9,12)$ (B) $(6,8)$ (C) $(12,16)$ (D) $(12,9)$ (E) $(13,9)$

379 E17 D05 Combien y a-t-il de triangles dans la figure ci-dessous ?

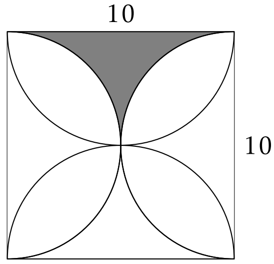


(A) 7 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

380 E17 D06 *Sans réponse préformulée* — La figure suivante (dont les proportions ont été volontairement altérées) représente deux triangles rectangles adjacents ; que vaut l ?

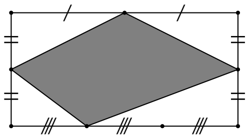


381 E17 D08 Quel est, à un dixième près, le périmètre de la région ombrée dans la figure ci-dessous ?



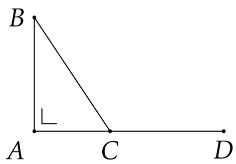
(A) 25,7 (B) 25,9 (C) 26,1 (D) 26,3 (E) 26,5

382 E17 D09 L'aire du rectangle ci-dessous vaut 396 cm^2. Que mesure, en centimètres carrés, l'aire du quadrilatère ombré ?

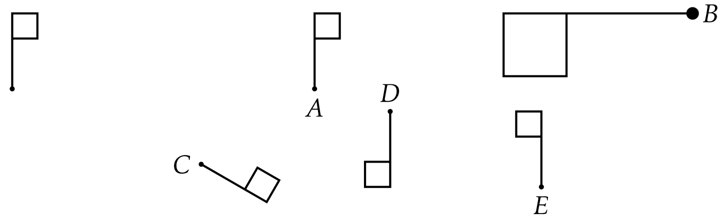


(A) 132 (B) 148 (C) 165 (D) 180 (E) 198

383 E17 D14 *Sans réponse préformulée* — Dans la figure (schématique) ci-dessous, $\widehat{ABC}$ mesure 10° de moins que le cinquième de $\widehat{BCD}$. Quelle est, en degrés, l'amplitude de $\widehat{ACB}$?

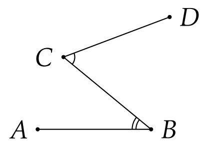


384 E17 D16 Lequel des drapeaux A, B, C, D, E est l'image du drapeau non étiqueté (situé à gauche) par une rotation ?



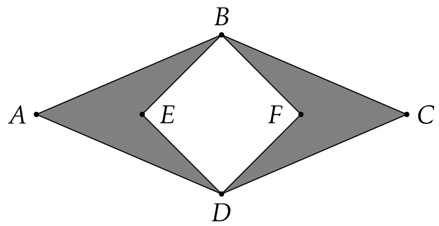
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

385 E17 D18 La figure ci-dessous montre un système articulé plan composé de trois tiges de même longueur, articulées en B et en C. Si l'angle en B mesure 24°, que doit mesurer l'angle en C pour que la droite DB soit perpendiculaire à AB ?



(A) 18° (B) 24° (C) 48° (D) 60° (E) 90°

386 E17 D20 *Sans réponse préformulée* — Dans la figure imprécise ci-dessous, $ABCD$ est un losange et $BEDF$ est un carré. Si $|AB| = 15$ cm et $|AC| = 24$ cm, que vaut l'aire de la surface ombrée, en centimètres carrés ?



387 E17 D21 *Sans réponse préformulée* — La somme des aires de deux carrés vaut 818. Le produit de la diagonale de l'un par la diagonale de l'autre vaut 782. Quelle est la longueur du côté du plus grand carré ?

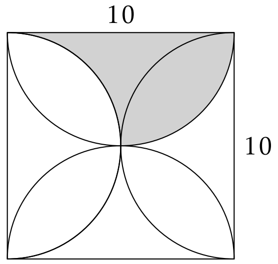
388 E17 D26 Un menuisier coupe une planche rectangulaire de longueur a et de largeur $b < a$ en quatre parties par deux traits parallèles aux côtés ; A et D sont deux parties sans côté commun ; elles ont même aire et A est un carré. Que vaut le côté de ce carré ?

(A) $\dfrac{ab}{a+b}$ (B) $\dfrac{a+b}{4}$ (C) $\dfrac{2a+b}{a+2b}$ (D) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ (E) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$

389 E17 D28 Un trapèze de hauteur 2 dont l'une des bases vaut 12 est inscrit dans un cercle de rayon 10. Quelle est l'aire de ce trapèze ?

(A) 16 (B) 18 (C) 28 (D) $12+4\sqrt{21}$ (E) 32

390 D17 D02 Quelle est l'aire de la région ombrée dans la figure suivante ?



(A) $\dfrac{25}{4}\pi$ (B) $\dfrac{25}{2}\pi$ (C) 25π (D) 50π (E) Une autre réponse

391 D17 D04 *Sans réponse préformulée* — Soit XYZ un triangle et T le point de $[XY]$ tel que $|XT| = 2|TY|$. Si l'aire du triangle YTZ est de 103 cm^2, que vaut, en centimètres carrés, l'aire de XYZ ?

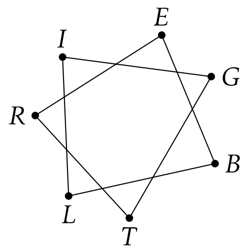
392 D17 D12 Une tortue avance sur une pelouse plane, par segments rectilignes de 1 m. Entre deux segments, elle tourne de 20° vers sa gauche. Quelle distance, en mètres, aura-t-elle parcourue lorsqu'elle reviendra pour la première fois à son point de départ ?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18 (E) 36

393 D17 D13 *Sans réponse préformulée* — Deux droites AB et CD sont parallèles. Le triangle ACD est rectangle en C, $|CD| = 12$ et $|AD| = 15$. Quelle est l'aire du triangle BCD ?

394
D17
D17

Sans réponse préformulée — Philippe a tracé l'heptagone étoilé $GILBERT$ inscriptible dans un cercle. Que vaut, en degrés, $\widehat{G}+\widehat{I}+\widehat{L}+\widehat{B}+\widehat{E}+\widehat{R}+\widehat{T}$?



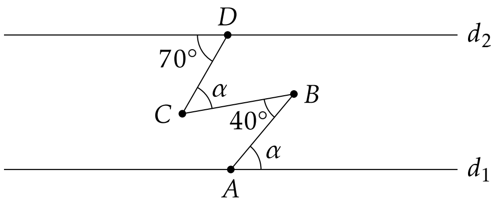
395
D17
D19

Le trapèze $ABCD$ est rectangle en A et en D. Si $|AB| = 4$, $|BC| = 13$ et $|AD| = 5$, quelle est son aire ?

(A) 36 (B) 40 (C) $\frac{85}{2}$ (D) 50 (E) $\frac{105}{2}$

396
D17
D21

Sans réponse préformulée — Dans la figure (imprécise) ci-dessous, si $d_1 \mathbin{/\!/} d_2$, quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle α ?

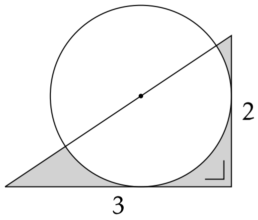


397
D17
D23

Dans un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse 12 est inscrit un carré ayant deux de ses côtés sur les côtés de l'angle droit du triangle. Quelle est l'aire de ce carré ?

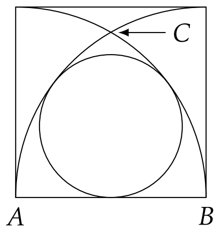
(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36 (E) 72

398 D17 D25 Quelle est l'aire ombrée dans la figure suivante ?



(A) $3\left(1-\frac{6\pi}{25}\right)$
(B) $6\left(1-\frac{6\pi}{25}\right)$
(C) $3-\frac{12\pi}{25}$
(D) $\sqrt{13}\left(1-\frac{6\pi}{25}\right)$
(E) $\sqrt{13}\left(1-\frac{3\pi}{25}\right)$

399 D17 D27 Quel est le rayon du cercle inscrit dans le triangle curviligne ABC, si $|AB| = 8$?



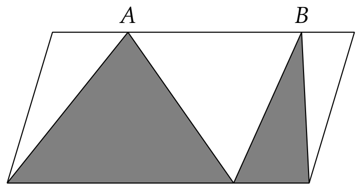
(A) 3 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$ (E) $8-4\sqrt{2}$

400 E18 D05 Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscrit dans un cercle dont $[AB]$ est un diamètre. La diagonale $[AC]$ fait un angle de 24° avec ce diamètre. Que mesure, en degrés, l'angle $\widehat{ADC}$?

(A) 120 (B) 115 (C) 114 (D) 112 (E) 108

401 E18 D08

L'aire du parallélogramme ci-dessous est 6. Que vaut l'aire ombrée ?



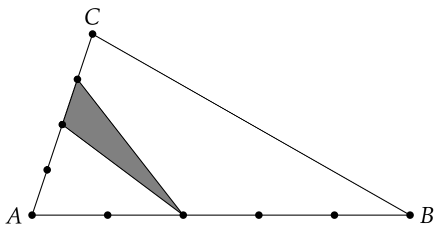
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Elle dépend des positions de A et B.

402 E18 D12

Sans réponse préformulée — Deux côtés consécutifs d'un polygone régulier convexe forment un angle de 179°. Combien ce polygone a-t-il de côtés ?

403 E18 D14

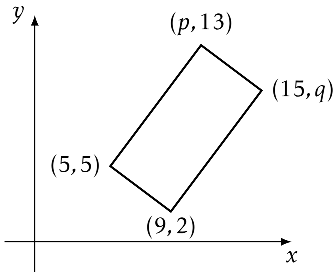
Dans la figure suivante, les points partagent les côtés sur lesquels ils se trouvent en segments de mêmes longueurs. L'aire du triangle ABC est 180 ; quelle est celle du triangle gris ?



(A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36 (E) 45

404 E 18 D 15

La figure ci-dessous est un rectangle ; que vaut $p+q$?



(A) 17 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 22

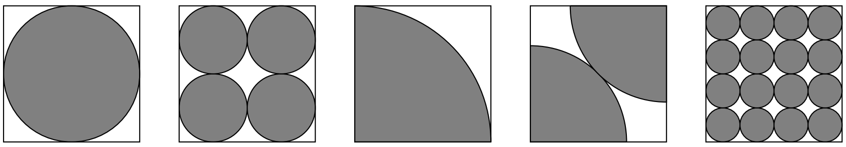
405 E 18 D 17

Le rapport de la longueur à la largeur d'un rectangle vaut 4/3 et l'une de ses diagonales mesure 10 cm. Que vaut l'aire de ce rectangle, en centimètres carrés ?

(A) 100 (B) 64 (C) $50\sqrt{2}$ (D) 48 (E) 24

406 E 18 D 20

Cinq carrés identiques sont partiellement recouverts par des disques ou des morceaux de disques :



Dans les cinq carrés, la somme des aires des parties ombrées

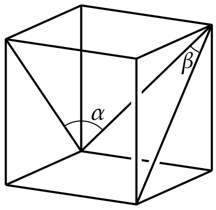
(A) Est la même ;
(B) Prend 2 valeurs distinctes ;
(C) Prend 3 valeurs distinctes ;
(D) Prend 4 valeurs distinctes ;
(E) Prend 5 valeurs distinctes.

407 E 18 D 23

L'une des « boites noires » d'un avion se trouve par 2000 m de fond. Le signal acoustique qu'elle émet est perceptible par le détecteur approprié jusqu'à 4000 m de distance. Quel est le rayon de la zone circulaire, à la surface de l'océan, d'où il est possible de la repérer ?

(A) $1000\sqrt{3}$ m (B) $2000\sqrt{2}$ m (C) $2000\sqrt{3}$ m (D) 2000 m (E) 4000 m

408 E18 D25 Quelle relation vérifient les angles α et β indiqués dans ce cube ?

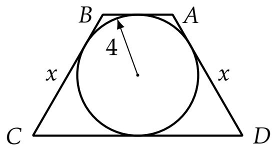


(A) $\alpha = \beta = 45°$
(B) $\alpha = \beta = 60°$
(C) $\alpha = \beta = 90°$
(D) $\alpha < \beta$
(E) $\alpha > \beta$

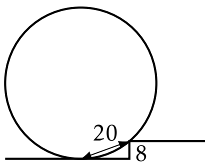
409 E18 D26 L'octogone régulier $ABCDEFGH$ est inscrit dans un cercle de rayon r. Que vaut l'aire du triangle ACG ?

(A) $2\sqrt{2}r^2$ (B) $2r^2$ (C) $\sqrt{2}r^2$ (D) r^2 (E) $\dfrac{r^2}{\sqrt{2}}$

410 E18 D27 *Sans réponse préformulée* — L'aire du trapèze isocèle $ABCD$ est 80 et $|AD| = |BC| = x$. Le cercle, de rayon 4, est tangent à ses quatre côtés. Que vaut x ?



411 E18 D30 *Sans réponse préformulée* — Une roue est arrêtée contre une marche de 8 cm de hauteur. La distance entre le point de contact de la roue sur le sol et le nez de la marche est de 20 cm. Quel est, en centimètres, le rayon de la roue ?



412 D18 D02

Dans le plan, l'ensemble des centres de tous les cercles de rayon donné r qui passent par un point fixe est

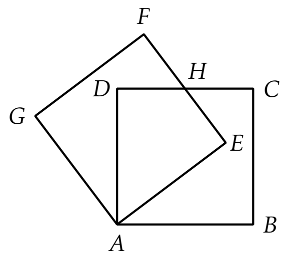
(A) Une droite ;
(B) Deux droites sécantes ;
(C) Deux droites parallèles ;
(D) Un cercle ;
(E) Deux cercles distincts.

413 D18 D04

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit nombre de régions en lequel le plan est découpé par trois droites distinctes bien choisies ?

414 D18 D06

Sans réponse préformulée — Dans la figure de droite, $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés dont les côtés sont de longueur 8 ; H est le milieu de $[CD]$ et de $[EF]$. Quelle est l'aire de l'hexagone $ABCHFG$?



415 D18 D07

Une droite ne coupe jamais un parallélogramme en :

(A) Deux triangles ;
(B) Deux parallélogrammes ;
(C) Un triangle et un pentagone ;
(D) Deux trapèzes non parallélogrammes ;
(E) Un triangle et un parallélogramme.

416 D18 D08

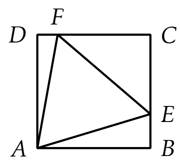
Sans réponse préformulée — Outre les diagonales de ses faces, un cube a de grandes diagonales qui joignent deux sommets en passant par le centre du cube. Combien sont-elles ?

417 D18 D10

Sans réponse préformulée — Si $OLYMP$ est un pentagone régulier convexe, quelle est, en degrés, l'amplitude de $\widehat{MOY}$?

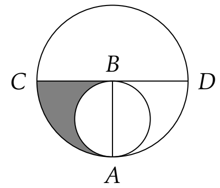
418 D18 D12

Sans réponse préformulée — Dans le carré $ABCD$ représenté ci-contre, $|DF| = 3$ et $|BE| = 5$. Que mesure le côté du carré si la somme des aires des triangles ADF et ABE est égale à l'aire du triangle CEF ?



419 D18 D15

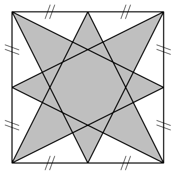
Dans la figure ci-contre, les deux cercles sont tangents en A ; leurs rayons sont R et $R/2$. Le segment $[AB]$ est un diamètre du petit cercle et $[CD]$ lui est tangent. Quelle est l'aire de la partie ombrée ?



(A) $\frac{\pi}{8}R^2$ (B) $\frac{3\pi}{16}R^2$ (C) $\frac{\pi}{4}R^2$ (D) $\frac{5\pi}{16}R^2$ (E) $\frac{3\pi}{8}R^2$

420 D18 D17

Quelle est l'aire de la forme étoilée, ombrée, inscrite dans ce carré de côté a ?



(A) $\frac{2}{5}a^2$ (B) $\frac{3}{5}a^2$ (C) $\frac{4}{5}a^2$ (D) $\frac{7}{10}a^2$ (E) $\frac{11}{10}a^2$

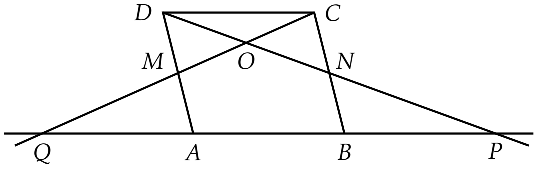
421 D18 D20

Sans réponse préformulée — Les milieux des côtés d'un hexagone régulier sont les sommets d'un nouvel hexagone. L'aire de ce dernier est p % de celle de l'hexagone initial. Que vaut p ?

422 D18 D23

Sans réponse préformulée — Dans un triangle rectangle, les médianes tracées à partir des deux angles aigus mesurent 19 et 22 respectivement. Que mesure l'hypoténuse ?

423 D18 D26 L'aire du parallélogramme $ABCD$ est 8. Les points M et N sont respectivement les milieux de $[AD]$ et de $[BC]$. Les droites CM et DN coupent AB respectivement en Q et en P. Le point O est l'intersection de DP et CQ. Que vaut l'aire du triangle OPQ ?



(A) 7,5 (B) 8 (C) 8,5 (D) 9 (E) 9,5

424 D18 D28 Si le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[AB]$, alors nécessairement :

(A) $|AC|^2 + |BC|^2 < |AB|^2/\sqrt{2}$;
(B) $|AC|^2 + |BC|^2 > \sqrt{2}\,|AB|^2$;
(C) $|AC| + |BC| \leqslant |AB|\sqrt{2}$;
(D) $|AC| + |BC| \geqslant |AB|\sqrt{2}$.
(E) Aucune de ces inégalités

3.4 Logique

425 E16 D12 Un tiroir contient 32 chaussettes éparses, appartenant à 16 paires ; les deux chaussettes d'une paire quelconque sont de la même couleur, qui diffère des couleurs des autres paires. Combien de chaussettes au minimum dois-je prendre, à l'aveuglette, dans le tiroir pour être certain d'avoir une paire de chaussettes de la même couleur ?

(A) 32 (B) 17 (C) 16 (D) 9 (E) 2

3.5 Problèmes — Divers

426 E15 D04
Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante : « Découpe dans ces plaques des carrés aussi grands que possible, tous identiques, dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de centimètres, de façon à ne pas avoir de pertes. ». Combien y aura-t-il de carrés par plaque ?

(A) 80 (B) 40 (C) 22 (D) 20 (E) 10

427 E15 D16
Sans réponse préformulée — Dans un centre sportif, on a constaté que 30 % des abonnés pratiquent l'athlétisme et, parmi eux, 40 % pratiquent aussi le tennis ; 55 % des abonnés pratiquent le tennis. Parmi les 110 abonnés de ce club pratiquant le tennis, combien font aussi de l'athlétisme ?

428 E15 D21
Sans réponse préformulée — Marie-Caroline a cueilli 84 trèfles ; certains ont 3 feuilles, les autres 4 feuilles. Il y a en tout 258 feuilles. Combien y a-t-il de trèfles à 4 feuilles ?

429 E15 D23
Sans réponse préformulée — Les organisateurs de la tombola des pêcheurs ont vendu à 5000 personnes différentes ses 5000 billets numérotés de 0001 à 5000. Le sort ayant désigné le nombre 2837, les billets gagnants sont déterminés par les règles suivantes :
— Les billets dont le n° est terminé par 37 ou par 38 gagnent une boite d'amorces ;
— Ceux dont le n° est terminé par 837 gagnent une épuisette ;
— Ceux dont le n° est terminé par 2837 gagnent une canne à pêche.
Les lots sont cumulables. Combien de personnes sont gagnantes ?

430 E15 D26
Deux boites de même volume sont des parallélépipèdes rectangles à bases carrées. La hauteur de la première dépasse celle de la seconde de 21 %. De quel pourcentage le côté de la base de la seconde dépasse-t-il celui de la première ?

(A) 10 % (B) 10,5 % (C) 12 % (D) 21 % (E) 42 %

431 D15 D10 *Sans réponse préformulée* — Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à 200. Combien des numéros de page contiennent au moins un chiffre 7 ?

432 D15 D15 *Sans réponse préformulée* — Par temps neigeux, le train *Fyra* doit respecter la consigne de réduire sa vitesse habituelle de 40 %. S'il ne la réduit que de 25 %, sa vitesse est trop élevée par rapport à la vitesse imposée. De combien de pour cent ?

433 D15 D20 Une course de 20 km rassemble 25 000 participants. Si on augmente la distance de n %, alors le nombre de participants diminue de $2n$ %. Combien de participants prendront le départ si le parcours est porté à 30 km ?

(A) Aucun (B) 12 500 (C) 20 000 (D) 22 500 (E) 30 000

434 D15 D21 *Sans réponse préformulée* — Un menuisier doit fabriquer 36 armoires. Il s'est planifié un travail uniformément réparti sur plusieurs jours. Mais chaque jour, il confectionne 3 armoires de plus que prévu, ce qui lui permet d'achever la commande avec exactement deux jours d'avance. Combien d'armoires monte-t-il effectivement par jour ?

435 D15 D23 Monsieur Michel a vendu son studio pour 77 000 €. Il utilise cette somme de la façon suivante :
— Il en donne les 3/7 à sa fille ;
— Il s'achète une voiture ;
— Il place le reste à 4,5 % d'intérêt par an.
Au bout d'un an, il perçoit 1125 € d'intérêts. Quel était le prix de la voiture ?

(A) 15 000 € (B) 19 000 € (C) 25 000 € (D) 33 000 € (E) 44 000 €

436 D15 D25

Dans une cave il y a :
— Une seule bouteille contenant 75 cL ;
— Un seul magnum contenant l'équivalent de 2 bouteilles ;
— Un seul jéroboam contenant l'équivalent de 4 bouteilles ;
— Un seul réhoboam contenant l'équivalent de 6 bouteilles ;
— Un seul mathusalem contenant l'équivalent de 8 bouteilles ;
— Un seul salmanazar contenant l'équivalent de 12 bouteilles ;
— Un seul balthazar contenant l'équivalent de 16 bouteilles ;
— Un seul nabuchodonosor contenant l'équivalent de 20 bouteilles.
De combien de manières peut-on remplir un melchisédech, dont la contenance équivaut à 40 bouteilles, en y vidant sans perte certains flacons de cette cave ?

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 4 Ⓓ 6 Ⓔ 9

437 E16 D05

Sans réponse préformulée — Loos Win a perdu le tiers de ses billes puis a regagné le tiers de son nouvel avoir ; ensuite, il a encore perdu le quart de son nouveau magot et enfin il a regagné un quart de son nouveau trésor. S'il avait 900 billes au départ, combien en a-t-il à la fin ?

438 E16 D06

Le bus A passe toutes les 10 min à la gare. Le bus B passe toutes les 20 min à la même gare et le bus C toutes les 35 min. Les trois bus quittent la gare à 9 h. Combien de temps faudra-t-il pour que les trois bus quittent à nouveau la gare ensemble pour la première fois ?

Ⓐ 70 min Ⓑ 140 min Ⓒ 200 min Ⓓ 350 min Ⓔ 7000 min

439 E16 D08

Douze adultes et dix-huit enfants ont payé 420 € pour entrer au parc d'attractions. Le tarif enfant est la moitié du tarif adulte. Quel est, en euros, le prix de l'entrée pour un adulte ?

Ⓐ 10 Ⓑ 14 Ⓒ 15 Ⓓ 20 Ⓔ 30

440
E 16
D10

En 2015, le prix du billet de cinéma a augmenté de 10 %. En 2016, il diminue de 10 %. Sur ces deux ans, le prix

(A) N'a pas changé ;
(B) A augmenté de 1 % ;
(C) A augmenté de 20 % ;
(D) A diminué de 1 %.
(E) Aucune de ces réponses

441
E 16
D15

Le cœur d'une personne de 70 ans a battu en moyenne 70 coups par minute. Parmi les nombres suivants, lequel est le plus proche du nombre total de battements de ce cœur ?

(A) 2 500 000
(B) 25 000 000
(C) 250 000 000
(D) 2 500 000 000
(E) 25 000 000 000

442
D16
D06

Si, dans une population, le nombre de femmes augmente de 10 % et que le nombre d'hommes diminue de 10 %, comment varie la population ?

(A) Elle baisse de 10 %.
(B) Elle ne diminue ni ne croît.
(C) Elle augmente de 10 %.
(D) Elle augmente d'un autre pourcentage (bien déterminé).
(E) Elle varie d'une manière que les données de la question ne permettent pas de déterminer.

443
D16
D14

Mathilde a remplacé son écran de télévision rectangulaire de format 16/9 et de diagonale 81 cm par un écran toujours de format 16/9 mais de diagonale 117 cm ; en pourcentage, qu'a-t-elle gagné en superficie d'écran, approximativement ?

(A) 2 % (B) 20 % (C) 50 % (D) 100 % (E) 200 %

444 D16 D23 *Sans réponse préformulée* — Si X et Y sont deux chiffres (le premier non nul), $\overline{XY}$ désigne le nombre formé par ces deux chiffres juxtaposés dans cet ordre. Une grand-mère, âgée de $\overline{MN}$ ans, part en voyage avec sa fille âgée de $\overline{NP}$ ans et sa petite-fille âgée de $\overline{QM}$ ans. La fille a 25 ans de moins que la grand-mère et la petite-fille a 47 ans de moins que la grand-mère. À elles trois, elles ont moins de 120 ans. Quel est l'âge de la petite-fille, en années, si chaque lettre représente un chiffre différent ?

445 D16 D27 *Sans réponse préformulée* — Je fais du vélo avec Marie. Nous roulons tous deux à vitesse constante. Pour effectuer le parcours entier, il me faut 15 minutes tandis qu'il en faut 20 à Marie. Si je lui laisse 4 minutes d'avance, combien de minutes lui faudra-t-il encore après que je l'ai dépassée ?

446 E17 D01 Ma note chez l'épicier s'élève à 15,37 €, mais le caissier a compté trois fois le même pamplemousse au prix unitaire de 0,80 € alors que je n'en ai pris qu'un seul. Après rectification, combien dois-je réellement payer ?

(A) 12,97 € (B) 13,77 € (C) 14,57 € (D) 16,97 €
(E) Un autre montant

447 E17 D07 *Sans réponse préformulée* — Un réservoir d'essence est rempli au sixième de sa capacité. Si on ajoute 2 litres à son contenu, il se trouve être rempli au quart de sa capacité. Quelle est, en litres, la capacité totale de ce réservoir ?

448 E17 D15 Le prix d'un produit dérivé du pétrole a augmenté de 60 % durant l'année 1973. Pour revenir à sa valeur initiale, ce prix devrait baisser de :

(A) 70 % (B) 62,5 % (C) 60 % (D) 40 % (E) 37,5 %

449 E17 D17 Quand les longueurs des côtés d'un carré sont augmentées de 7 m, son aire augmente de 511 m^2. Quelle est, en mètres, la longueur du côté du carré initial'

(A) 29,5 (B) 33 (C) 36,5 (D) 40 (E) 462

450 E 17 D19

Dans une classe, tous les élèves apprennent au moins une langue germanique : 17 le néerlandais, 18 l'allemand et 7 les deux. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

(A) 21 (B) 28 (C) 35 (D) 42 (E) Une autre réponse

451 E 17 D27

Sans réponse préformulée — Pablo lit un livre, dont les pages sont numérotées à partir de 1. À un moment où il est en bas d'une page, en additionnant les numéros des pages qu'il a déjà lues, il obtient 351 ; en additionnant les numéros des pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469. Combien ce livre a-t-il de pages ?

452 D17 D08

Si la moyenne (arithmétique) des n nombres $1, 2, 3, \ldots, n$ vaut 50, que vaut la moyenne des $n+1$ nombres $1, 2, 3, \ldots, n, n+1$?

(A) 50,02 (B) 50,2 (C) 50,5 (D) 50,75 (E) 51

453 D17 D09

Sans réponse préformulée — Le lièvre court à la vitesse constante de 36 km/h durant 10 s, puis s'endort. Aussitôt la tortue démarre du même endroit que le lièvre et avance à la vitesse de 1 km en 2 h pour le rejoindre. Combien de temps, exprimé en minutes, dure la course de la tortue ?

454 D17 D16

Sans réponse préformulée — Augustus De Morgan déclara en 1864 : « À un de mes anniversaires, le carré de mon âge a coïncidé avec le millésime de l'année. ». Quel est cet âge ?

455 D17 D22

Sans réponse préformulée — Tristan forme trois nombres à deux chiffres en utilisant une fois exactement chacun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6, et en respectant la consigne que le plus petit nombre doit être inférieur de 32 au plus grand. S'il additionne ses trois nombres, quelle est la plus grande somme qu'il peut obtenir ?

456
D17
D30

Julie a une horloge ordinaire, à cadran de 12 heures, dont les aiguilles tournent de manière continue (sans à-coups). Elle mesure l'angle entre l'aiguille des heures et celle des minutes à 14 h 20. À quel moment, entre 17 h 30 et 18 h, les deux aiguilles formeront-elles à nouveau exactement le même angle ?

(A) À un instant précis entre 17 h 33 et 17 h 34

(B) À 17 h 35 exactement

(C) À un instant précis entre 17 h 36 et 17 h 37

(D) À un instant précis entre 17 h 38 et 17 h 39

(E) Jamais

457
E18
D01

Combien de lundis peut-il y avoir au maximum dans une période de 75 jours consécutifs ?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 15

458
E18
D09

Bill change 600 dollars en euros au taux de 1,25 $ par euro. Ayant annulé son voyage, il reconvertit tous ces euros en dollars au nouveau taux de 1,20 $ par euro. Combien reçoit-il de dollars ?

(A) 576 (B) 600 (C) 625 (D) 630 (E) 720

459
E18
D11

Audrey a aligné vingt pièces de 0,20 € sur une table. Bernard a alors remplacé une pièce sur quatre, à partir de la 4e, par une pièce de 0,50 €. Ensuite, Charlotte a remplacé une pièce sur trois, à partir de la 3e, par une pièce de 1 €. Finalement, David a remplacé une pièce sur six, à partir de la 6e, par une pièce de 2 €. Quel est maintenant le montant total de la rangée de pièces de monnaie ?

(A) 10,5 € (B) 12,2 € (C) 13 € (D) 13,5 €

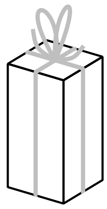
(E) Une autre réponse

460 E18 D16 *Sans réponse préformulée* — J'ai acheté 100 fours à 120 € pièce, avec l'objectif de les revendre à 200 € ; mais ils doivent maintenant être liquidés au plus tôt. Au cours d'une semaine de publicité offrant 20 % de remise sur le prix initial, 25 fours sont vendus. Une fois cette remise portée à 30 %, 25 fours supplémentaires sont vendus. Enfin, avec une remise de 40% (toujours sur le prix initial), ce sont de nouveau 25 fours supplémentaires qui sont vendus. Pour faire néanmoins un bénéfice de 2000 € sur l'ensemble de l'opération, quel prix unitaire dois-je demander pour chacun des 25 fours restants ?

461 E18 D24 *Sans réponse préformulée* — Un propriétaire embauche Denis et Alain pour construire une clôture de 40 poteaux. Il paye à Denis 12 € pour chaque poteau qu'il plante et 8 € à Alain pour chaque poteau. Il veut payer la même somme d'argent à Denis et Alain. Combien paye le propriétaire pour la clôture (en euros) ?

462 D18 D03 *Sans réponse préformulée* — Un panneau publicitaire rectangulaire mesure 9 m sur 16 m. En son centre, une zone carrée est destinée à contenir une annonce. La bordure qui entoure cette zone doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m. Quelle est, au maximum, l'aire disponible pour l'annonce (en mètres carrés) ?

463 D18 D11 *Sans réponse préformulée* — Un cadeau en forme de prisme à base carrée est entouré, comme sur la figure ci-contre, d'un ruban de 68 cm, dont 20 cm pour le nœud de décoration. Sachant que la hauteur est le double du côté de la base, quel est, en centimètres cubes, le volume du cadeau ?



464 D18 D13 Tous les soirs, Albert va rechercher sa femme Louise à son travail. Les trajets aller ou retour sont chacun de 5 km et prennent chacun 10 min en voiture, à vitesse constante. Un soir, Louise quitte son travail plus tôt et se dirige à pied vers sa maison. Albert la rencontre et la charge en voiture avant de retourner chez eux. Le trajet aller-retour d'Albert est ainsi raccourci de 8 min. Quelle distance Louise a-t-elle parcourue à pied ?

(A) 2 km (B) 2,1 km (C) 2,2 km (D) 2,5 km (E) 3 km

465 D18 D18 *Sans réponse préformulée* — Le jacuzzi d'un hôtel peut être rempli par trois robinets. Le premier robinet, seul, remplit le jacuzzi en 9 heures, le deuxième en 12 heures et le troisième en 18 heures. Pour gagner du temps, l'hôtelier ouvre simultanément les trois robinets. En combien d'heures le jacuzzi sera-t-il rempli ?

466 D18 D21 Un arboriculteur a rempli 185 conteneurs de pommes : dans chacun d'eux, entre 125 et 145 pommes. Il affirme que c de ces conteneurs comptent le même nombre de pommes. Quelle est la plus grande valeur de c pour laquelle son affirmation est nécessairement correcte ?

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

467 D18 D22 Un jeans de marque *Bitore* est composé de 0,5 m^2 de tissu et de deux trous aux genoux dont la surface totale représente 15 % de la surface de tissu. À chaque lavage, par usure, 5 cm^2 de tissu sont remplacés par 5 cm^2 de trou. Après combien de lavages y aura-t-il plus de trou que de tissu ?

(A) Entre 0 et 100
(B) Entre 100 et 200
(C) Entre 200 et 300
(D) Entre 300 et 400
(E) Entre 400 et 500

3.6 Combinatoire & probabilités

468 D15 D02 *Sans réponse préformulée* — Un entier est dit *ascendant* si, à partir du deuxième, chacun de ses chiffres est strictement supérieur au chiffre situé à sa gauche. Combien de nombres ascendants sont compris entre 4000 et 5000 ?

469 D15 D07 *Sans réponse préformulée* — Dans un auditoire qui compte 13 rangées de 20 sièges, quel est le plus grand nombre d'élèves que l'on peut asseoir en respectant les deux conditions suivantes :
— Si une rangée est occupée par au moins un élève, toute rangée voisine est complètement inoccupée ;
— Entre deux élèves assis à une même rangée il y a au moins deux sièges libres ?

470 D15 D12

Sans réponse préformulée — Un caractère de l'écriture Braille est formé de points obtenus en poinçonnant une feuille de papier à travers au moins un des six trous de la grille :

Combien y a-t-il de caractères Braille différents possibles ?

471 D15 D13

Sans réponse préformulée — Dans un ensemble de n personnes, chacune possède un nombre entier d'euros compris entre 0 et 500 (inclus). Quelle est la plus petite valeur de n permettant d'être certain que deux personnes possèdent la même somme ?

472 D15 D17

Sans réponse préformulée — Quatre cases alignées sont numérotées de 1 à 4, de gauche à droite. Elles doivent être colorées, l'une en bleu, une autre en jaune, une en rouge, et la dernière en vert, en respectant les règles suivantes :
— Si la case 1 est verte, alors la case 4 est rouge ;
— Si la case 2 est à côté de la case rouge, alors la case 4 est verte ;
— La case 3 est jaune.
Combien de coloriages conviennent ?

473 E16 D19

Sans réponse préformulée — Quatre filles rencontrent quatre garçons. Ils souhaitent former quatre couples garçon-fille de danseurs. Combien de choix ont-ils ?

474 E16 D24

Vingt-quatre élèves sont au réfectoire. Onze ont un sandwich, neuf une orange et n n'ont ni sandwich, ni orange. Quelle est la plus grande valeur possible pour n ?

(A) 15 (B) 13 (C) 11 (D) 9 (E) 4

475 D16 D07

Sans réponse préformulée — Quel est le nombre minimal de personnes qu'il faut réunir pour être certain qu'au moins 4 d'entre elles soient nées le même mois ?

476 E17 D25

Pour constituer une équipe de 7 joueurs, un sélectionneur doit choisir parmi 9 joueurs ; combien d'équipes différentes peut-il former ?

(A) 7 (B) 9 (C) 36 (D) 63 (E) 72

477 E18 D19 *Sans réponse préformulée* — Mathieu doit peindre des pions, chacun dans une seule couleur. Il dispose de trois couleurs et a reçu la consigne que chaque couleur doit être attribuée à un quart des pions au moins. Au moment de se mettre au travail, il se rend compte que la consigne est impossible à respecter. Combien a-t-il de pions à peindre, au maximum ?

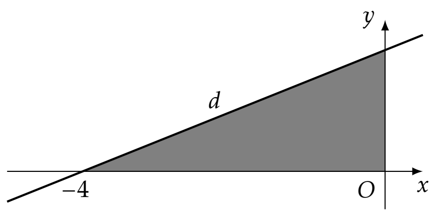
3.7 Analyse

478 D16 D15 *Sans réponse préformulée* — Soit f une fonction du premier degré telle que $f(2) = 8$ et $f(3) = 1$. Que vaut $10 \cdot f(2{,}5)$?

479 D17 D24 *Sans réponse préformulée* — Pour un nombre naturel n, notons $s(n)$ la somme des chiffres de n. Par exemple $s(712) = 7 + 1 + 2 = 10$. Calculer

$$s(1) + s(2) + s(3) + \cdots + s(99).$$

480 E18 D29 La droite d coupe l'axe horizontal au point de coordonnées $(-4, 0)$. L'aire du triangle ombré est égale à 3. Quelle est la pente (le coefficient angulaire) de la droite d ?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{8}{3}$ (E) 3

3.8 Tableau des réponses

D	15		16		17		18	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	540	C	D	C	B	112	B	D
2	B	10	6	12	E	E	12	D
3	D	E	D	A	B	D	B	36
4	D	E	C	6	D	309	B	4
5	E	D	750	D	C	396	C	999
6	B	B	B	E	15	E	A	96
7	C	49	A	37	24	B	E	E
8	A	A	D	5	A	C	C	4
9	C	224	36	24	E	12	A	48
10	140	38	D	36	238	18	A	36
11	E	12	992	3	B	72	C	128
12	B	63	B	B	A	D	360	15
13	D	502	252	E	59	54	C	A
14	D	E	A	D	80	E	B	B
15	D	25	D	45	E	D	D	A
16	24	B	B	D	D	43	140	C
17	B	4	A	C	B	540	D	B
18	E	B	30	150	C	12	E	4
19	7	C	24	3	B	D	5	A
20	D	A	C	E	54	900	A	75
21	6	9	E	E	23	55	180	B
22	B	8	C	A	D	147	D	E
23	100	B	E	16	E	B	C	26
24	A	8	B	A	C	900	384	C
25	50	D	D	13	C	A	B	8
26	A	8	2	150	A	C	D	D
27	B	5	B	4	40	A	10	383
28	E	D	C	E	C	403	D	C
29	78	4	C	A	E	B	B	510
30	E	C	B	0	A	C	25	E

Chapitre 4

Éliminatoires et demi-finales maXi

4.1 Tableau de reconstitution des questionnaires

X	15		16		17		18	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	481	680	665	509	671	531	674	556
2	570	492	666	510	613	532	547	640
3	571	493	501	511	614	623	697	557
4	572	681	667	599	659	533	675	558
5	482	494	656	709	520	534	676	641
6	483	705	687	600	615	713	548	559
7	484	682	590	512	672	535	698	702
8	678	495	502	691	616	536	549	642
9	485	580	503	513	521	537	631	560
10	661	496	657	601	522	624	632	643
11	486	581	504	514	523	538	699	644
12	662	582	591	602	673	539	633	561
13	487	683	505	515	524	625	550	645
14	573	583	592	603	617	540	551	562
15	488	497	708	670	525	660	552	646
16	663	584	668	516	526	541	634	647
17	653	706	688	517	618	626	635	720
18	489	585	506	518	527	627	636	563
19	664	586	689	604	528	542	700	648
20	490	707	593	519	529	714	553	649
21	574	684	658	605	619	696	554	564
22	575	587	507	606	693	715	637	565
23	704	498	690	607	711	543	701	566
24	679	655	594	608	712	628	717	703
25	576	685	508	609	620	716	718	650
26	491	588	669	692	530	544	719	567
27	577	499	595	610	694	629	638	568
28	578	686	596	710	621	545	677	651
29	654	589	597	611	695	630	555	569
30	579	500	598	612	622	546	639	652

4.2 Algèbre & arithmétique

481 E15 X01 Quelle fraction comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ est également distante de chacune d'elles ?

(A) $\frac{11}{36}$ (B) $\frac{2}{6}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{12}$ (E) $\frac{7}{24}$

482 E15 X05 L'illusionniste à un spectateur : « Pensez un nombre n, ajoutez 5, multipliez par 2, ajoutez 30, divisez par 2, retirez n. J'écris la réponse au dos de cette ardoise, donnez à présent la vôtre ! ». Le spectateur : « 20 » ; l'illusionniste retourne l'ardoise vers la salle : il y a écrit « 20 ». Sur quelle formule repose ce tour ?

(A) $n+5\times 2+\frac{30}{2}-n=20$

(B) $(n+5)\times 2+\frac{30}{2}-n=20$

(C) $((n+5)\times 2+30)/2-n=20$

(D) $\dfrac{n+5\times 2+30}{2}=20$

(E) $n+\dfrac{5\times 2+3}{2}-n=20$

483 E15 X06 $\dfrac{1+2+3+\cdots+2015}{1+2+3+\cdots+2014}=$

(A) 1 ; (B) 2015 ; (C) $\dfrac{2015}{2014}$; (D) $\dfrac{2016}{2015}$; (E) $\dfrac{1008}{1007}$.

484 E15 X07 Si a est un nombre entier, le nombre $1+a+a^2+a^3$ est

(A) Toujours pair ;

(B) Toujours impair ;

(C) Pair si a est pair et impair si a est impair ;

(D) Impair si a est pair et pair si a est impair.

(E) Aucune des réponses précédentes

485 E15 X09 *Sans réponse préformulée* — Soit trois nombres naturels a, b et c. Nous savons que $ab=48$, $bc=54$ et $ac=72$; que vaut $a+b+c$?

486 E15 X11

Sans réponse préformulée — La différence de deux nombres est égale à 3. Si chacun d'eux est augmenté de 5, leur produit augmente de 270. Quel est le plus grand de ces nombres ?

487 E15 X13

Un nombre naturel non nul n'a pas d'autre diviseur impair que 1 si et seulement s'il

(A) Est pair ;
(B) Est impair ;
(C) Est multiple de 3 ;
(D) N'est pas multiple de 3 ;
(E) Est une puissance de 2.

488 E15 X15

Si $3a = 8b = 5c$, avec a, b, c strictement positifs, alors

(A) $c < a < b$;
(B) $b < c < a$;
(C) $b < a < c$;
(D) $a < b < c$;
(E) $a < c < b$.

489 E15 X18

Si $k = \sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}}$, alors

(A) $k = 2$;
(B) $k = 3$;
(C) $k = \sqrt{6} + \sqrt{7} + 2$;
(D) k est négatif ;
(E) k n'est pas un réel.

490 E15 X20

Combien y a-t-il de couples de naturels dont le produit égale le double de la somme ?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) Une infinité

491 E15 X26

Quelle est la somme des chiffres du nombre $10^{2015} - 2015$?

(A) 9 (B) 18 (C) 18110 (D) 18119 (E) 18128

492 D15 X02

Soit $A = 2\sqrt{6}$ et $B = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Parmi les égalités suivantes, laquelle est *fausse* ?

(A) $A - 2\sqrt{2}B = 2\sqrt{2}$
(B) $A - B^2 = 4\sqrt{6} - 5$
(C) $A + B^2 = 5$
(D) $AB = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$
(E) $A + 2\sqrt{3}B = 6$

493 D15 X03

Soit g le plus grand entier positif à 4 chiffres distincts et p le plus petit. Que vaut $g - p$?

(A) 8999 (B) 8853 (C) 8765 (D) 8646 (E) 8642

494 D15 X05

Si $a^2 = a + 2$, alors $a^3 =$

(A) $2a + 4$; (B) $2a + 2$; (C) $4a$; (D) $a + 4$; (E) $3a + 2$.

495 D15 X08

Soit a, b et c trois réels distincts ; si $a + b = 2c$, alors $\dfrac{a}{a-c} + \dfrac{c}{b-c}$

(A) Vaut -4 ; (B) Vaut -2 ; (C) Vaut 1 ; (D) Vaut 2 ;
(E) Peut prendre plusieurs valeurs.

496 D15 X10

Sans réponse préformulée — Deux nombres naturels possèdent respectivement 4 et 5 diviseurs. Combien de diviseurs au minimum possède leur produit ?

497 D15 X15

Sans réponse préformulée — Benoit et Brigitte doivent traverser un désert en suivant une piste de 100 km. Le premier jour, ils parcourent 24,691 km, mais ensuite, en raison de la fatigue, ils parcourent 10 % de moins à chaque jour qui passe. Combien de jours prendra leur traversée ?

498
D15
X23

Si x et y sont deux naturels non nuls, notons $x \vee y$ leur plus petit commun multiple ; lorsque y est pair, que vaut

$$\frac{x \vee y}{(2x) \vee (y/2)}\,?$$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 4

(E) Cela dépend des valeurs de x et y.

499
D15
X27

À laquelle des conditions suivantes le trinôme $mX^2 + 2mX + 1$ possède-t-il deux racines distinctes dans l'intervalle $]-2;0[$?

(A) $m > 0$ (B) $m > 1$ (C) $m \geqslant 0$ (D) $m < 0$ (E) $m < 1$

500
D15
X30

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$ pour tout naturel n. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

(A) La suite est croissante.

(B) Pour tout n, $u_{2n} \leqslant u_{2n+1}$.

(C) Pour tout n, $u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3}$.

(D) Pour tout n, $u_{2n} \geqslant u_{2n+2}$.

(E) Pour tout n, $u_{2n+1} \leqslant 2$.

501
E16
X03

Quels que soient les nombres x et y, si $x > y$, alors il est toujours vrai que

(A) $-x < -y$; (B) $-x < y$; (C) $-x > y$; (D) $x > -y$; (E) $-x > -y$.

502
E16
X08

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit nombre premier divisant $2015^{2016} + 2017^{2016}$?

503
E16
X09

Quelle est la valeur maximale de $a(b+c) - b(a+c)$, si a, b et c sont des entiers distincts compris entre 1 et 16 (inclus) ?

(A) 196 (B) 224 (C) 225 (D) 226 (E) 256

504 E16 X11 Soit a, b et c trois réels positifs. Le nombre c est la *moyenne quadratique* de a et b si $2c^2 = a^2+b^2$. Parmi les formules suivantes, laquelle caractérise aussi le fait que c est la moyenne quadratique de a et b ?

(A) $a-b=b-c$

(B) $\dfrac{a}{c-a}=\dfrac{b}{b-c}$

(C) $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{b+c}{a+c}$

(D) $\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{c}{b^2}$

(E) $c=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

505 E16 X13 Le produit de x^5, $x-\dfrac{2}{x}$ et $x-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^3}$ est un polynôme ; quel est son degré ?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 7 (E) 8

506 E16 X18 Les trois premiers termes d'une suite géométrique sont $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[6]{2}$. Quel est le quatrième ?

(A) 1 (B) $\sqrt[7]{2}$ (C) $\sqrt[8]{2}$ (D) $\sqrt[9]{2}$ (E) $\sqrt[10]{2}$

507 E16 X22 Quel est le produit de toutes les solutions de l'équation

$$x^{2016}+2x^{2014}=3x^{2015},$$

d'inconnue réelle x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 200 (E) Un autre nombre

508 E16 X25 L'équation $x^2-px+q=0$, d'inconnue réelle x, admet deux racines a et b. Que vaut a^2+b^2 ?

(A) p^2+2q (B) p^2-2q (C) p^2+q^2 (D) p^2-q^2 (E) p^2

509 D16 X01 Trois nombres premiers p, q et r vérifient $p+q=r$ et $p<q$. Que vaut p ?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

510 D16 X02 De combien de manières peut-on écrire 35 comme somme d'au moins deux naturels consécutifs ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

511 D16 X03 *Sans réponse préformulée* — Combien de naturels non nuls inférieurs à 100 sont diviseurs de 2016 ?

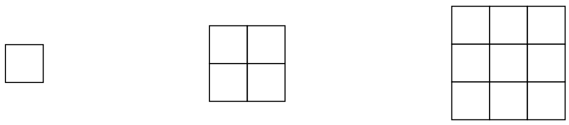
512 D16 X07 L'équation $x^2 - (k+1)x + 1 = 0$, d'inconnue réelle x, (où k est un nombre réel) admet deux solutions distinctes si et seulement si

(A) $k > 1$; (B) $-3 \leqslant k \leqslant 1$; (C) $k \leqslant -3$; (D) $k < -3$ ou $k > 1$.

(E) Aucune de ces réponses

513 D16 X09 *Sans réponse préformulée* — Si m et p sont des nombres réels tels que, pour tout x réel, $(x+4)(x-p) = x^2 + mx + 20$, que vaut $p + 5m$?

514 D16 X11 *Sans réponse préformulée* — Un enfant construit des figures carrées de la manière suivante :



Pour la première figure, il utilise 4 allumettes, pour la deuxième 12 allumettes, ...Il construit la première figure, puis la deuxième figure à côté de la première, puis la troisième à côté des deux premières, etc. S'il dispose de 2016 allumettes, combien de figures entières pourra-t-il ainsi créer ?

515 D16 X13 Quel est l'ensemble des valeurs prises par $p(x) = x^2 + 3x + 2$ lorsque x parcourt l'ensemble de tous les réels tels que $x^2 - 3x + 2 < 0$?

(A) $]0;6[$

(B) $]6;12[$

(C) $]0;12[$

(D) $]-\infty;0[$

(E) $]12;+\infty[$

516 D16 X16 *Sans réponse préformulée* — Soit deux nombres premiers distincts p et q. Quel est le nombre de diviseurs premiers communs à $p^3 + pq + q^3$ et $pq(p+q)$?

517 D16 X17 *Sans réponse préformulée* — Si m, n et p sont trois naturels distincts compris entre 2 et 9 (inclus), quelle est l'unique valeur entière de $\dfrac{m+n+p}{m+n}$?

518 D16 X18 L'une des propositions suivantes est *fausse*. Laquelle ?

(A) Pour tous réels x et y, si $y^2 = x^2(x+2)$, alors $x \geqslant -2$.

(B) Pour tous réels x et y, si $y^2 = x^2(x+1)$, alors $x \geqslant -1$.

(C) Pour tous réels x et y, si $y^2 = x^3$, alors $x \geqslant 0$.

(D) Pour tous réels x et y, si $y^2 = x^2(x-1)$, alors $x \geqslant 1$.

(E) Pour tous réels x et y, si $y^3 = x^2$, alors $y \geqslant 0$.

519 D16 X20 Soit le polynôme P tel que, pour tout réel x, $P(x^2+1) = x^4+5x^2+5$. Alors pour tout réel x, $P(x^2-1) =$

(A) $x^4 + 3x^2 + 3$;

(B) $x^4 + 5x^2 + 4$;

(C) $x^4 + 5x^2$;

(D) $x^4 + x^2 + 1$;

(E) $x^4 + x^2 - 1$.

520 E17 X05 *Sans réponse préformulée* — Si $x^2 + 5x + 6 = 20$, que vaut $3x^2 + 15x + 17$?

521 E17 X09 Un professeur calcule la moyenne arithmétique des notes de ses 100 élèves pour une interrogation notée sur 20 points. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

(A) Si 51 élèves ont obtenu des notes supérieures à 10, alors la moyenne est supérieure à 10.

(B) Si 50 élèves ont obtenu la note 19, alors la moyenne est supérieure à 10.

(C) Si la moyenne est supérieure à 10, alors les notes des élèves sont toutes supérieures à 10.

(D) Si les notes des élèves sont toutes supérieures à 10, alors la moyenne est supérieure à 10.

(E) Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

522 E17 X10 La proposition : « Pour tous réels a et b, $a < b \Rightarrow a^2 > b^2$. » est fausse. Par quoi suffit-il d'y remplacer le mot *réels* pour obtenir une proposition vraie ?

(A) Par *réels de même signe* ;
(B) Par *réels de signes opposés* ;
(C) Par *réels positifs* ;
(D) Par *réels strictement positifs* ;
(E) Par *réels négatifs*.

523 E17 X11 Quel est le produit de tous les diviseurs naturels de 144 ?

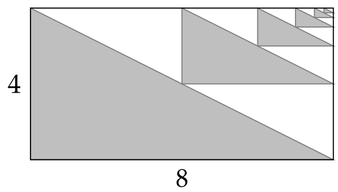
(A) 12^8 (B) 12^{10} (C) 12^{15} (D) 12^{16} (E) 12^{17}

524 E17 X13 Soit r et s deux nombres entiers ; $\dfrac{6^{r+s} \cdot 12^{r-s}}{8^r \cdot 9^{r+2s}}$ est un nombre entier si

(A) $s \leqslant 0$; (B) $r \leqslant 0$; (C) $r \geqslant s$; (D) $r + s \leqslant 0$; (E) $r^2 + s^2 \geqslant 0$.

525 E17 X15 *Sans réponse préformulée* — Si n est un naturel non nul, $n!$ est une abréviation pour $n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Quel est le plus grand facteur premier de $23! - 21!$?

526 E17 X16 On colorie des triangles rectangles comme sur la figure ci-dessous, de manière que les longueurs des côtés de l'angle droit soient divisées par 2 à chaque étape. Quelle est, à 1 % près, la proportion du grand rectangle qui sera coloriée si on poursuit le processus indéfiniment ?



(A) 80 % (B) 75 % (C) 72 % (D) 70 % (E) 67 %

527 E17 X18 *Sans réponse préformulée* — Un nombre est dit *à carrés parfaits* si chacun des chiffres qui le composent est un carré parfait. Par exemple 94 est à carrés parfaits, tandis que 54 ne l'est pas. Combien existe-t-il de nombres à carrés parfaits de deux chiffres ?

528 E17 X19 Combien l'équation $7\sin x + 2\cos^2 x = 5$, d'inconnue $x \in [\,0;2\pi\,[$, possède-t-elle de solutions ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

529 E17 X20 Combien de valeurs entières de x satisfont $0 < x(20-x) < 75$?

(A) Aucune (B) 8 (C) 10 (D) 19 (E) Une infinité

530 E17 X26 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand carré parfait qui soit aussi un cube parfait inférieur à 1000 ?

531 D17 X01 La somme de 8 888 888 888 et 3 333 333 333, deux nombres formés chacun de dix chiffres, est l'un des nombres à onze chiffres suivants. Lequel ?

(A) 11 111 111 111
(B) 11 111 222 221
(C) 11 222 222 221
(D) 12 222 222 221
(E) 22 222 222 221

532 D17 X02 *Sans réponse préformulée* — Un nombre naturel est *abondant* lorsque la somme de ses diviseurs propres lui est strictement supérieure. Par exemple, 12 est abondant car $1+2+3+4+6 > 12$. Quel est le plus petit nombre abondant strictement supérieur à 12 ?

533 D17 X04 *Sans réponse préformulée* — Si x et y sont des nombres naturels tels que $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 0{,}95$, que vaut $x + y$?

534 D17 X05 *Sans réponse préformulée* — Les naturels a, b et c satisfont les conditions suivantes : $\operatorname{pgcd}(a,b) \neq 1$, $\operatorname{pgcd}(b,c) \neq 1$, $\operatorname{pgcd}(c,a) \neq 1$ et $\operatorname{pgcd}(a,b,c) = 1$. Quelle est la valeur minimale du produit $a \cdot b \cdot c$?

535 D17 X07 Quelle est la somme des chiffres du plus petit naturel non nul qui ne s'écrit qu'avec des 0 et des 1 et qui est divisible par 225 ?

(A) 1 (B) 6 (C) 9 (D) 11 (E) 18

536 D17 X08 Quel est le nombre maximal de points d'intersection des courbes d'équations $y = p(x)$ et $y = q(x)$, si p et q sont des fonctions polynomiales, respectivement du quatrième et du troisième degré ?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 12

537 D17 X09 *Sans réponse préformulée* — Si $S(n)$ désigne la somme et $P(n)$ le produit de tous les diviseurs positifs d'un naturel n, quelle est la valeur de $S(P(S(8)))$?

538 D17 X11 *Sans réponse préformulée* — Le produit de tous les diviseurs naturels de 4096 est égal à 2^n. Que vaut n ?

539 D17 X12 Si le polynôme $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ admet les quatre racines r, s, t et u, alors $2r$, $2s$, $2t$ et $2u$ sont les quatre racines du polynôme

(A) $aX^4 + 2bX^3 + 2cX^2 + 2dX + 2e$
(B) $aX^4 - 2bX^3 + 2cX^2 - 2dX + 2e$
(C) $aX^4 + 2bX^3 + 4cX^2 + 8dX + 16e$
(D) $16aX^4 + 8bX^3 + 4cX^2 + 2dX + e$
(E) $16aX^4 - 8bX^3 + 4cX^2 - 2dX + e$

540 D17 X14 *Sans réponse préformulée* — La somme des carrés de sept naturels consécutifs vaut 1211. Quel est le plus grand de ces naturels ?

541 D17 X16 *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre obtenu en ne conservant (dans l'ordre) que les trois chiffres de gauche du nombre

$$100^2 + 99^2 + 98^2 + \cdots + 51^2 - 50^2 - 49^2 - 48^2 - \cdots - 2^2 - 1^2\ ?$$

542 D17 X19 *Sans réponse préformulée* — Si n est un naturel non nul, $n!$ est une abréviation pour $n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Quel est l'exposant de la plus grande puissance de 3 qui divise $100!$?

543 D17 X23 *Sans réponse préformulée* — Quelle est la valeur maximale de $x^2+4xy+y^2$ lorsque x et y sont deux nombres réels de somme 10 ?

544 D17 X26 Le polynôme $X^3 - 15X^2 - 97X + 1071$ a trois racines a, b et c. Que vaut

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\ ?$$

(A) $-\frac{5}{357}$ (B) $\frac{97}{1071}$ (C) $\frac{15}{97}$ (D) $\frac{1}{15}$ (E) $-\frac{1}{97}$

545 D17 X28 Que vaut la somme des $2n$ premiers termes de la suite

$$\left(1, 1, 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, 8, \frac{1}{8}, 16, \frac{1}{16}, \dots\right)?$$

(A) $2^n - 2^{1-n} + 1$
(B) $2^n + 2^{-n}$
(C) $2^{2n} - 2^{3-2n}$
(D) $\frac{4}{3}(2^n - 2^{-n})$
(E) $\frac{4}{5}(2^n + 2^{-n})$

546 D17 X30 *Sans réponse préformulée* — Si $x^2 + xy + xz = 63$, $y^2 + yz + yx = 147$ et $z^2 + zx + zy = 231$, que vaut $x^2 + y^2 + z^2$?

547 E18 X02 Parmi les nombres suivants, quel est celui qui peut être considéré comme une taille normale pour un participant à l'Olympiade de mathématiques ?

(A) $0{,}000\,017 \times 10^4$ cm
(B) $0{,}017 \times 10^5$ mm
(C) $170\,000 \times 10^{-7}$ m
(D) 170×10^{-3} m
(E) $1{,}7 \times 10^{-4}$ km

548 E18 X06 Quel est le reste de la division par 15 de $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + 96 + 101$?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 6

549 E18 X08 Parmi les nombres suivants, quel est celui qui *n*'est *pas* la somme de quatre nombres entiers consécutifs ?

(A) 425 398 (B) 429 562 (C) 496 244 (D) 876 534 (E) 926 322

550 E18 X13 *Sans réponse préformulée* — Pascal (qui vit seul) vide invariablement un tube de dentifrice en 72 jours et un flacon de shampoing en 60 jours ; il use un savon en 40 jours. Aujourd'hui 17 janvier, il entame un nouveau flacon de shampoing alors que son savon et son tube de dentifrice sont exactement à la moitié de leurs existences. Dans combien de jours devra-t-il, pour la première fois à venir, entamer simultanément un nouveau savon, un nouveau tube de dentifrice et un nouveau flacon de shampoing ?

551 E18 X14 La somme de 21 naturels multiples de 3

- (A) Est toujours divisible par 7 et par 9 ;
- (B) Est toujours divisible par 21 mais pas toujours divisible par 9 ;
- (C) N'est pas toujours divisible par 3 ;
- (D) Est toujours divisible par 3 mais pas toujours par 9 ni par 21 ;
- (E) Est toujours divisible par 9 mais pas toujours par 63.

552 E18 X15 Un nombre *palindrome* est un nombre qui est le même quel que soit le sens de lecture, par exemple $A = 20\,177\,102$. Quelle est la différence entre le plus petit nombre palindrome strictement supérieur à A et le plus grand nombre palindrome strictement inférieur à A ?

(A) 10 001 (B) 11 000 (C) 11 011 (D) 22 000 (E) 22 022

553 E18 X20 *Sans réponse préformulée* — Un automobiliste est contrôlé alors qu'il roulait à 250 km/h sur une route où la vitesse est limitée à 70 km/h. Il prétend avoir compris que la limite était à 70 m/s. Selon cette interprétation fantaisiste, à combien de kilomètres par heure sous la limite roulait-il ?

554 E18 X21 *Sans réponse préformulée* — Que vaut $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}}}$?

555 E18 X29 Combien existe-t-il de couples (m,n) d'entiers tels que $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{6}$?

(A) 4 (B) 9 (C) 12 (D) 17 (E) 18

556
D18
X01
Les âges de trois amis sont trois nombres entiers impairs consécutifs. Si a désigne l'âge du plus jeune d'entre eux, de quelle manière s'exprime la somme de leurs âges ?

(A) $a(a+1)(a+2)$ (B) $3(a+2)$ (C) $3(a+1)$ (D) $3(a+1)+1$
(E) Aucune des réponses précédentes

557
D18
X03
Sans réponse préformulée — Quel est le plus grand nombre entier qui divise tous les produits $n(n+2)(n+4)$ où n est un naturel pair non nul ?

558
D18
X04
$\sqrt{27}+\sqrt{12} =$

(A) $\sqrt{39}$; (B) $\sqrt{75}$; (C) $\sqrt{150}$; (D) $\sqrt{324}$.
(E) Aucune des réponses précédentes

559
D18
X06
$\sin(x+y)\sin(x-y)-\cos(x+y)\cos(x-y) =$

(A) 1 ; (B) $\cos 2x$; (C) $2\cos x$; (D) $-\cos 2x$; (E) $\cos 2y$.

560
D18
X09
Sans réponse préformulée — Quelle est la somme des naturels n pour lesquels $n^2-15n+56$ est un nombre premier ?

561
D18
X12
Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de couples (x, y) de naturels tels que $x^2-y^2 = 1600$?

562
D18
X14
Si a, b et c sont trois nombres strictement compris entre 0 et 1, tels que $a^2 = b^4 = c$, quelles sont les inégalités correctes ?

(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $b > c > a$ (E) $c > a > b$

563
D18
X18
Sans réponse préformulée — Le reste de la division de n par 7 est 4. Quel est le reste de la division de n^2+3 par 7 ?

564
D18
X21
Sans réponse préformulée — Que vaut la somme des coefficients dans l'expression développée de $(a+b)^9$, si les coefficients 1 ne sont pas pris en compte ?

565 D18 X22 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand diviseur commun à tous les nombres de la forme $M^2 - N^2$, où M et N sont deux naturels impairs tels que $N < M$?

566 D18 X23 Le système

$$\begin{cases} cx + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

a une solution unique (x, y) qui se trouve dans le premier quadrant ouvert (c'est-à-dire la partie du plan déterminée par $x > 0$ et $y > 0$) si et seulement si

(A) $c = -1$ (B) $c > -1$ (C) $c < \frac{3}{2}$ (D) $0 < c < \frac{3}{2}$ (E) $-1 < c < \frac{3}{2}$

567 D18 X26 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de valeurs naturelles de m pour lesquelles l'équation $x^2 - 24x + m = 0$ possède deux solutions qui sont des nombres premiers ?

568 D18 X27 Soit a un réel non nul et b un réel. Nécessairement, le graphe de la fonction

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$$

(A) Est tangent à l'axe Ox ;
(B) Est tangent à l'axe Oy ;
(C) A sa concavité vers le haut ;
(D) A sa concavité vers le bas ;
(E) Se trouve dans un seul quadrant.

569 D18 X29 L'équation $x + \sqrt{x-1} = 1$, d'inconnue réelle x, admet

(A) Deux solutions, positives ;
(B) Deux solutions, négatives ;
(C) Aucune solution ;
(D) Exactement une solution, positive ;
(E) Exactement une solution, négative.

4.3 Géométrie

570 E15 X02 Parmi les arêtes d'un cube, combien est-il possible d'en sélectionner, au maximum, s'il faut que deux quelconques des arêtes choisies n'aient pas de point commun ?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12

571 E15 X03 Soit PRT un triangle équilatéral et PTQ le triangle isocèle et rectangle en Q extérieur à PRT ; le triangle QTV est isocèle en Q et extérieur aux deux triangles précédents. L'angle $\widehat{TQV}$ vaut 30°. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{RTV}$?

(A) 75° (B) 135° (C) 150° (D) 160° (E) 180°

572 E15 X04 Partant d'un sommet d'un tétraèdre d'arête 1, un scarabée se balade sur ses arêtes et uniquement sur celles-ci. Quelle est la longueur du plus court trajet qui parcourt chaque arête au moins une fois ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

573 E15 X14 Un cube tourne autour d'une de ses diagonales. Quelles trajectoires décrivent les six sommets qui ne sont pas des extrémités de cette diagonale ?

(A) Six cercles de rayons égaux deux à deux
(B) Trois cercles de rayons différents
(C) Deux cercles de même rayon
(D) Deux triangles équilatéraux
(E) Des courbes tracées sur une sphère, qui ne sont pas des cercles

574 E15 X21 Mathieu verse 50 cL d'eau dans un récipient conique d'un litre de capacité, dont la pointe est en bas. Quelle proportion de la hauteur du cône baigne dans l'eau ?

(A) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

575 E15 X22

Sans réponse préformulée — Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est à 30 cm du côté $[AB]$, qui mesure 80 cm. Quel est, en centimètres, le rayon de ce cercle ?

576 E15 X25

La droite symétrique de la droite d'équation $y = 2x + 2$ par rapport à la droite d'équation $y = 4$ a pour équation :

- (A) $y = \frac{1}{2}x + 2$;
- (B) $y = -\frac{1}{2}x + 4$;
- (C) $y = -\frac{1}{2}x + 6$;
- (D) $y = -2x + 4$;
- (E) $y = -2x + 6$.

577 E15 X27

Soit un triangle ABC rectangle en B. Si $|AC| = 4$ et $|AB| + |BC| = \sqrt{18}$, que vaut l'aire de ce triangle ?

(A) 1/2 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 18

578 E15 X28

Que vaut le rayon d'une sphère aussi petite que possible contenant un octaèdre régulier d'arête 1 ?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt[3]{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\sqrt{5}$

579 E15 X30

Un cercle passe par le sommet principal C d'un triangle isocèle ABC et est tangent au côté AB au point T situé entre A et B. Ce cercle recoupe les segments $[AC]$ et $[BC]$ respectivement aux points D et E distincts de C. Si $\frac{|AT|}{|TB|} = \frac{2}{3}$, que vaut le rapport $\frac{|AD|}{|BE|}$?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\sqrt{\frac{8}{27}}$ (D) $\frac{4}{9}$

(E) Les données ne suffisent pas à le déterminer.

580 D15 X09

Sans réponse préformulée — Deux poulies sont des cercles de rayons 1 et 4, dont les centres sont distants de 6. Une courroie est tendue autour de ces deux poulies, sans croisement. Quel est le rapport de la longueur de courroie en contact avec la grande poulie à la longueur de courroie en contact avec la petite poulie ?

581 D15 X11 *Sans réponse préformulée* — Dans le plan, soit A et B deux points dont la distance vaut 20 ; combien existe-t-il de points C pour lesquels ABC est un triangle rectangle en B dont les trois côtés ont des longueurs entières ?

582 D15 X12 *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre d'angles obtus que peut avoir un octogone convexe (sans angle plat) ?

583 D15 X14 Les points D, E et F se trouvent respectivement sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle ABC. On sait que $|BD| = 2$, $|DC| = 3$, $|CE| = 3$, $|EA| = 1$ et que l'aire du triangle ABC est le quadruple de celle du triangle DEF. Que vaut le rapport $|AF|/|AB|$?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

(E) Les données ne permettent pas de le savoir.

584 D15 X16 Le bord inférieur d'un abat-jour est un cercle horizontal. Quelle est la forme du bord de la partie éclairée du plancher (horizontal lui aussi) ? N.B. : Ci-dessous, un *arc de courbe* est éventuellement la courbe tout entière.

(A) Toujours un arc de cercle

(B) Parfois un arc de cercle, parfois un arc d'ellipse non circulaire

(C) Parfois un arc de cercle, parfois un arc d'ellipse non circulaire, parfois un arc de parabole

(D) Parfois un arc de cercle, parfois un arc de parabole

(E) Parfois un arc d'ellipse non circulaire, parfois un arc de parabole

585 D15 X18 Quelle partie du plan euclidien est décrite par l'équation
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8 = 0\,?$$

(A) Un cercle

(B) Une parabole

(C) Une droite

(D) La réunion de deux droites

(E) La partie vide

586 D15 X19 Deux cercles de rayons r et r' ont leurs centres distants de d. Leurs tangentes communes intérieures sont perpendiculaires si et seulement si

(A) $r = r'$; (B) $r' = \sqrt{2}r$; (C) $d = r + r'$; (D) $d = 2(r + r')$.
(E) Une autre réponse

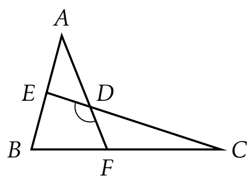
587 D15 X22 *Sans réponse préformulée* — Soit H un hexagone régulier de périmètre 10. Les points extérieurs à H et situés à distance inférieure à 3 de H forment un ensemble A ; quel est le naturel le plus voisin de l'aire de A ?

588 D15 X26 Soit C_1 le cercle inscrit à un triangle rectangle isocèle et C_2 le cercle (distinct de C_1) intérieur au triangle et tangent aux côtés de l'angle droit ainsi qu'au cercle C_1. Quel est le rapport du rayon de C_1 à celui de C_2 ?

(A) $3 + 2\sqrt{2}$ (B) $6\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) 6 (E) $2\sqrt{6}$

589 D15 X29 *Sans réponse préformulée* — Soit un trapèze rectangle $ABCD$ de grande base $[AB]$ de longueur 18 et de petite base $[DC]$ de longueur 8 ; M est le milieu du côté $[AD]$ perpendiculaire aux bases. Quelle doit être la longueur du côté $[AD]$ pour que l'angle $\widehat{BMC}$ soit droit ?

590 E16 X07 Dans la configuration ci-contre, laquelle des égalités suivantes est nécessairement vraie ?



(A) $\widehat{EDF} = 180° - \widehat{B}$
(B) $\widehat{EDF} = 360° - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}$
(C) $\widehat{EDF} = 2\widehat{B} - \widehat{A} - \widehat{C}$
(D) $\widehat{EDF} = \widehat{A} + \widehat{C}$
(E) $\widehat{EDF} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$

591 E16 X12 Les côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ d'un triangle mesurent respectivement 3, 4 et 5. Si, dans son plan, le triangle ABC tourne autour du milieu de $[BC]$, que mesure le rayon du cercle décrit par A ?

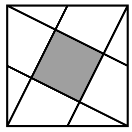
(A) 2 (B) 2,5 (C) 3 (D) 3,5 (E) 4

592 E16 X14 Les diagonales du quadrilatère convexe $ABCD$ se coupent en O. Quelle est la valeur maximale prise par l'expression

$$\cos\widehat{AOB} + \cos\widehat{BOC} + \sin\widehat{COD} + \sin\widehat{DOA}\ ?$$

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}$ (E) 2

593 E16 X20 *Sans réponse préformulée* — Dans la figure ci-contre, les segments intérieurs au grand carré joignent un sommet au milieu d'un côté. Si l'aire du grand carré est 425, quelle est celle du carré grisé ?



594 E16 X24 Les aires des six faces d'un parallélépipède rectangle sont A, A, B, B, C et C. Quel est son volume ?

(A) ABC (B) $(ABC)^2$ (C) $(ABC)^{1/2}$ (D) $(ABC)^{1/3}$ (E) $(ABC)^{2/3}$

595 E16 X27 Le quadrilatère convexe $PQRS$, inscrit dans un cercle de centre O, est tel que $\widehat{SPO} = 55°$, $\widehat{PQO} = 40°$ et $\widehat{QRO} = 30°$. Que vaut $\widehat{RSO}$?

(A) $30°$ (B) $40°$ (C) $45°$ (D) $55°$ (E) $60°$

596 E16 X28 Si ABC est un triangle équilatéral de côté a, que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

(A) a^2 (B) $\dfrac{a^2}{2}$ (C) $\dfrac{a^2}{4}$ (D) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (E) $\dfrac{a^2}{6}$

597 E16 X29 Si α est un angle du premier quadrant et que $x = \sin 2\alpha$, alors $\sin\alpha + \cos\alpha$ est égal à :

(A) $\sqrt{x+1}$;
(B) $1 + (\sqrt{2} - 1)x$;
(C) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 - x}$;
(D) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - x}$;
(E) $\sqrt{x+1} + x^2 - x$.

598 E16 X30

L'ensemble des sommets des paraboles $\mathscr{P}_b \equiv y = x^2 + bx + 1$ ($b \in \mathbf{R}$) est :

(A) Une droite ;

(B) Un cercle ;

(C) Une parabole ;

(D) Deux demi-droites non alignées de même extrémité ;

(E) Un autre ensemble de points.

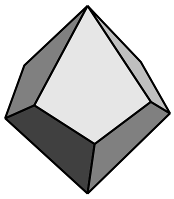
599 D16 X04

Sans réponse préformulée — Les points A, B, C sont trois points distincts d'un cercle. Les longueurs des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ valent deux fois la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (il s'agit chaque fois de l'arc le plus court entre les deux points indiqués). Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$?

600 D16 X06

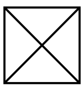
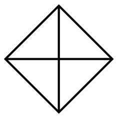
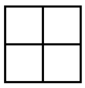
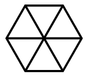
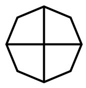
Le polyèdre ci-dessous a huit faces qui sont des cerfs-volants isométriques.

A



B

Laquelle des figures suivantes rend le mieux compte de son aspect lorsqu'il est observé d'un point situé « très loin » sur la droite AB, du côté de A ?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

601 D16 X10

Soit un triangle équilatéral ABC. La base $[BC]$ est divisée en trois segments $[BM]$, $[MN]$ et $[NC]$ de même longueur. Si $\alpha = \widehat{BAM}$ et $\beta = \widehat{MAN}$, alors :

(A) $\alpha = \beta$;

(B) $\alpha < 20° < \beta$ et $\alpha + \beta < 40°$;

(C) $\alpha < 20° < \beta$ et $\alpha + \beta > 40°$;

(D) $\alpha > 20° > \beta$ et $\alpha + \beta < 40°$;

(E) $\alpha > 20° > \beta$ et $\alpha + \beta > 40°$.

602 D16 X12 *Sans réponse préformulée* — Quelle est, en centimètres carrés, l'aire d'un trapèze rectangle à diagonales perpendiculaires de grande base 16 cm et de hauteur 12 cm ?

603 D16 X14 *Sans réponse préformulée* — Soit I le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère convexe $PQRS$. Les triangles PQI, QRI et RSI ont pour aires 144, 108 et 144 respectivement. Quelle est l'aire du triangle SPI ?

604 D16 X19 Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et G son centre de gravité. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$?

(A) $-\dfrac{a^2}{3}$ (B) $-\dfrac{a^2}{6}$ (C) 0 (D) $\dfrac{a^2}{6}$ (E) $\dfrac{a^2}{3}$

605 D16 X21 *Sans réponse préformulée* — Les mesures en degrés des angles d'un pentagone convexe forment une suite arithmétique. Si le plus petit mesure 78°, quelle est en degrés l'amplitude du plus grand ?

606 D16 X22 Si α est un angle aigu tel que $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x}}$, que vaut $\operatorname{tg}\alpha$?

(A) x (B) $\dfrac{1}{x}$ (C) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$ (D) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ (E) $\sqrt{x^2-1}$

607 D16 X23 Soit $SABCD$ une pyramide à base carrée $ABCD$, dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. Soit M (resp. N, O, P, T) le centre de la face SAB (resp. SBC, SCD, SDA, $ABCD$). Quel est le rapport du volume de $SMNOP$ à celui de $TMNOP$?

(A) 1/3 (B) 1/2 (C) 1 (D) 2 (E) 3

608 D16 X24 Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A, et A' le symétrique du point A par rapport à C. Que vaut la tangente de l'angle $\widehat{A'BC}$?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}-1$ (E) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$

609
D16
X25
Sans réponse préformulée — Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en B et en C, avec $|AB| = 15$, $|BC| = 20/3$ et $|CD| = 10$. Que vaut le carré de la distance de B à la droite AD ?

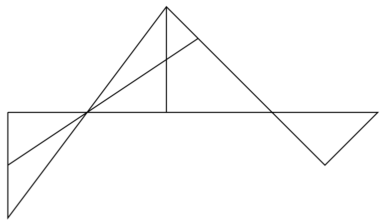
610
D16
X27
Sans réponse préformulée — Soit un triangle ABC isocèle en A, D un point sur le côté $[BC]$ tel que $\widehat{CAD} = 12°$ et E un point sur le côté $[AB]$ tel que $|AE| = |AD|$. Quelle est la mesure en degrés de $\widehat{BDE}$?

611
D16
X29
Sans réponse préformulée — Un vase conique de demi-angle au sommet 30°, de 50 cm de haut et d'axe vertical contient V cm^3 d'eau. Une boule d'acier de 12 cm de diamètre y est immergée et, lorsque le calme est revenu, la surface de l'eau lui est exactement tangente. Que vaut V/π ?

612
D16
X30
Soit $d \in [1;+\infty[$. Si, dans le plan, les points X et Y sont à distance 1 l'un de l'autre, combien existe-t-il de points P tels que $\big||PX| - |PY|\big| = |PX| + |PY| = d$?

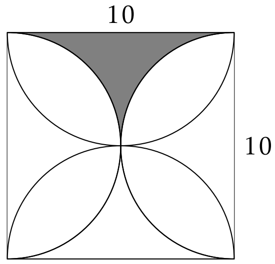
(A) 0 (B) 0 ou 1 (C) 1 ou 2 (D) 0 ou 2 (E) 2 ou 4

613
E17
X02
Combien y a-t-il de triangles dans la figure ci-dessous ?



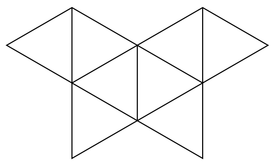
(A) 7 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

614 E17 X03 Quel est, à un dixième près, le périmètre de la région ombrée dans la figure ci-dessous ?



(A) 25,7 (B) 25,9 (C) 26,1 (D) 26,3 (E) 26,5

615 E17 X06 Combien de sommets possède le polyèdre convexe dont voici un développement ?



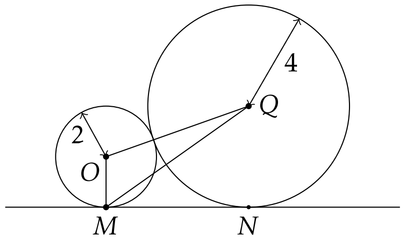
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

616 E17 X08 *Sans réponse préformulée* — La somme des aires de deux carrés vaut 818. Le produit de la diagonale de l'un par la diagonale de l'autre vaut 782. Quelle est la longueur du côté du plus grand carré ?

617 E17 X14 Deux cônes identiques sont posés sur leurs bases. Avec un litre de peinture, je peins la surface latérale du premier et la partie supérieure de celle du second, jusqu'à mi-hauteur. Combien de peinture (en centilitres) me faut-il pour terminer le deuxième cône ?

(A) 33,333... (B) 40 (C) 60 (D) 66,666... (E) 77,777...

618 E17 X17 Deux cercles de centres O et Q et de rayons respectifs 2 et 4 sont tangents extérieurement ; la droite MN est une de leurs tangentes communes, M et N étant les points de contact. Que vaut l'aire du triangle OQM ?



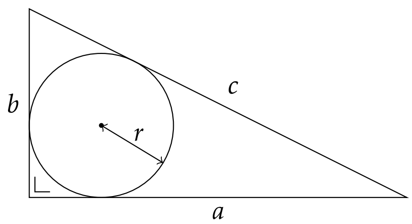
(A) 6 (B) $8-2\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}-2$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) $3\sqrt{2}$

619 E17 X21 *Sans réponse préformulée* — La somme des longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle vaut 18. La somme des carrés de ces longueurs vaut 128. Que mesure l'aire de ce triangle ?

620 E17 X25 Une calotte sphérique a pour diamètre 10 cm et pour profondeur 3 cm. Quel est, en centimètres, le rayon de la sphère dont elle est issue ?

(A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{17}{3}$ (C) $\sqrt{34}$ (D) 6 (E) 73

621 E17 X28 Que vaut r ?



(A) $\frac{a+b+c}{15}$ (B) $\frac{a+b+c}{12}$ (C) $\frac{2c-a-b}{4}$ (D) $\frac{a+b-c}{2}$

(E) Aucune des réponses précédentes

622 E17 X30

Les triangles isocèles ABC et BDE, de sommets principaux C et E, sont semblables. Les points A, B et D sont alignés dans cet ordre et $|AB| = 3|BD|$; C et E sont du même côté de AD et CE coupe AD en F. Quel est le rapport de l'aire du triangle ACF à l'aire du triangle ABC ?

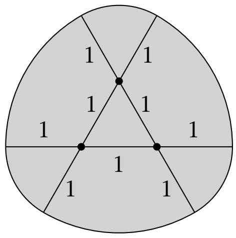
(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{10}{7}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{13}{8}$ (E) $\sqrt{3}$

623 D17 X03

Sans réponse préformulée — Une tortue avance sur une pelouse plane, par segments rectilignes de 1 m. Entre deux segments, elle tourne de $20°$ vers sa gauche. Quelle distance, en mètres, aura-t-elle parcourue lorsqu'elle reviendra pour la première fois à son point de départ ?

624 D17 X10

Le bord de la figure ombrée ci-dessous est formé de six arcs de cercles de rayons 1 et 2, centrés aux sommets d'un triangle équilatéral de côté 1. Quelle est l'aire de cette figure ?



(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) $\left(10\pi - \sqrt{3}\right)/4$ (E) $\left(5\pi - \sqrt{3}\right)/2$

625 D17 X13

Trois cercles de rayon 1 sont tangents deux à deux. Quelle est l'aire du petit triangle curviligne qu'ils entourent ?

(A) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$ (B) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$ (C) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (D) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$

626 D17 X17

Sans réponse préformulée — Quelle est l'aire de la région du premier quadrant qui vérifie les inégalités

$$2x - y - 32 \leqslant 0 \leqslant x - 2y + 32\,?$$

627 D17 X18

Dans le quadrilatère convexe inscriptible $ABCD$, si les angles orientés sont $\alpha = \widehat{BAD}$, $\beta = \widehat{CBA}$, $\gamma = \widehat{DCB}$ et $\delta = \widehat{ADC}$, quelle est la valeur de

$$\sin\alpha + \cos\beta + \sin\gamma + \cos\delta\,?$$

(A) 0 (B) $2\sin\alpha$ (C) $2\cos\beta$ (D) $2\sin\alpha + 2\cos\beta$ (E) $2\sin\alpha\cos\beta$

628 D17 X24

Dans $\mathbf{R}^3$, considérons les tétraèdres (pleins) dont les quatre sommets ont des coordonnées entières, mais qui ne contiennent aucun autre point à coordonnées entières. L'ensemble des volumes de ces tétraèdres

(A) A pour maximum $1/6$;

(B) A pour maximum $1/3$;

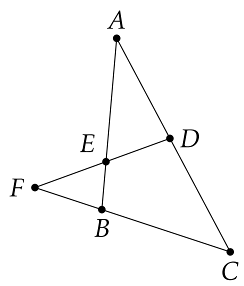
(C) A pour maximum 1 ;

(D) A pour maximum 6 ;

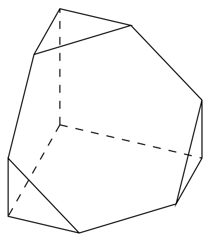
(E) N'a pas de maximum.

629 D17 X27

Sans réponse préformulée — Dans la figure (imprécise) ci-dessous, $|DE| = |EF|$, $|AE| = |CD| = 54$ et $|BE| = 18$. Quelle est la longueur de $[AD]$?

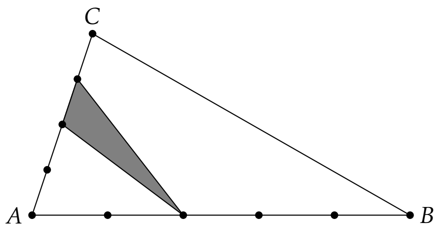


630 D17 X29 Un plan coupe un cube d'arête 8 selon un hexagone régulier. L'une des deux parties est le polyèdre ci-dessous ; quelle est son aire totale ?



(A) 192
(B) $192 + 24\sqrt{3}$
(C) $192 + 36\sqrt{3}$
(D) $192 + 48\sqrt{3}$
(E) $192 + 64\sqrt{3}$

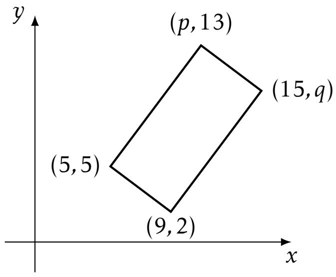
631 E18 X09 Dans la figure suivante, les points partagent les côtés sur lesquels ils se trouvent en segments de mêmes longueurs. L'aire du triangle ABC est 180 ; quelle est celle du triangle gris ?



(A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36 (E) 45

632 E 18 X10

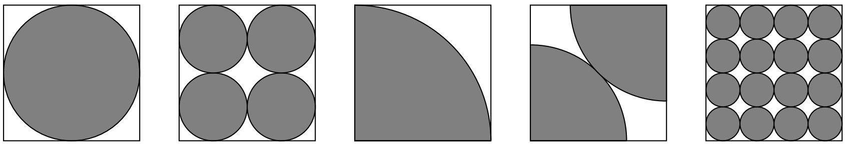
La figure ci-dessous est un rectangle ; que vaut $p+q$?



(A) 17 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 22

633 E 18 X12

Cinq carrés identiques sont partiellement recouverts par des disques ou des morceaux de disques :



Dans les cinq carrés, la somme des aires des parties ombrées

(A) Est la même ;
(B) Prend 2 valeurs distinctes ;
(C) Prend 3 valeurs distinctes ;
(D) Prend 4 valeurs distinctes ;
(E) Prend 5 valeurs distinctes.

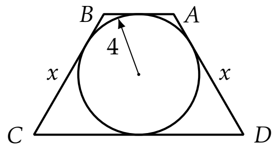
634 E 18 X16

L'une des « boites noires » d'un avion se trouve par 2000 m de fond. Le signal acoustique qu'elle émet est perceptible par le détecteur approprié jusqu'à 4000 m de distance. Quel est le rayon de la zone circulaire, à la surface de l'océan, d'où il est possible de la repérer ?

(A) $1000\sqrt{3}$ m (B) $2000\sqrt{2}$ m (C) $2000\sqrt{3}$ m (D) 2000 m (E) 4000 m

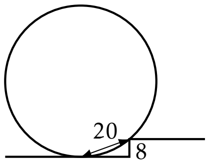
635 E18 X17

Sans réponse préformulée — L'aire du trapèze isocèle $ABCD$ est 80 et $|AD| = |BC| = x$. Le cercle, de rayon 4, est tangent à ses quatre côtés. Que vaut x ?



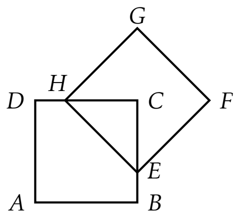
636 E18 X18

Sans réponse préformulée — Une roue est arrêtée contre une marche de 8 cm de hauteur. La distance entre le point de contact de la roue sur le sol et le nez de la marche est de 20 cm. Quel est, en centimètres, le rayon de la roue ?



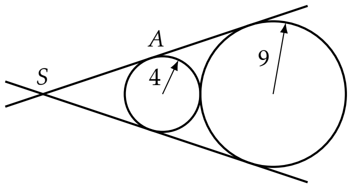
637 E18 X22

Dans la figure ci-dessous, les côtés des carrés $ABCD$ et $EFGH$ sont de longueur 3. Le carré $EFGH$ est centré en C. Quelle est, parmi les suivantes, la meilleure approximation du périmètre de l'heptagone $ABEFGHD$?



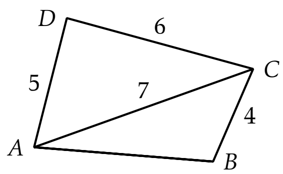
(A) 16 (B) 17 (C) 17,5 (D) 18 (E) 24

638 E18 X27 Deux cercles de rayons 4 et 9 sont tangents extérieurement. Deux tangentes extérieures aux deux cercles se coupent en S. Quelle est la distance $|SA|$, où A est le point de contact du petit cercle avec une des tangentes extérieures ?



Ⓐ 9 Ⓑ $\frac{48}{5}$ Ⓒ 10 Ⓓ $\frac{52}{5}$ Ⓔ 12

639 E18 X30 Dans le quadrilatère $ABCD$, $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$. Si $|AD| = 5$, $|CD| = 6$, $|AC| = 7$ et $|BC| = 4$, que vaut $|AB|$?



Ⓐ 5 Ⓑ $\frac{11}{2}$ Ⓒ 6 Ⓓ $\frac{32}{5}$ Ⓔ Il manque des données.

640 D18 X02 Dans le plan, l'ensemble des centres de tous les cercles de rayon donné r qui passent par un point fixe est

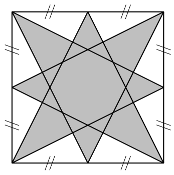
Ⓐ Une droite ;
Ⓑ Deux droites sécantes ;
Ⓒ Deux droites parallèles ;
Ⓓ Un cercle ;
Ⓔ Deux cercles distincts.

641 D18 X05 Une sphère de rayon R est inscrite dans un cylindre de hauteur $2R$ et de rayon R. Quelle fraction du volume du cylindre est occupée par la sphère ?

Ⓐ 1/3 Ⓑ 1/2 Ⓒ 2/3 Ⓓ 3/4 Ⓔ Une autre fraction

642 D18 X08

Quelle est l'aire de la forme étoilée, ombrée, inscrite dans ce carré de côté a ?



(A) $\frac{2}{5}a^2$ (B) $\frac{3}{5}a^2$ (C) $\frac{4}{5}a^2$ (D) $\frac{7}{10}a^2$ (E) $\frac{11}{10}a^2$

643 D18 X10

Sans réponse préformulée — Les milieux des côtés d'un hexagone régulier sont les sommets d'un nouvel hexagone. L'aire de ce dernier est p % de celle de l'hexagone initial. Que vaut p ?

644 D18 X11

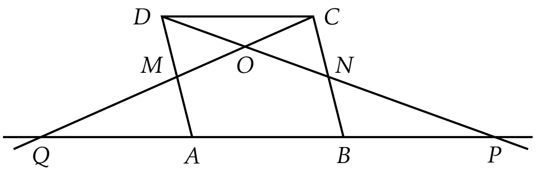
Sans réponse préformulée — Dans un triangle rectangle, les médianes tracées à partir des deux angles aigus mesurent 19 et 22 respectivement. Que mesure l'hypoténuse ?

645 D18 X13

Sans réponse préformulée — Dans le plan Oxy, quelle est l'aire du polygone dont le bord est décrit par l'équation $|x| + |y| = 3$?

646 D18 X15

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est 8. Les points M et N sont respectivement les milieux de $[AD]$ et de $[BC]$. Les droites CM et DN coupent AB respectivement en Q et en P. Le point O est l'intersection de DP et CQ. Que vaut l'aire du triangle OPQ ?



(A) 7,5 (B) 8 (C) 8,5 (D) 9 (E) 9,5

647 D18 X16

Si le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[AB]$, alors nécessairement :

(A) $|AC|^2 + |BC|^2 < |AB|^2/\sqrt{2}$;

(B) $|AC|^2 + |BC|^2 > \sqrt{2}\,|AB|^2$;

(C) $|AC| + |BC| \leqslant |AB|\sqrt{2}$;

(D) $|AC| + |BC| \geqslant |AB|\sqrt{2}$.

(E) Aucune de ces inégalités

648 D18 X19

Un vase cylindrique et un vase conique (posé sur sa pointe) ont même hauteur et leurs bases sont des disques de même rayon. Ce matin, je les ai placés, tous deux vides, côte à côte dans mon jardin. La pluie de la journée a rempli le second sur une hauteur de 72 mm ; à quelle hauteur l'eau s'élève-t-elle dans le premier ?

(A) 24 mm (B) 72 mm (C) 216 mm

(D) Une autre valeur bien déterminée

(E) Le problème ne peut être résolu, par manque de données.

649 D18 X20

Sans réponse préformulée — Une *diagonale* d'un polygone est un segment qui relie deux sommets non consécutifs. Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à 45 côtés ?

650 D18 X25

Un cercle de rayon 5 et un carré de côté $5\sqrt{3}$ sont centrés en un même point. Quelle est l'aire totale des parties du plan à la fois intérieures au carré et extérieures au cercle ?

(A) $25\left(3 - \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(B) $25\left(3 - \sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

(C) $25\left(\dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$

(D) $25\left(3 + \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(E) $25\left(3 + \sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

651 D18 X28

Sans réponse préformulée — La longueur de la base d'un triangle isocèle est $4\sqrt{7}$. Les médianes issues des extrémités de la base sont perpendiculaires. Que vaut l'aire de ce triangle ?

652 D18 X30 *Sans réponse préformulée* — Dans le trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[DC]$, $|BC| = |DC| = 125$ et $|AD| = |DB| = 75$. Quel est le périmètre de ce trapèze ?

4.4 Logique

653 E15 X17 Un contrexemple à la proposition « Tout chat blanc est gentil. » consiste en :

(A) Un chat blanc qui n'est pas gentil ;

(B) Un chat gentil qui n'est pas blanc ;

(C) Un chat qui n'est ni blanc ni gentil ;

(D) Un chat à la fois blanc et gentil ;

(E) Un chat noir très méchant.

654 E 15 X29 Dans un triangle ABC, les hauteurs issues de B et C se coupent en H. Pour prouver que la hauteur issue de A passe aussi par H, voici une démonstration proposée (le point désigne le produit scalaire) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AH} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&\overset{(1)}{=} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&\overset{(2)}{=} \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}\right) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} \\
&\overset{(3)}{=} 0.
\end{aligned}$$

(A) Cette démonstration est fausse parce que l'égalité (1) n'est pas toujours vraie.

(B) Cette démonstration est fausse parce que l'égalité (2) n'est pas toujours vraie.

(C) Cette démonstration est fausse parce que l'égalité (3) n'est pas toujours vraie.

(D) Cette démonstration est correcte, mais ne prouve pas ce qui est demandé.

(E) Cette démonstration est correcte et prouve ce qui est demandé.

655 D15 X24 Si à tout x appartenant à X est associé exactement un y appartenant à Y, qu'à tout y appartenant à Y est associé au moins un x appartenant à X et au plus un z appartenant à Z, alors :

(A) À tout x appartenant à X est associé un z appartenant à Z ;

(B) À tout z appartenant à Z est associé un x appartenant à X ;

(C) Il existe un x appartenant à X auquel n'est associé aucun z appartenant à Z ;

(D) Il existe un z appartenant à Z auquel n'est associé aucun x appartenant à X ;

(E) Ceci détermine une fonction de l'ensemble X dans l'ensemble Y.

656 E16 X05 Un tiroir contient 32 chaussettes éparses, appartenant à 16 paires ; les deux chaussettes d'une paire quelconque sont de la même couleur, qui diffère des couleurs des autres paires. Combien de chaussettes au minimum dois-je prendre, à l'aveuglette, dans le tiroir pour être certain d'avoir une paire de chaussettes de la même couleur ?

(A) 32 (B) 17 (C) 16 (D) 9 (E) 2

657 E16 X10 Quelle est la négation de l'affirmation « *Tous les pays ont une équipe nationale de football.* » ?

(A) « *Il existe un pays sans équipe nationale de football.* »

(B) « *Aucun pays n'a d'équipe nationale de football.* »

(C) « *Tous les pays ont plusieurs équipes nationales de football.* »

(D) « *Il existe un pays ayant plusieurs équipes nationales de football.* »

(E) Aucune des réponses précédentes

658 E16 X21 Soit les deux inégalités

$$x > 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{x} < 1 \tag{2}$$

où x est un réel non nul. Alors,

(A) Pour que (1) soit vrai, il est nécessaire que (2) le soit ;

(B) Pour que (2) soit vrai, il est nécessaire que (1) le soit ;

(C) Pour que (1) soit vrai, il est suffisant que (2) le soit ;

(D) Pour que (2) soit vrai, il est nécessaire et suffisant que (1) le soit.

(E) Aucune des réponses précédentes

659 E17 X04 Des deux affirmations

« *S'il pleut, je prends mon parapluie* »

et

« *Si je ne prends pas mon imperméable, alors je ne prends pas mon parapluie* »,

il résulte que

(A) « *Si je prends mon parapluie, alors il pleut.* » ;

(B) « *S'il pleut, je prends mon imperméable.* » ;

(C) « *Si je prends mon imperméable, alors je prends mon parapluie.* » ;

(D) « *S'il ne pleut pas, je prends mon imperméable.* ».

(E) Aucune des quatre assertions précédentes

660 D17 X15 Des affirmations

« *À part mes assiettes, je n'ai rien en porcelaine.* »,

« *Tous les cadeaux que vous m'avez faits sont incassables.* »

et

« *Toutes mes assiettes sont fragiles.* »,

il est logiquement correct de déduire (sachant que la porcelaine est un matériau fragile) :

(A) « *Vous ne m'avez jamais rien offert d'autre que des assiettes.* » ;

(B) « *Vous m'avez un jour offert un vase.* » ;

(C) « *Vous ne m'avez jamais offert de porcelaine.* » ;

(D) « *À part mes assiettes, je n'ai rien de fragile.* » ;

(E) « *Tout ce que j'ai de fragile est en porcelaine.* ».

4.5 Problèmes — Divers

661 E15 X10 *Sans réponse préformulée* — Dans un centre sportif, on a constaté que 30 % des abonnés pratiquent l'athlétisme et, parmi eux, 40 % pratiquent aussi le tennis ; 55 % des abonnés pratiquent le tennis. Parmi les 110 abonnés de ce club pratiquant le tennis, combien font aussi de l'athlétisme ?

662 E15 X12 *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de jours entre le 28 février 2015 et le 29 février 2016, ces deux dates non comprises ?

663 E15 X16 *Sans réponse préformulée* — Marie-Caroline a cueilli 84 trèfles ; certains ont 3 feuilles, les autres 4 feuilles. Il y a en tout 258 feuilles. Combien y a-t-il de trèfles à 4 feuilles ?

664 E15 X19 *Sans réponse préformulée* — Les organisateurs de la tombola des pêcheurs ont vendu à 5000 personnes différentes ses 5000 billets numérotés de 0001 à 5000. Le sort ayant désigné le nombre 2837, les billets gagnants sont déterminés par les règles suivantes :
— Les billets dont le n° est terminé par 37 ou par 38 gagnent une boite d'amorces ;
— Ceux dont le n° est terminé par 837 gagnent une épuisette ;
— Ceux dont le n° est terminé par 2837 gagnent une canne à pêche.
Les lots sont cumulables. Combien de personnes sont gagnantes ?

665 E16 X01 *Sans réponse préformulée* — Un troupeau de 275 moutons doit être embarqué dans un train, les bêtes étant réparties aussi également que possible entre les huit wagons de ce train. Combien y a-t-il de moutons dans un des wagons les plus remplis ?

666 E16 X02 Le bus A passe toutes les 10 min à la gare. Le bus B passe toutes les 20 min à la même gare et le bus C toutes les 35 min. Les trois bus quittent la gare à 9 h. Combien de temps faudra-t-il pour que les trois bus quittent à nouveau la gare ensemble pour la première fois ?

(A) 70 min (B) 140 min (C) 200 min (D) 350 min
(E) 7000 min

667 E16 X04 En 2015, le prix du billet de cinéma a augmenté de 10 %. En 2016, il diminue de 10 %. Sur ces deux ans, le prix

(A) N'a pas changé ;
(B) A augmenté de 1 % ;
(C) A augmenté de 20 % ;
(D) A diminué de 1 %.
(E) Aucune de ces réponses

668 E16 X16 Soixante-quatre boules de pâte à modeler de rayon R sont agglomérées en une seule grosse boule. Quel est son rayon ?

(A) $64R$ (B) $8R$ (C) $4R$ (D) R^2 (E) R^3

669 E16 X26 *Sans réponse préformulée* — Un nombre N de quatre chiffres se termine par 15. Si un zéro est intercalé entre le chiffre des centaines et celui des dizaines, il augmente de 16 200. Que vaut $N - 1000$?

670 D16 X15 *Sans réponse préformulée* — Je fais du vélo avec Marie. Nous roulons tous deux à vitesse constante. Pour effectuer le parcours entier, il me faut 15 minutes tandis qu'il en faut 20 à Marie. Si je lui laisse 4 minutes d'avance, combien de minutes lui faudra-t-il encore après que je l'ai dépassée ?

671 E17 X01 Ma note chez l'épicier s'élève à 15,37 €, mais le caissier a compté trois fois le même pamplemousse au prix unitaire de 0,80 € alors que je n'en ai pris qu'un seul. Après rectification, combien dois-je réellement payer ?

(A) 12,97 € (B) 13,77 € (C) 14,57 € (D) 16,97 €
(E) Un autre montant

672 E17 X07 Dans une classe, tous les élèves apprennent au moins une langue germanique : 17 le néerlandais, 18 l'allemand et 7 les deux. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

(A) 21 (B) 28 (C) 35 (D) 42 (E) Une autre réponse

673 E17 X12 *Sans réponse préformulée* — Pablo lit un livre, dont les pages sont numérotées à partir de 1. À un moment où il est en bas d'une page, en additionnant les numéros des pages qu'il a déjà lues, il obtient 351 ; en additionnant les numéros des pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469. Combien ce livre a-t-il de pages ?

674 E18 X01 Combien de lundis peut-il y avoir au maximum dans une période de 75 jours consécutifs ?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 15

675 E18 X04 Bill change 600 dollars en euros au taux de 1,25 $ par euro. Ayant annulé son voyage, il reconvertit tous ces euros en dollars au nouveau taux de 1,20 $ par euro. Combien reçoit-il de dollars ?

(A) 576 (B) 600 (C) 625 (D) 630 (E) 720

676 E18 X05 Audrey a aligné vingt pièces de 0,20 € sur une table. Bernard a alors remplacé une pièce sur quatre, à partir de la 4e, par une pièce de 0,50 €. Ensuite, Charlotte a remplacé une pièce sur trois, à partir de la 3e, par une pièce de 1 €. Finalement, David a remplacé une pièce sur six, à partir de la 6e, par une pièce de 2 €. Quel est maintenant le montant total de la rangée de pièces de monnaie ?

(A) 10,5 € (B) 12,2 € (C) 13 € (D) 13,5 €
(E) Une autre réponse

677 E18 X28 Pascal court deux fois plus vite qu'il ne marche, et il fait l'un comme l'autre toujours à la même vitesse. Un jour, en allant à l'école, il marche deux fois plus longtemps qu'il ne court et il met 24 min pour atteindre l'école. Le soir, pour rentrer par le même chemin, il court deux fois plus longtemps qu'il ne marche. Combien de temps (en secondes) met-il alors pour effectuer le retour ?

(A) 864 (B) 1152 (C) 1200 (D) 1728 (E) 1912

4.6 Combinatoire & probabilités

678 E15 X08 *Sans réponse préformulée* — Un naturel est dit *palindrome* si son dernier chiffre n'est pas 0 et s'il est égal au nombre obtenu en renversant l'ordre de ses chiffres, comme par exemple 52 325. Combien y a-t-il de palindromes de trois chiffres dont la somme des chiffres est paire ?

679 E15 X24 Quelle est la somme de tous les nombres naturels formés de trois chiffres impairs ?

(A) 78 125 (B) 69 375 (C) 625^2 (D) 19 375 (E) 125

680 D15 X01 *Sans réponse préformulée* — Un entier est dit *ascendant* si, à partir du deuxième, chacun de ses chiffres est strictement supérieur au chiffre situé à sa gauche. Combien de nombres ascendants sont compris entre 4000 et 5000 ?

681 D15 X04 *Sans réponse préformulée* — Un caractère de l'écriture Braille est formé de points obtenus en poinçonnant une feuille de papier à travers au moins un des six trous de la grille :

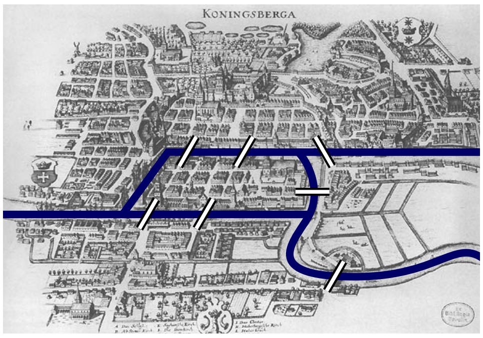
Combien y a-t-il de caractères Braille différents possibles ?

682 D15 X07 *Sans réponse préformulée* — Quatre cases alignées sont numérotées de 1 à 4, de gauche à droite. Elles doivent être colorées, l'une en bleu, une autre en jaune, une en rouge, et la dernière en vert, en respectant les règles suivantes :
— Si la case 1 est verte, alors la case 4 est rouge ;
— Si la case 2 est à côté de la case rouge, alors la case 4 est verte ;
— La case 3 est jaune.
Combien de coloriages conviennent ?

683 D15 X13 *Sans réponse préformulée* — À l'arrivée d'une course cycliste, Alain est passé avant Charles et Denis, tandis que Benoit est passé avant Denis. Il n'y a pas d'ex aequo. Combien de classements des quatre coureurs cités sont compatibles avec ces informations ?

684 D15 X21 *Sans réponse préformulée* — Une horloge numérique affiche l'heure et les minutes (de 0:00 à 23:59) en trois ou quatre chiffres. Combien des affichages possibles sont formés de chiffres en suite arithmétique non constante ?

685 D15 X25 *Sans réponse préformulée* — Combien de ponts suffit-il de construire dans l'ancienne ville de Königsberg, en plus des sept existants (v. plan), pour qu'il existe une promenade passant une et une seule fois par chaque pont et revenant à son point de départ ?



686 D15 X28 *Sans réponse préformulée* — Quatre jetons, deux blancs et deux noirs, sont placés aléatoirement dans deux boites, à raison de deux jetons dans chaque boite ; l'une des boites est ensuite choisie au hasard. Il y a une chance sur n que cette boite contienne 2 jetons noirs. Que vaut n ?

687 E16 X06 *Sans réponse préformulée* — Quatre filles rencontrent quatre garçons. Ils souhaitent former quatre couples garçon-fille de danseurs. Combien de choix ont-ils ?

688 E16 X17 Il y a trente élèves dans la classe. Vingt-deux étudient l'anglais, seize le néerlandais et deux ni l'un ni l'autre. Combien étudient l'anglais et le néerlandais ?

(A) 2 (B) 10 (C) 14 (D) 18 (E) 28

689 E16 X19 *Sans réponse préformulée* — Sur un cube donné, combien y a-t-il d'ensembles de quatre arêtes disjointes ?

690 E16 X23 *Sans réponse préformulée* — De combien de manières peut-on paver un rectangle 3×4 par des rectangles 1×2 (deux pavages images l'un de l'autre par une isométrie *ne* sont *pas* considérés comme identiques) ?

691 D16 X08 Des données consistent en quatorze nombres réels. Si ces nombres sont remplacés par leurs carrés, la moyenne des données

(A) Ne change pas ;
(B) Est élevée au carré ;
(C) Augmente ;
(D) Diminue.
(E) Aucune de ces réponses

692 D16 X26 *Sans réponse préformulée* — Un nombre *ascendant* est un nombre dont les chiffres vont strictement croissant de gauche à droite comme 124 (car $1 < 2 < 4$) ou 1259 (car $1 < 2 < 5 < 9$). Combien y a-t-il de nombres ascendants à trois chiffres ?

693 E17 X22 Quatre amis ont apporté chacun un cadeau qu'ils placent dans une corbeille. Ils tirent ensuite au sort pour distribuer les cadeaux. Quelle est la probabilité qu'aucun des quatre amis ne reçoive le cadeau qu'il avait lui-même apporté ?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{5}{12}$ (E) $\frac{1}{2}$

694 E17 X27 *Sans réponse préformulée* — Je possède entre 100 et 200 billes. Si je les partage en 2, il m'en reste une. Si je les partage en 3, il m'en reste 2. Si je les partage en 4, il m'en reste 3. Enfin, je peux les partager exactement en 5. Combien ai-je de billes ?

695 E17 X29 Dans une finale de 100 m, trois des huit coureurs sont Jamaïcains. Combien y a-t-il de podiums (ordonnés) possibles avec exactement un Jamaïcain ?

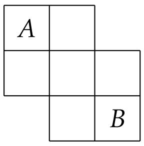
(A) 225 (B) 180 (C) 56 (D) 30 (E) 6

696 D17 X21 Tu vas jeter trois dés (équilibrés, à faces numérotées de 1 à 6) et je dois parier sur le total de leurs faces supérieures. Parmi les suivants, quel choix maximise ma probabilité de gagner ?

(A) 18 (B) 16 (C) 14 (D) 6 (E) 4

697 E18 X03

Sans réponse préformulée — En se déplaçant de case en case adjacente uniquement vers le bas ou vers la droite, combien de chemins mènent de la case A à la case B ?



698 E18 X07

Dans sa garde-robe, Pierre a des cravates bleues, des cravates rouges et des cravates vertes. S'il prend 5 de ses cravates au hasard, l'ensemble contiendra toujours au moins une cravate bleue ou au moins une cravate rouge. Quel est, au maximum, le nombre de ses cravates vertes ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

699 E18 X11

Sans réponse préformulée — Mathieu doit peindre des pions, chacun dans une seule couleur. Il dispose de trois couleurs et a reçu la consigne que chaque couleur doit être attribuée à un quart des pions au moins. Au moment de se mettre au travail, il se rend compte que la consigne est impossible à respecter. Combien a-t-il de pions à peindre, au maximum ?

700 E18 X19

Trois amis connaissent chacun un mot secret différent. Ils peuvent partager leurs informations par texto. Combien de textos au minimum devront être envoyés pour que chacun connaisse les trois mots secrets ? (Nous supposons ici qu'un texto ne peut avoir qu'un seul destinataire.)

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

701 E18 X23

Deux dés parfaitement équilibrés identiques portent sur leurs faces les nombres 1, 1, 1, 2, 3 et 3. Quelles sont les chances d'obtenir une somme impaire en jetant une fois les deux dés ?

(A) 1 chance sur 36
(B) 5 chances sur 36
(C) 5 chances sur 18
(D) 1 chance sur 4
(E) 25 chances sur 36

702 D18 X07 Dédé lance deux dés équilibrés, l'un à huit faces numérotées de 1 à 8 et l'autre à six faces numérotées de 1 à 6. Le résultat est la somme des deux nombres obtenus. Quel(s) est (sont) le(s) résultat(s) le(s) plus probable(s) ?

(A) 7 (B) 8 (C) 7 et 8 (D) 8 et 9 (E) 7, 8 et 9

703 D18 X24 *Sans réponse préformulée* — Trois mille bonbons sont distribués au hasard à cent quatre-vingt-cinq enfants. Quel est le plus grand naturel n pour lequel il est certain qu'au moins un enfant a reçu au moins n bonbons ?

4.7 Analyse

704 E15 X23 Soit une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(-1) = 5$ et $f(1) = -5$.

(A) Cette fonction est nécessairement paire.

(B) Cette fonction est nécessairement impaire.

(C) Nécessairement, cette fonction n'est pas paire.

(D) Nécessairement, cette fonction n'est pas impaire.

(E) Nécessairement, cette fonction n'est ni paire ni impaire.

705 D15 X06 *Sans réponse préformulée* — Le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\pi x/4)$ est translaté pour venir se superposer à celui de la fonction $x \mapsto \cos(\pi x/4)$. Quelle est la plus petite norme possible pour le vecteur de translation ?

706 D15 X17 $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(A) N'existe pas ; (B) Vaut -1 ; (C) Vaut 0 ; (D) Vaut $\frac{\pi}{4}$; (E) Vaut 1.

707 D15 X20 Si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, continue, admet un seul minimum local, quel est le nombre de maximums locaux de f ?

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 0 ou 2, et les deux éventualités se produisent
- (D) 1 ou 2, et les deux éventualités se produisent
- (E) 0, 1 ou 2, et les trois éventualités se produisent

708 E16 X15 *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, partout définies, à la fois paires et impaires ?

709 D16 X05 *Sans réponse préformulée* — Soit f une fonction du premier degré telle que $f(2) = 8$ et $f(3) = 1$. Que vaut $10 \cdot f(2{,}5)$?

710 D16 X28 Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\big(f(x)\big)^2 = f(x) + 1$, alors nécessairement :

- (A) f est constante ;
- (B) f est continue ;
- (C) f est croissante ;
- (D) f possède un maximum ;
- (E) f a pour graphe une parabole.

711 E17 X23 Si la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, alors l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue réelle x,

- (A) Admet au moins une solution ;
- (B) Admet au plus une solution ;
- (C) Admet exactement une solution ;
- (D) N'admet aucune solution.
- (E) Les informations données sont insuffisantes pour conclure.

712 E17 X24 La droite $y = kx$ et la parabole $y = (x-1)^2$ ont une intersection non vide si et seulement si :

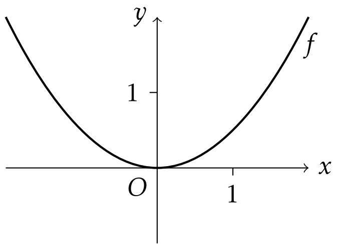
(A) $k \geqslant 0$;
(B) $k \leqslant 0$;
(C) $k \geqslant -4$;
(D) $-4 \leqslant k \leqslant 0$;
(E) $k \geqslant 0$ ou $k \leqslant -4$.

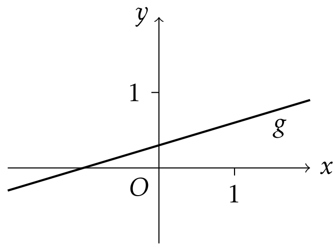
713 D17 X06 *Sans réponse préformulée* — Pour un nombre naturel n, notons $s(n)$ la somme des chiffres de n. Par exemple $s(712) = 7 + 1 + 2 = 10$. Calculer

$$s(1) + s(2) + s(3) + \cdots + s(99).$$

714 D17 X20 *Sans réponse préformulée* — La fonction f est impaire et périodique de période 4. Si $f(x) = -x$ pour tout $x \in [\,0;2\,[$, que vaut $f(-217)$?

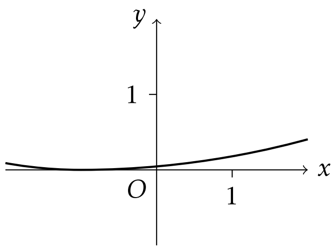
715 D17 X22 Si le premier graphe est celui de la fonction f et le second celui de la fonction g,



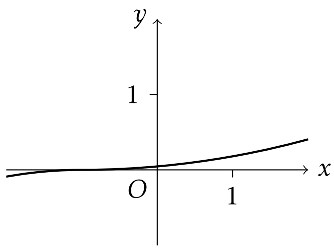


alors le graphe de la fonction composée $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$ est

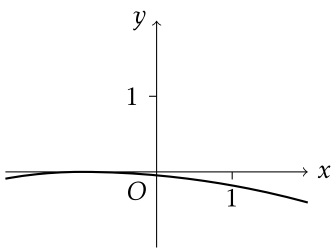
(A)



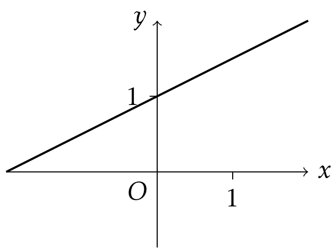
(D)



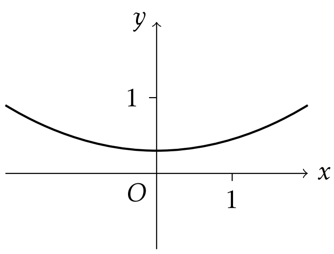
(B)



(E)



(C)



716 D17 X25 Si la fonction f de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ est périodique de période a et si la fonction g de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ est périodique de période b, alors la fonction $f+g$

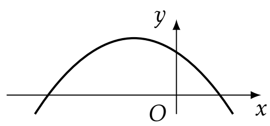
(A) Est toujours périodique de période $a+b$;
(B) Est toujours périodique de période $\max\{a,b\}$;
(C) Est toujours périodique de période $\min\{a,b\}$;
(D) Est toujours périodique de période $a \cdot b$;
(E) N'est pas nécessairement périodique.

717 E18 X24 *Sans réponse préformulée* — Les suites arithmétiques $(29, 40, 51, 62, 73, \ldots)$ et $(5, 22, 39, 56, 73, \ldots)$ ont le terme 73 en commun. Quel est le terme commun suivant ?

718 E18 X25 Pour combien de nombres naturels n la fraction $\dfrac{2n^2-13n+15}{n-3}$ est-elle strictement négative ?

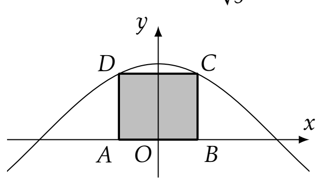
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

719 E18 X26 Si la figure ci-dessous représente la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$, laquelle des expressions suivantes est positive ?



(A) a (B) bc (C) ab^2 (D) $a-c$ (E) $c-b$

720 D18 X17 *Sans réponse préformulée* — Le côté AB du rectangle $ABCD$ est situé sur l'axe Ox. Ses sommets C et D sont sur la courbe d'équation $y = k\cos x$. Si $|AB| = \frac{\pi}{3}$ et que l'aire du rectangle est $\frac{5\pi}{\sqrt{3}}$, que vaut le coefficient k ?



4.8 Tableau des réponses

X	15		16		17		18	
	E	D	E	D	E	D	E	D
1	E	10	35	A	B	D	B	B
2	B	A	B	D	C	18	B	D
3	E	B	A	24	A	18	4	48
4	B	63	D	36	B	4	A	B
5	C	E	B	45	59	900	C	C
6	E	2	24	E	A	900	E	D
7	D	4	E	D	B	C	D	E
8	45	C	2	E	23	B	C	B
9	23	8	C	40	D	403	B	15
10	24	8	A	C	E	E	D	75
11	26	8	E	13	C	78	5	26
12	365	5	B	150	40	C	A	8
13	E	5	D	B	A	A	180	18
14	C	C	E	192	C	16	D	C
15	B	5	1	4	101	C	D	D
16	6	A	C	0	E	252	C	C
17	A	A	B	2	D	512	10	10
18	B	E	A	D	12	B	25	5
19	100	E	9	B	C	48	C	E
20	A	E	85	E	B	1	2	945
21	A	31	A	138	9	C	4	510
22	50	58	A	E	C	A	B	8
23	C	E	11	D	B	150	C	E
24	B	E	C	A	E	E	260	17
25	E	2	B	144	B	E	A	A
26	E	A	815	84	729	A	E	3
27	A	B	D	6	155	54	B	A
28	A	6	B	D	D	A	B	84
29	E	24	A	360	B	D	D	D
30	D	B	C	D	C	179	A	370

Chapitre 5

Finales miNi

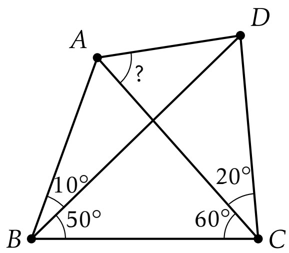
5.1 Finale 2015

1. Soit le nombre

$$3ABCD8EFG$$

où chaque lettre représente un chiffre. La somme de trois chiffres consécutifs de ce nombre vaut toujours 18. Déterminer tous les chiffres de ce nombre.

2. Dans le quadrilatère $ABCD$, dessiné ci-dessous sans respect des mesures, $\widehat{ABD} = 10°$, $\widehat{DBC} = 50°$, $\widehat{DCA} = 20°$ et $\widehat{ACB} = 60°$. Que vaut $\widehat{CAD}$?



3. Quatre nombres ont pour somme 125. Augmenter de 4 le premier d'entre eux, diminuer de 4 le second, multiplier par 4 le troisième et diviser par 4 le dernier, cela donne quatre résultats égaux. Quels sont les quatre nombres de départ ?

4. Titeuf a installé deux bibliothèques dans sa chambre. Dans la première, il place ses livres scolaires sur trois planches ; dans l'autre, il classe sur quatre planches les bandes dessinées qu'il collectionne. Dans la première bibliothèque, il y a M livres par planche et dans la seconde N livres par planche. Chacun des nombres M et N est formé de deux chiffres, et un chiffre apparait exactement deux fois parmi ces quatre chiffres. Titeuf fait l'inventaire de ses livres. Il en compte en tout 101. Combien y a-t-il de livres par bibliothèque ?

5. La suite $(1,4,7,10,\ldots)$ s'obtient en ajoutant chaque fois 3 aux termes successifs.

a) Le nombre 1111 en fait-il partie ?

b) Le nombre 55 apparait dans la suite. Celle-ci contient-elle d'autres nombres composés uniquement de chiffres 5 ? Si oui, quels sont ces nombres ?

c) Soit C un chiffre non nul. La suite contient-elle des nombres composés uniquement de chiffres C ? Si oui, quels sont ces nombres ?

5.2 Finale 2016

1. Les déplacements du réparateur d'horloges publiques (toujours arrondis au kilomètre supérieur) sont facturés selon les modalités suivantes : un montant initial de 10 € est augmenté de

- 0,60 € pour chaque kilomètre jusqu'au 50^e^,
- 0,50 € pour chaque kilomètre compris entre le 51^e^ et le 100^e^ et
- 0,40 € pour chaque kilomètre à partir du 101^e^ ;

en outre, pour les déplacements de strictement plus de 200 km, une indemnité de repas de 70 € est due.

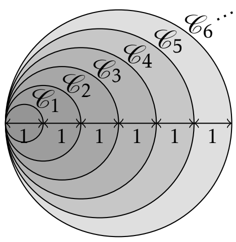
a) Que coute un trajet de 145 km ?

b) Écrire une formule qui fournit le cout d'un trajet de longueur l comprise entre 201 km et 300 km.

c) Calculer la distance correspondant à un cout de 203 €.

2. Dans le dessin ci-contre, tous les cercles sont tangents intérieurement en un même point et leurs diamètres sont les naturels non nuls successifs.

Quels sont les cercles consécutifs qui déterminent entre eux un croissant dont l'aire est égale à $43\pi/4$?

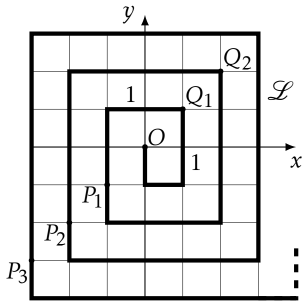


3. Un cercle $\mathscr{C}$ centré en O admet $[AB]$ pour diamètre ; D est un point du cercle et E un point de la demi-droite $[OB$ tel que le triangle ODE est isocèle en D. La droite DE recoupe le cercle en C.

a) Où peut se trouver D pour que E soit extérieur au cercle ?

b) Si $\widehat{COA} = 18°$, quelle est la mesure de $\widehat{CEA}$?

4.



Le plan, muni d'un repère orthonormé d'origine O, est quadrillé par des droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières. Sur ce quadrillage, on dessine, en partant de O vers le bas, une ligne spiralée $\mathscr{L}$ qui tourne dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre, comme indiqué ci-contre.

Pour tout point M à coordonnées entières, on note $L(M)$ la longueur de la portion de $\mathscr{L}$ qui va du point O au point M ; par exemple, $L(Q_1) = 4$.

a) Soit M un point de l'axe des abscisses tel que $|OM| = 3$. Quelles sont les valeurs possibles pour $L(M)$?

b) Exprimer $L(P_1)$, $L(P_2)$, $L(P_3)$ et en général $L(P_i)$, où $P_i = (-i, -i)$ avec i naturel.

c) Exprimer $L(Q_i)$, où $Q_i = (i, i)$ avec i naturel.

d) Calculer $L(M)$ lorsque $M = (2015, 2016)$.

e) Déterminer les coordonnées du point S tel que $L(S) = 2016$.

5. Mathilde s'amuse à essayer de recouvrir — entièrement et sans chevauchement — des damiers carrés avec trois types de plaques qu'elle tire de sachets contenant chacun une grande plaque 5×5, une moyenne 3×3 et deux petites 1×1. Elle s'est imposé d'utiliser chaque fois les quatre plaques d'un sachet.

a) Est-ce possible pour un damier 18×18 ?

b) Est-ce possible pour un damier 12×12 ?

c) Est-ce possible pour un damier 2016×2016 ?

d) Est-ce possible pour un damier 24×24 ?

5.3 Finale 2017

1. Soit $ABCD$ un carré dont la longueur du côté est 999. Le point P du côté $[BC]$ et le point Q du côté $[CD]$ sont tels que $|BP| = |DQ| = x$. Quelle doit être la valeur de x pour que les segments $[AP]$ et $[AQ]$ partagent le carré en trois parties de même aire ?

2. Un quadrillage de taille 4×6 est donné (ayant donc 5×7 sommets), avec ses lignes horizontales et ses lignes verticales. Deux sommets sont *voisins* s'ils sont à distance 1, soit sur une même horizontale, soit sur une même verticale.

a) Existe-t-il un coloriage des sommets, chacun en bleu ou en noir, comprenant autant de sommets bleus que de sommets noirs ?

b) Existe-t-il un coloriage des sommets, chacun en bleu ou en noir, tel que chaque sommet a un nombre pair non nul de voisins colorés en noir ?

c) Existe-t-il un coloriage des sommets, chacun en bleu ou en noir, tel que chaque sommet a un nombre pair de voisins colorés en noir et un nombre pair de voisins colorés en bleu ?

3. Mathilde a devant elle une pile de n jetons. Elle doit répéter un certain nombre de fois la manœuvre en deux temps suivante :

- Enlever un jeton à l'une des piles qu'elle a devant elle (et qui contient au moins deux jetons) ; ce jeton est définitivement jeté ;
- Puis partager en deux, de façon quelconque, une pile contenant au moins deux jetons (celle à laquelle elle vient de retirer un jeton, ou une autre).

Si elle parvient à une disposition finale ne comportant que des piles de 5 jetons, elle gagne.

a) Y parviendra-t-elle si $n = 17$?

b) Y parviendra-t-elle si $n = 20$?

c) Donner une condition sur n pour que Mathilde puisse gagner.

4. Deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de centres respectifs C et D et de même rayon r se coupent en deux points distincts A et B. La droite CB recoupe $\mathscr{C}$ en P. La droite DB recoupe $\mathscr{D}$ en R.

a) Illustrer ces données par un schéma.

b) Déterminer la nature du quadrilatère $ACBD$.

c) Montrer que A, P et R sont alignés.

5. Dans un jardin carré de 10 m de côté, quadrillé en carrés d'1 m de côté, doit être implanté un potager carré de 3 m de côté dont les bords se situeront sur des lignes du quadrillage.

a) Combien de positions du potager sont possibles ?

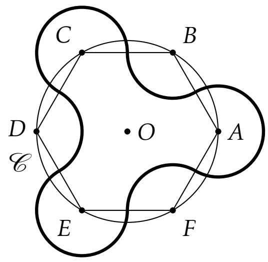
b) Pour combien d'entre elles l'ensemble jardin et potager admet-il une symétrie orthogonale ?

c) Que devient cette dernière valeur si le jardin mesure 11 m de côté, le potager restant à 3 m ?

5.4 Finale 2018

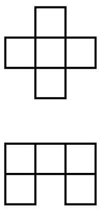
1. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier inscrit à un cercle $\mathscr{C}$. Le bord d'un « hand spinner » est formé :

- De l'arc du cercle centré en A, limité aux milieux des côtés $[FA]$ et $[AB]$, extérieur à l'hexagone ;
- De l'arc du cercle centré en B, limité aux milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$, intérieur à l'hexagone ;
- Et ainsi de suite, en alternant les arcs extérieurs et intérieurs à l'hexagone, jusqu'à ce que la courbe se referme au milieu de $[FA]$.



Déterminer la longueur du contour du « hand spinner », sachant que celle du cercle $\mathscr{C}$ est de 10.

2. Mathilde dispose, en quantité non limitée, de pièces des deux formes ci-contre, où les petits carrés sont de côté 1. Elle souhaite en utiliser pour recouvrir des rectangles, sans débordement, ni superposition, ni trou.

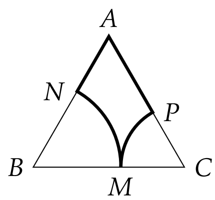


a) Est-ce possible dans le cas d'un rectangle 15×9 ?

b) Est-ce possible dans le cas d'un rectangle 15×10 ?

c) Est-ce possible dans le cas d'un rectangle 15×987 ?

3. Soit un triangle équilatéral ABC de côté 8 et un point M quelconque de $]BC[$. Le cercle de centre B passant par M coupe $[AB]$ en N et le cercle de centre C passant par M coupe $[AC]$ en P.



a) Si M est le milieu de $[BC]$, déterminer la longueur totale de la ligne fermée $ANMP$ formée de deux segments et de deux arcs de cercle.

b) Montrer que la longueur totale de $ANMP$ ne dépend pas de la position du point M sur $]BC[$.

4. Ci-dessous, la notation $\overline{xy\ldots z}$ représente le nombre dont les chiffres sont, de gauche à droite, x, y, … et z ; dans le cas de trois chiffres, donc, $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Déterminer tous les nombres de trois chiffres $\overline{abc}$ tels que

$$\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ba} + \overline{cb} + \overline{ac}$$

(par exemple, 152 n'est pas un tel nombre puisque $152 \neq 15 + 52 + 21 + 51 + 25 + 12$).

5. Quel est le chiffre des unités de la somme des cubes des naturels 1, 2, 3, …, 2018 ?

Chapitre 6

Finales miDi

6.1 Finale 2015

1. Soit $WXYZ$ un carré. Trois droites parallèles d, d' et d'' passent respectivement par X, Y et Z. La distance entre d et d' vaut 5 tandis que la distance entre d' et d'' vaut 7. Quelle est l'aire du carré ?

2. À la course à pieds, une séquence d'entrainement « pyramidale de degré n » (n naturel non nul) est une alternance d'épisodes de course et d'épisodes de repos, commençant par un épisode de course et se terminant par un épisode de repos ; les épisodes de repos ont tous la même durée : k minutes ; par contre, les durées des épisodes de course croissent d'une minute à n minutes par pas d'une minute, puis décroissent jusqu'à une minute, toujours par pas d'une minute. Par exemple, dans une séquence pyramidale de degré 3, les durées des épisodes de course sont : 1, 2, 3, 2, 1 minutes, dans cet ordre.

a) Si la durée du repos est d'une minute,

   i. Quelle est la durée d'une séquence d'entrainement pyramidale de degré 4 ?

   ii. Exprimer en fonction de n la durée d'une séquence d'entrainement pyramidale de degré n.

   iii. Quel est le degré des séquences pyramidales dont la durée totale vaut la moitié de celle de la séquence pyramidale du degré suivant ?

b) Quelle devrait être la durée k du repos pour que, lors d'une séquence d'entrainement de degré n, le temps total de repos soit égal à la moitié du temps de course ?

c) Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles le temps k obtenu ci-dessus est un nombre naturel ?

3. Les droites BC et AD sont sécantes en O, avec B et C du même côté de O, ainsi que A et D. En outre, $|BC| = |AD|$, $2|OC| = 3|OB|$ et $|OD| = 2|OA|$. Les points M et N sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Les quadrilatères $ADPM$ et $BCQM$ sont des parallélogrammes. La droite CQ coupe MN et MP respectivement en X et Y. Démontrer que les triangles MXY et QXN ont même aire.

4. Soit a et b deux naturels non nuls tels que $c = a + b - 2\sqrt{ab+1}$ soit entier.

a) Pour quelles (éventuelles) valeurs de a et b l'entier c est-il strictement négatif ?

b) Pour quelles (éventuelles) valeurs de a et b l'entier c prend-il la valeur 75 ?

c) Pour quelles (éventuelles) valeurs de a et b l'entier c est-il premier ?

6.2 Finale 2016

1. Jules a inventé pour ses affaires l'opération $\boxtimes$: pour tous entiers x et y,

$$x \boxtimes y = x \cdot (x + y).$$

Par exemple, $2 \boxtimes 3 = 2 \cdot (2 + 3) = 10$.

a) Trouver tous les couples (x, y) d'entiers tels que $x \boxtimes y = 28$.

b) Combien existe-t-il de couples (x, y) d'entiers tels que $x \boxtimes y = 2016$?

c) La multiplication ordinaire étant commutative, $xy - yx = 0$ pour tous x et y. Que vaut $x \boxtimes y - y \boxtimes x$?

d) Dans quels cas a-t-on $x \boxtimes y = y \boxtimes x$?

2. a) Si $a = 25$, existe-t-il un nombre naturel b tel que $a - b = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

b) Existe-t-il deux nombres naturels a et b tels que $a - b = \sqrt{a} + \sqrt{b} = 13$?

c) Prouver que s'il existe des nombres naturels non tous deux nuls a et b tels que $a - b = \sqrt{a} + \sqrt{b} = m$, alors m est impair.

3. Un hexagone régulier H est choisi une fois pour toutes. Appelons ici *assignation* le placement de 3 boules noires indiscernables, 2 boules jaunes indiscernables et 1 boule rouge en les 6 sommets de H, une boule par sommet.

a) Combien existe-t-il d'assignations ?

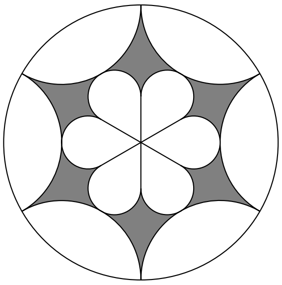
b) Disons que deux assignations sont *de même type* s'il existe une isométrie du plan qui conserve H et applique la première des deux assignations sur l'autre. Combien existe-t-il de types d'assignations ?

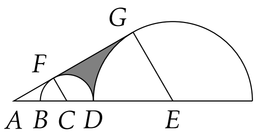
4. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, et t sa tangente en B. Une droite passant par A recoupe $\mathscr{C}$ en M. La droite OM coupe t en E. La tangente à $\mathscr{C}$ en M coupe AB en P et t en C. Démontrer que AM est perpendiculaire à EP.

6.3 Finale 2017

1. Cinq points distincts du plan ont des nombres entiers aussi bien pour abscisse que pour ordonnée. Montrer que, parmi ces cinq points, il en existe deux qui déterminent un segment dont le milieu a aussi une abscisse et une ordonnée entières.

2. La rosace ci-dessous, à gauche, est tracée en réunissant des copies du motif figuré à droite, qui est construit à l'aide de deux demi-cercles centrés en C et en E, auxquels FG est tangente.





a) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{EAG}$?

b) Montrer que $|AD| = |DE|$.

c) Calculer le rapport $\dfrac{|DE|}{|BC|}$.

d) Si le cercle centré en C est de rayon 1, quelle est l'aire de la partie ombrée de la rosace ?

3. On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- Aucun de ses chiffres n'est nul ;
- Il s'écrit avec des chiffres tous différents ;

• Il est divisible par chacun d'eux.
Par exemple, 24 est digisible (car il est divisible par 2 et par 4) ; 324 est digisible (car il est divisible par 3, par 2 et par 4) ; 32 n'est pas digisible (car il n'est pas divisible par 3).

a) Proposer un autre nombre digisible à deux chiffres.

b) Proposer un nombre digisible à quatre chiffres.

c) Soit n un entier digisible s'écrivant avec un 5.

i. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

ii. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

iii. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

iv. Déterminer le plus grand entier digisible s'écrivant avec un 5.

4. Soit
$$E = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(2 + \frac{1}{b}\right)\left(3 + \frac{1}{c}\right),$$
où a, b et c sont trois nombres naturels distincts strictement supérieurs à 1.

a) Pour quels choix de a, b et c l'expression E est-elle la plus grande ?

b) Montrer que, dans tous les cas, $E \leqslant \frac{91}{8}$.

6.4 Finale 2018

1. Les nombres impairs sont écrits par lignes successives en suivant le modèle ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 3 & 5 & 7 & & & \\
 & & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & & \\
 & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 & \\
\iddots & & & & \vdots & & & & \ddots
\end{array}$$

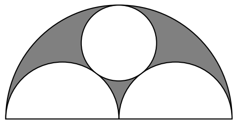
a) Combien de nombres compte la n^{e} ligne ?

b) Combien de nombres comptent en tout les $(n-1)$ premières lignes ?

c) Quel est le premier nombre de la n^{e} ligne ?

d) Quel est le dernier nombre de la n^{e} ligne ?

e) Quelle est la somme des nombres de la n^{e} ligne ?



2. Un tunnel, dont la coupe transversale est représentée ci-contre, comporte deux voies de circulation représentées par des demi-disques de même rayon et un conduit d'évacuation des gaz représenté par un disque plus petit. Les deux demi-disques et le petit disque sont tangents deux à deux et tangents intérieurement à un grand disque de diamètre égal à 12 m. Quel est le diamètre du conduit d'évacuation des gaz ?

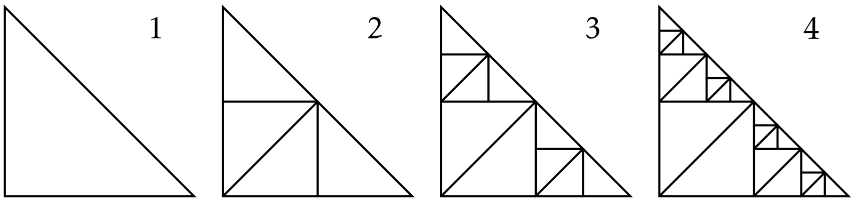
3. Un couple (a, b) de nombres naturels est dit *brillant* si le naturel $4ab + 1$ est un carré parfait.

a) Existe-t-il une infinité de couples brillants ?

b) Si p est un nombre premier quelconque, existe-t-il toujours un naturel b tel que (p, b) soit brillant ?

c) Combien existe-t-il de couples brillants (p, q) avec p et q tous deux premiers ?

4. Un triangle isocèle rectangle est découpé, étape après étape ; les quatre premières étapes sont représentées ci-dessous. À l'étape 1, le triangle est resté entier. À l'étape 2, il est découpé en quatre parties isométriques comme sur la seconde figure. À chaque étape suivante, les triangles du découpage précédent placés le long de l'hypoténuse du grand triangle sont redécoupés en quatre parties isométriques, toujours selon le même schéma.



a) Y a-t-il une étape où le triangle est découpé en 735 pièces ? Si oui, laquelle ?

b) Y a-t-il une étape où le triangle est découpé en 1534 pièces ? Si oui, laquelle ?

c) S'il y a p pièces à l'étape n, combien y en a-t-il à l'étape $(n+1)$?

d) Déterminer le nombre de pièces du découpage à l'étape n.

Chapitre 7

Finales maXi

7.1 Finale 2015

1. Trouver toutes les solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = z - 1 \\ \sqrt{y^2 - z} = x - 1 \\ \sqrt{z^2 - x} = y - 1, \end{cases}$$

d'inconnues réelles x, y, z.

2. Tous les mots non vides formés de lettres toutes différentes apparaissant dans l'ordre alphabétique sont rangés dans l'ordre déterminé par les deux règles suivantes :

- S'il y a dans le mot m_2 une lettre qui, dans l'alphabet, vient après toutes les lettres du mot m_1, alors m_1 précède m_2 ;
- Si les mots m_1 et m_2 diffèrent tout en ayant la même dernière lettre, distinguons deux cas :
  - Si de plus m_1 et m_2 ont chacun au moins deux lettres, alors m_1 et m_2 se rangent dans le même ordre que les mots obtenus en les privant de leur dernière lettre ;
  - Si de plus un des deux mots m_1 et m_2 est formé d'une seule lettre, alors il vient avant l'autre mot.

Le début du dictionnaire est donc A, B, AB, C, AC, BC, ABC, D, AD, BD, … Quel est le rang occupé, dans ce dictionnaire, par le mot DEFI ?

3. L'inégalité

$$x^3 + y^3 \leqslant x^3 \sqrt[3]{\frac{x}{y}} + y^3 \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

est-elle vraie pour tous les réels strictement positifs x et y ?

4. Dans le triangle ABC, le point M est le milieu de $[AB]$ et D est le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. De plus, $MD \perp BD$.

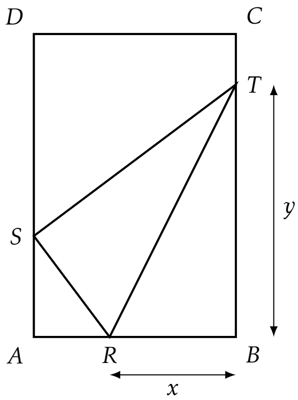
a) Indiquer comment construire (à la règle et au compas) un tel triangle.

b) Démontrer que $|AB| = 3|BC|$.

c) La condition $MD \perp BD$ est-elle nécessaire pour que $|AB| = 3|BC|$?

7.2 Finale 2016

1. Une feuille de papier rectangulaire $ABCD$ de largeur $|AB| = 4$ et de longueur $|BC| = 6$ est pliée de manière que le coin inférieur droit B se rabatte en S sur le bord gauche $[AD]$. Le pli suit le segment $[RT]$, avec R sur le bord inférieur $[AB]$ de la feuille et T sur son bord droit $[BC]$. Soit $x = |RB|$ et $y = |BT|$.



a) Quelles sont les valeurs minimale et maximale de x ?

b) Établir une relation entre x et y.

c) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (le triangle RST) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle BST ?

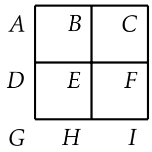
2. Résoudre l'équation $2^{2m+1} + 9 \cdot 2^m + 5 = n^2$, d'inconnues entières m et n.

3. Dans le plan, les triangles ABD et BCE sont extérieurs au triangle ABC et isocèles rectangles en D et en C. Le point H est l'intersection de CD et AE. Montrer que BH et AE sont perpendiculaires.

4. Une tablette rectangulaire de chocolat est partagée en mn carrés par $m-1$ lignes de cassure parallèles à la largeur et $n-1$ parallèles à la longueur.

a) Pour obtenir finalement mn petits morceaux carrés, je casse de manière répétée un des morceaux que j'ai selon ce qui reste d'une des lignes de cassure d'origine. Combien de cassures devrai-je faire au minimum ? au maximum ?

Une *dislocation* de la tablette de chocolat est une liste $\big([A_1B_1],[A_2B_2],\ldots,[A_kB_k]\big)$ de segments telle que les cassures, dans cet ordre, le long de ces segments, réalisent le partage de la tablette en petits carrés. Par exemple, pour la tablette 2×2 ci-contre, $\big([DF],[BE],[EH]\big)$ est une dislocation. Soit $f(m,n)$ le nombre de dislocations d'une tablette $m\times n$.



b) Montrer que $f(2,2)=4$.

c) Que vaut $f(2,3)$?

d) Déterminer $f(2,n)$ en fonction de $f(2,1)$, $f(2,2)$, ..., $f(2,n-1)$.

e) Pour quelles valeurs de n le naturel $f(2,n)$ est-il divisible par 11 ?

7.3 Finale 2017

1. Au départ, sept nains ont chacun un verre contenant une certaine quantité de lait. Cette quantité peut différer de verre à verre ; certains verres peuvent ne pas contenir de lait, mais la quantité totale n'est pas nulle.

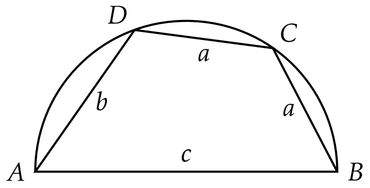
Le premier nain verse tout le contenu de son verre dans les autres verres, en le répartissant équitablement (et sans perte). Ensuite, le deuxième nain fait de même avec le nouveau contenu de son verre, puis le troisième aussi, etc., jusqu'au septième. Les nains constatent alors que chaque verre contient exactement la quantité qu'il avait au départ.

a) Au départ, quel nain a le verre qui contient le moins de lait et en quelle quantité ?

b) Est-il vrai que les quantités contenues au départ dans les verres décroissent du premier au dernier nain ?

c) Si la quantité totale de lait est de 21 dL, les quantités de départ dans les différents verres sont-elles déterminées ? Quelles sont toutes les possibilités ?

2. Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle dont $[AB]$ est un diamètre ; $|BC| = |CD| = a$; $|DA| = b \neq a$ et $|AB| = c$. Si a, b, c sont des nombres naturels, montrer que c ne peut pas être un nombre premier.



3. On considère la suite définie, pour tout n, par :

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{2n} = t_n \\ t_{2n+1} = 1 - t_n. \end{cases}$$

a) Quelles sont les valeurs possibles des différents termes de la suite ?

b) Calculer t_{2017}.

c) La suite contient-elle 3 termes consécutifs égaux ?

d) Exprimer la valeur de t_k en fonction de la décomposition de k en somme de puissances distinctes de 2.

e) La suite est-elle périodique ?

4. Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, les angles en B et en C sont supérieurs à 120°. Montrer que $|AC| + |BD| > |AB| + |BC| + |CD|$.

7.4 Finale 2018

1. Les nombres réels a, b, c, d et e me sont présentement inconnus, mais je connais deux choses : d'abord leur ordre $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, ensuite les résultats, en vrac, des dix additions de ces nombres deux à deux. Ces informations me permettent-elles de trouver :

a) La somme $a + b + c + d + e$?

b) La valeur de c ?

c) La valeur de chacun des nombres a, b, c, d, e ?

2. Soit a et b deux nombres réels tels que $\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right)\left(b + \sqrt{1 + b^2}\right) = 1$. Que vaut $(a + b)^{2018}$?

3. Dans le triangle acutangle ABC, $|AB| \neq |AC|$. Les points P et Q sont les pieds des hauteurs issues de B et de C respectivement. La droite PQ coupe la droite BC en R. Montrer que les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{PRB}$ sont perpendiculaires.

4. Les nombres entiers de 0 à 2018 sont écrits au tableau. Un élève choisit à son gré deux d'entre eux, les efface et les remplace par un seul nombre égal à :

- Leur somme s'ils sont tous deux pairs ;
- L'opposé de leur somme s'ils sont tous deux impairs ;
- Le nombre impair moins le nombre pair s'ils sont de parités différentes.

L'opération est répétée jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre au tableau.

a) Donner un exemple de résultat final qu'il est possible d'obtenir.

b) Combien de résultats différents peuvent être obtenus, selon l'ordre dans lequel les nombres sont pris en compte ? Quels sont ces résultats ?