Cercles et les triangles bien vivants

La géométrie élémentaire est-elle toute simple ?

Michel Roelens

UITWISKELING

Aperçu

1. Aperçu 0’
2. Le disque journalier de la chèvre 10’
3. Le triangle du détour 10’
4. Les angles déchirés du triangle 10’
5. Le triangle en équilibre, mais quel triangle ? 10’
6. Le quadrilatère inscrit de Ptolémée 10’
7. Juste un petit exercice sur le théorème de Pythagore ? 10’

Le disque journalier de la chèvre

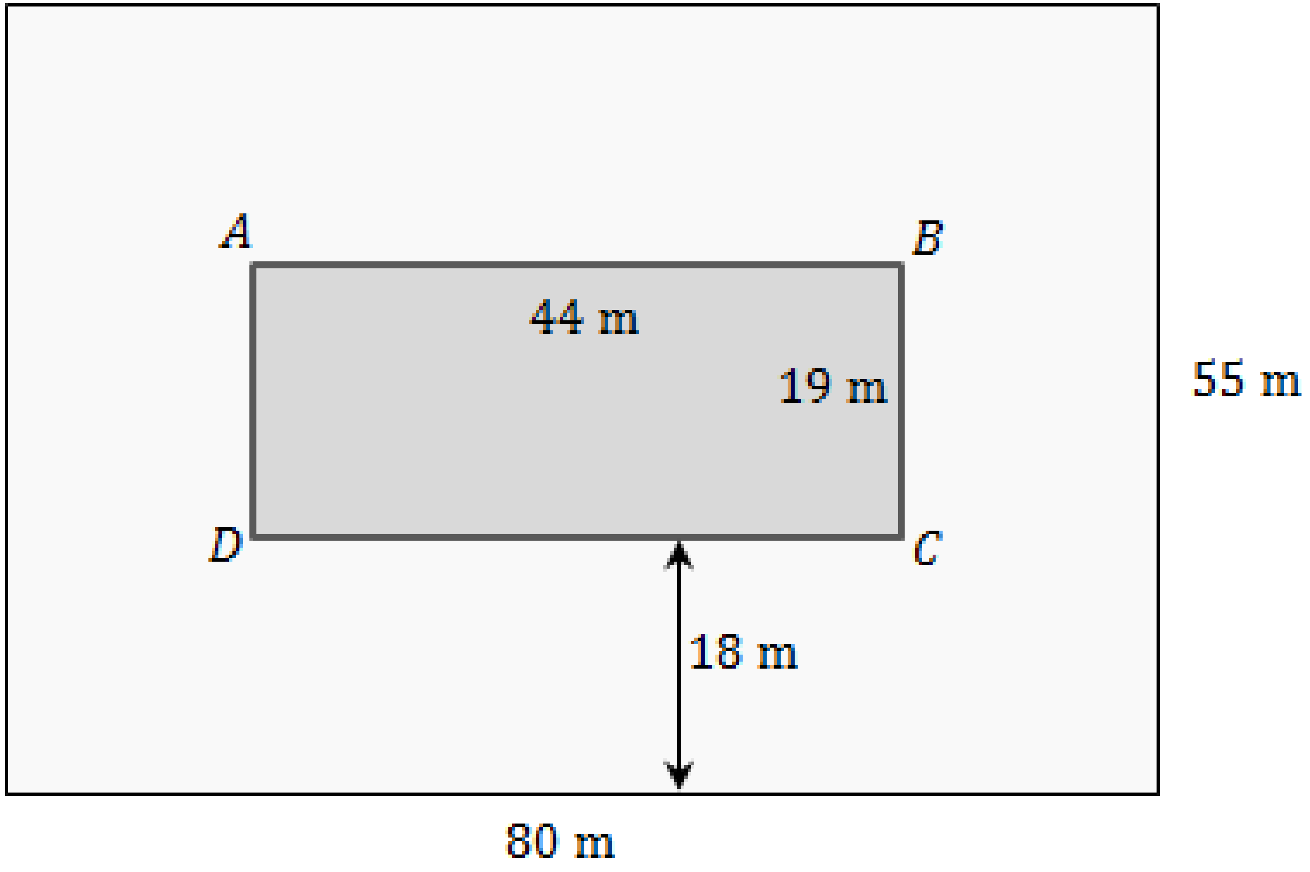
Eggermont, H., Roelens, M., Vanlommel, E. (2014), Meetkundige plaatsen. *Uitwiskeling 30/2*.

Une prairie rectangulaire de 80 m sur 55 m.

Une chèvre attachée à un poteau par une corde de 18 m.

La chèvre mange un disque entier d'herbe par jour. Elle y a droit.

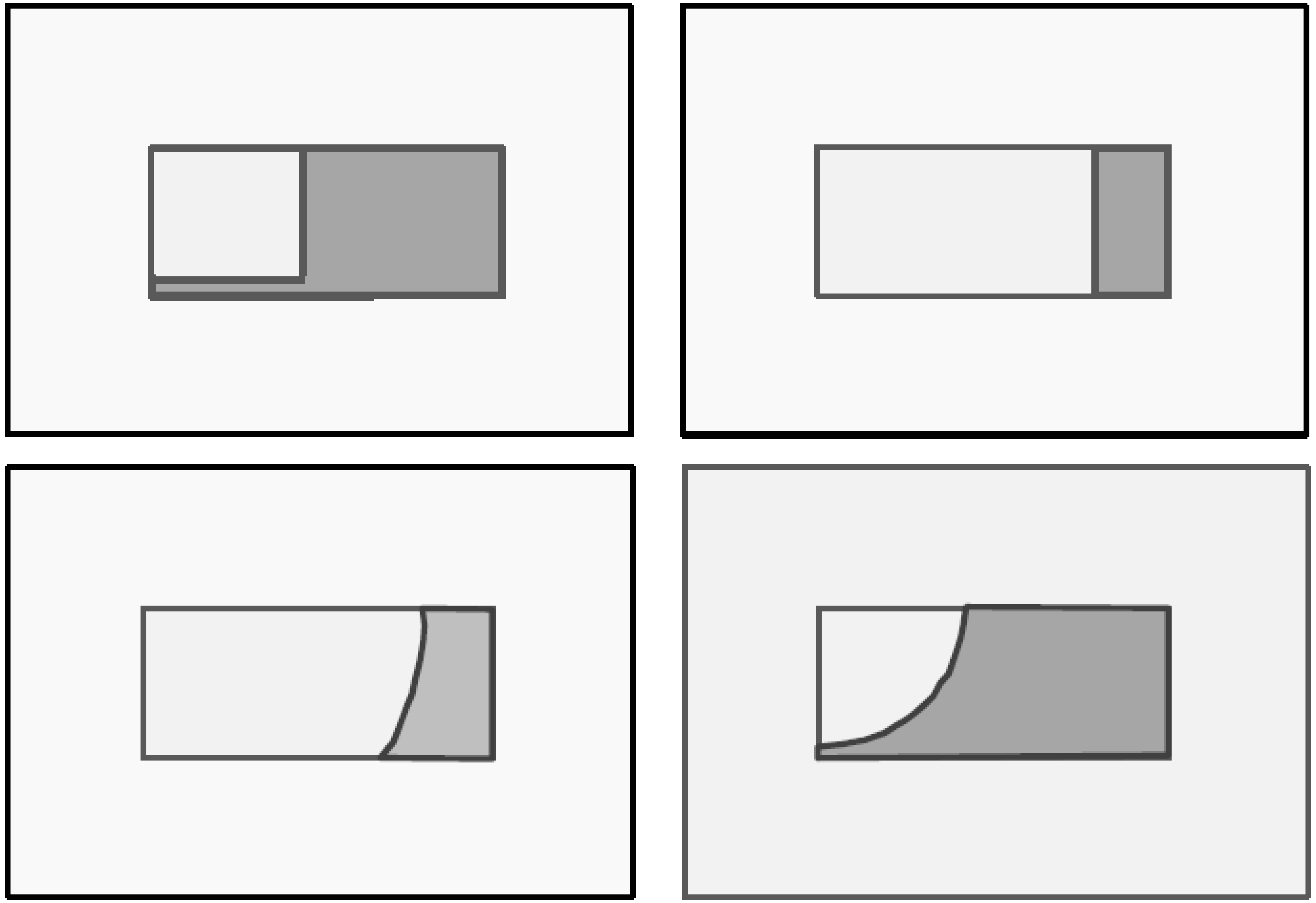
Le disque journalier de la chèvre



Le premier jour : piquet en A.

Quel est le lieu où on peut mettre le piquet le deuxième jour ?

Le disque journalier de la chèvre



A

B

C

D

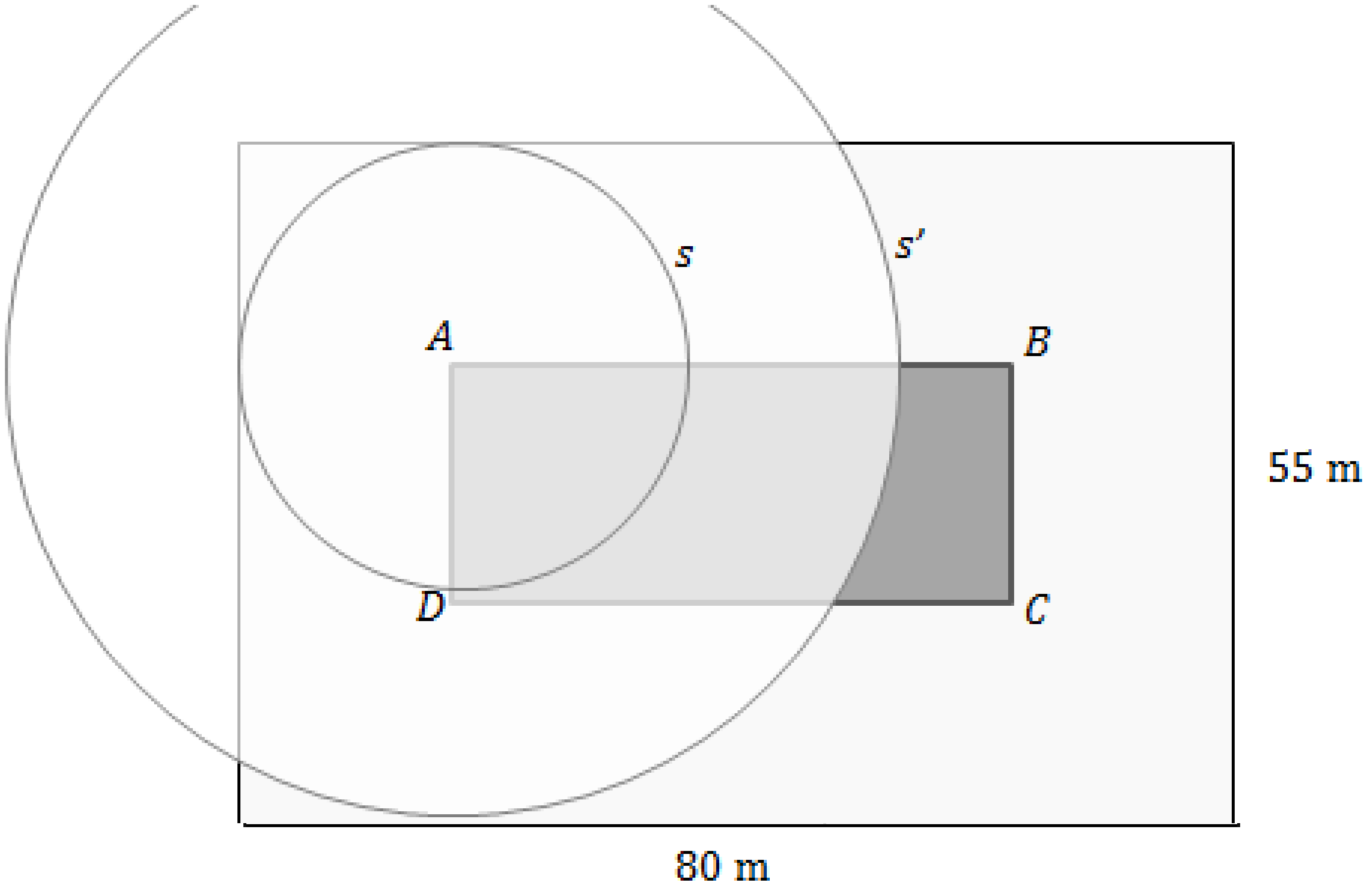
Le disque journalier de la chèvre

La réponse est **C**.

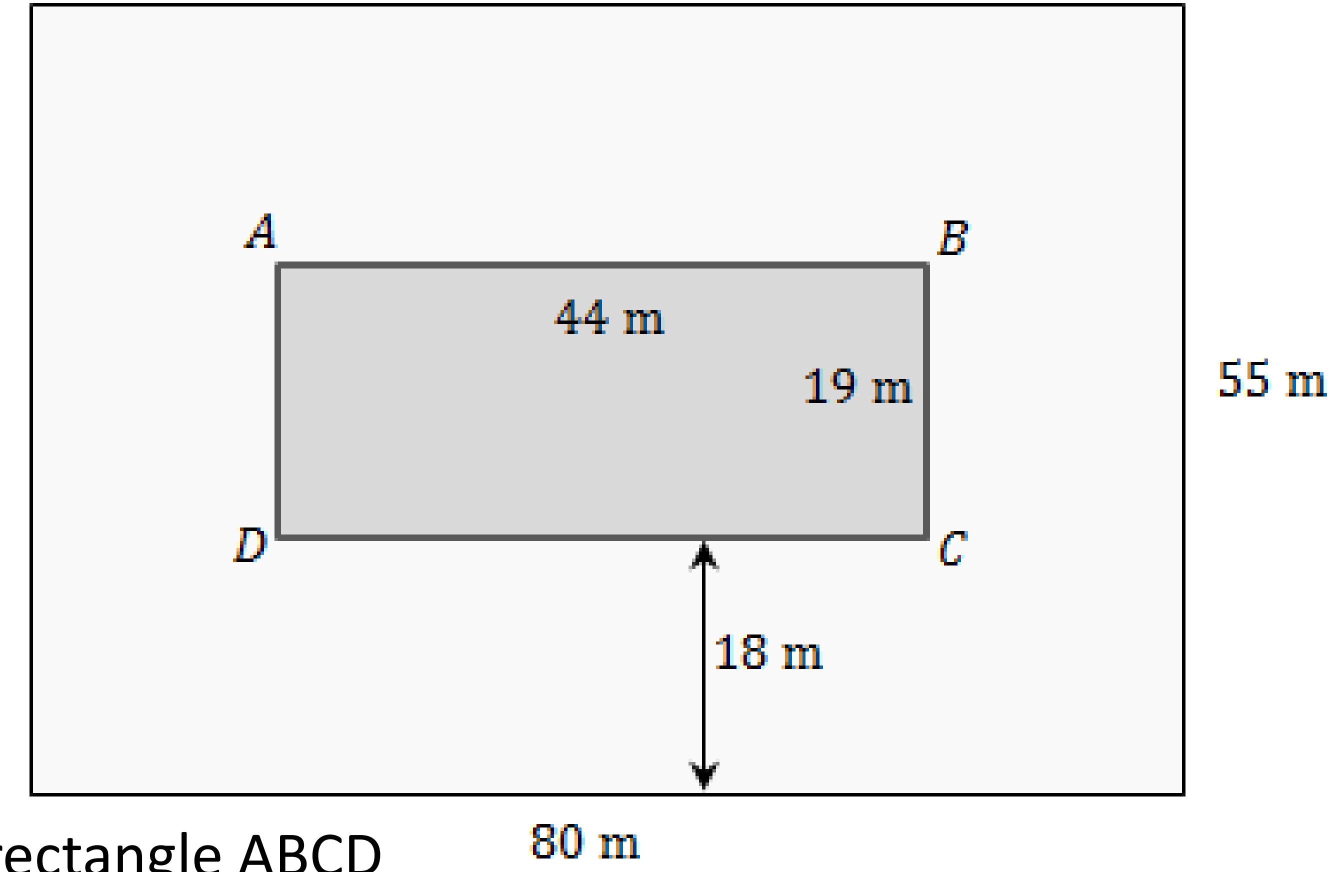
À une distance de 18m du bord mais aussi du disque mangé du premier jour.

Donc :

Rectangle *ABCD* \ disque s'



Le disque journalier de la chèvre

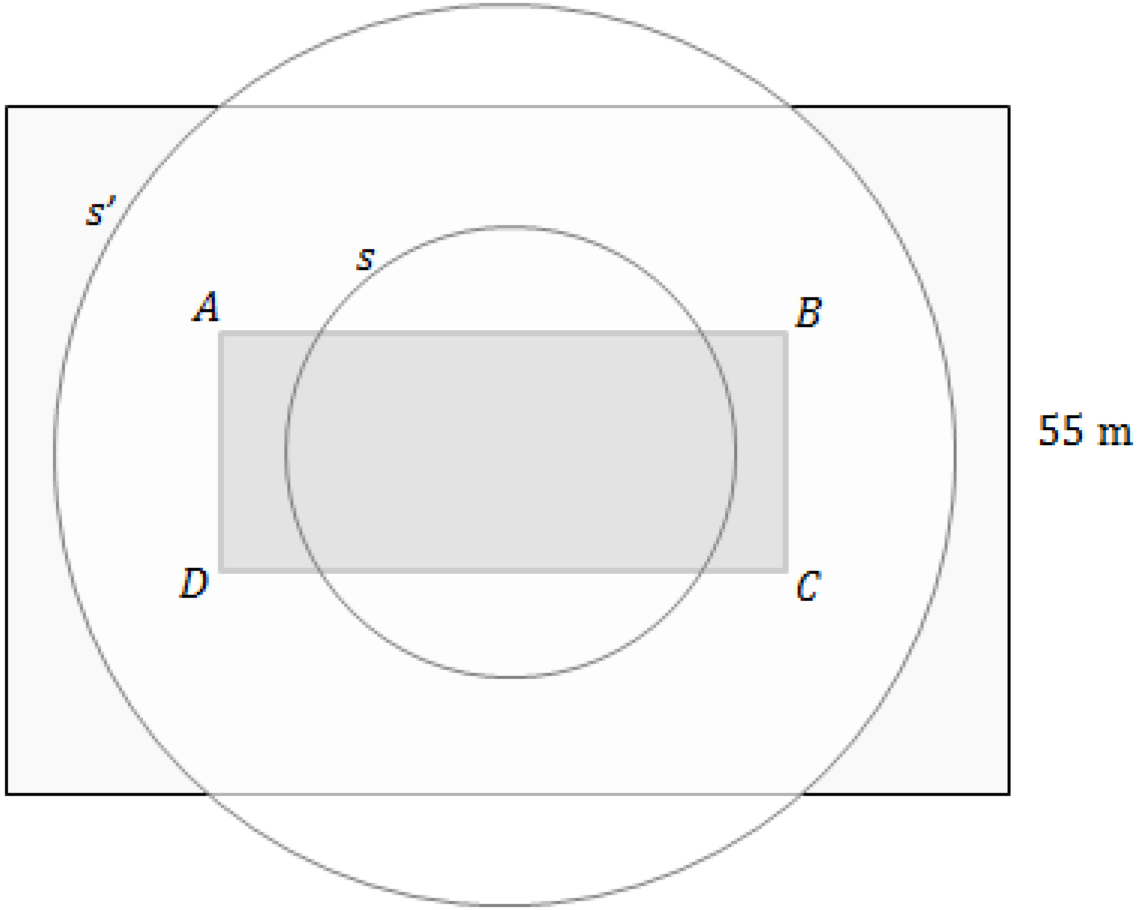


Le premier jour : piquet au centre du rectangle ABCD

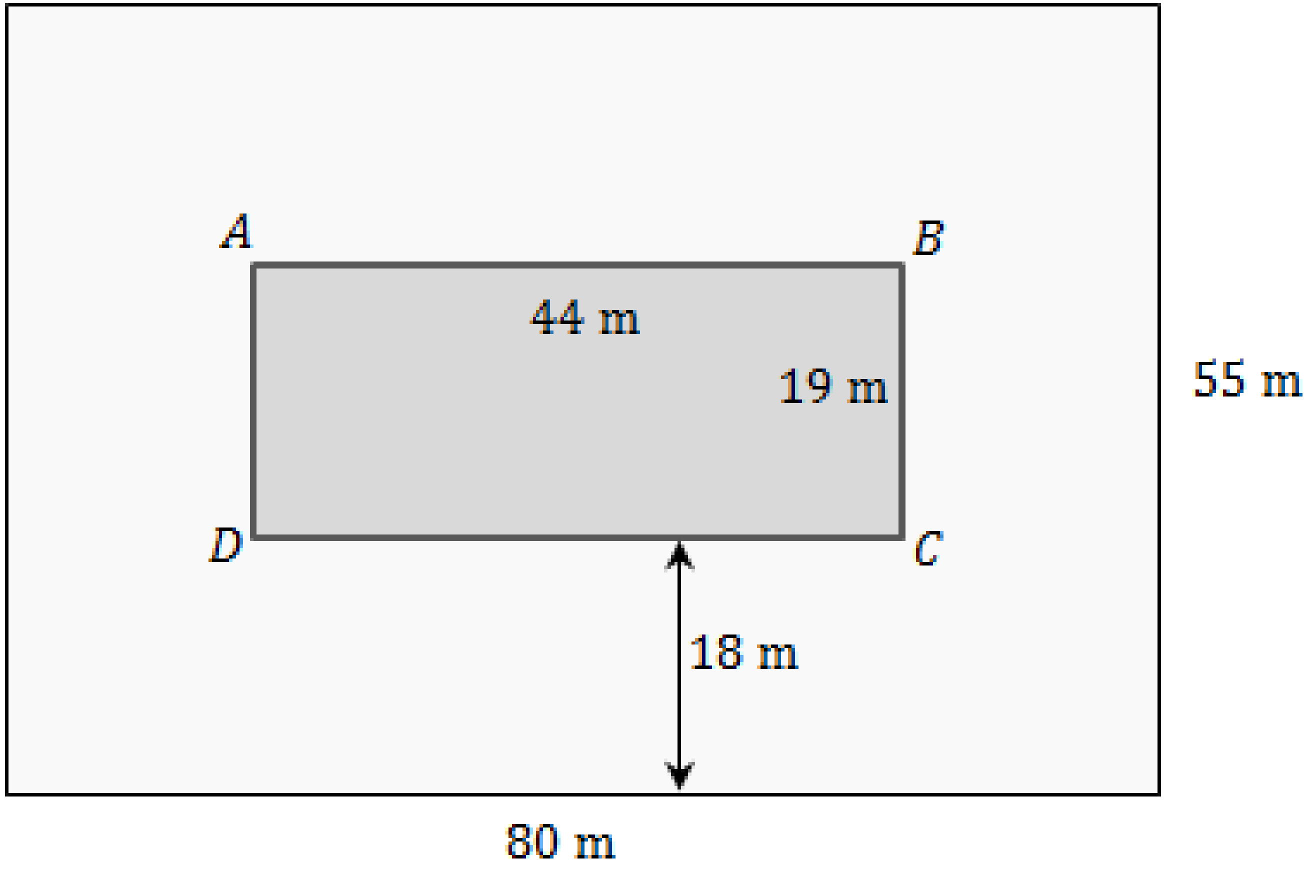
Quel est le lieu où on peut mettre le piquet le deuxième jour ?

Le disque journalier de la chèvre

L’ensemble vide.



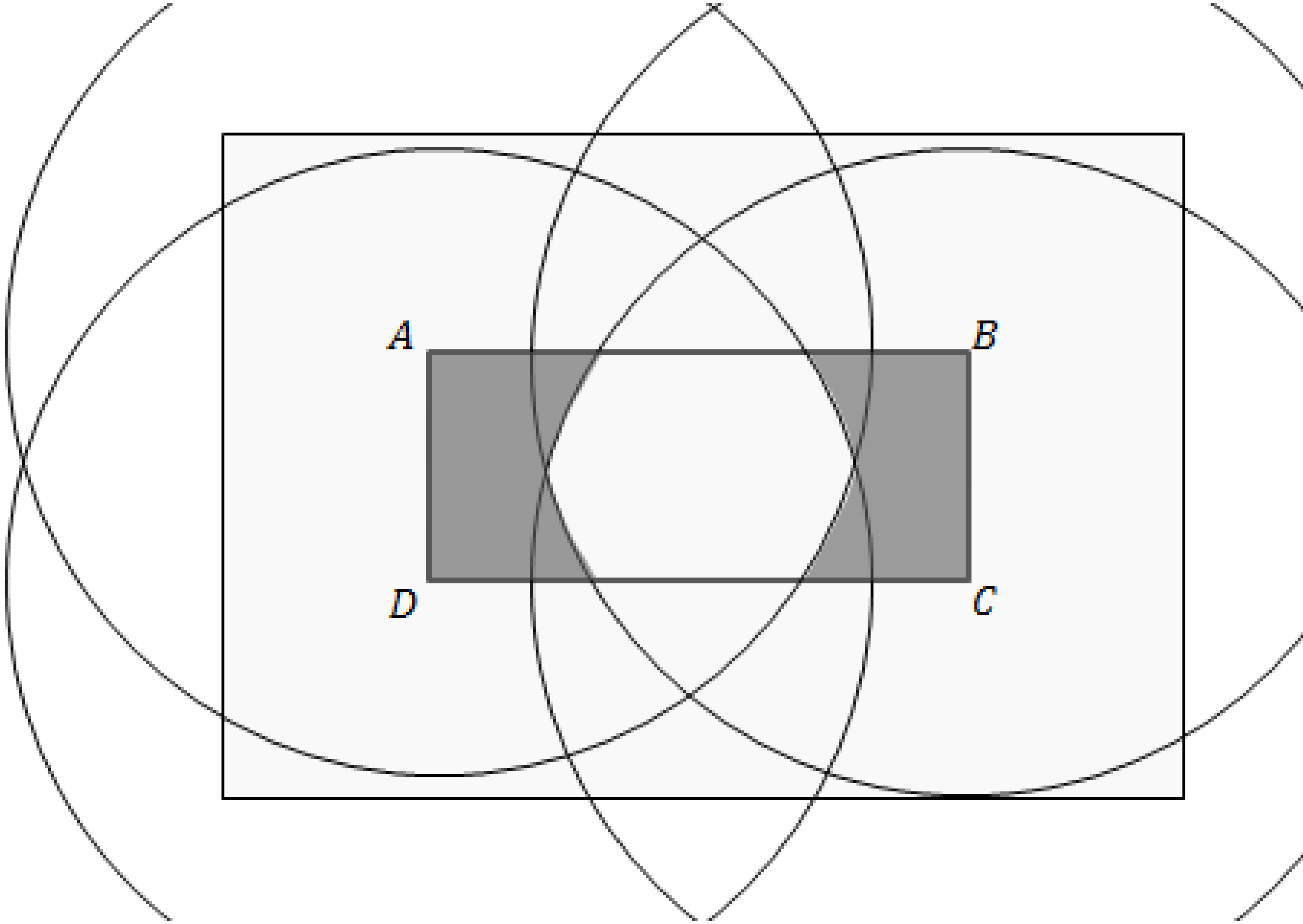
Le disque journalier de la chèvre



GeoGebra

Quel est le lieu où on peut mettre le piquet le premier jour, tel que le lieu où l'on peut mettre le piquet le deuxième jour ne soit pas vide ?

Le disque journalier de la chèvre



Le disque journalier de la chèvre

Un point P appartient à ce lieu

$\Leftrightarrow$ rectangle $(ABCD) \setminus$ disque $(P, 36) \neq \emptyset$

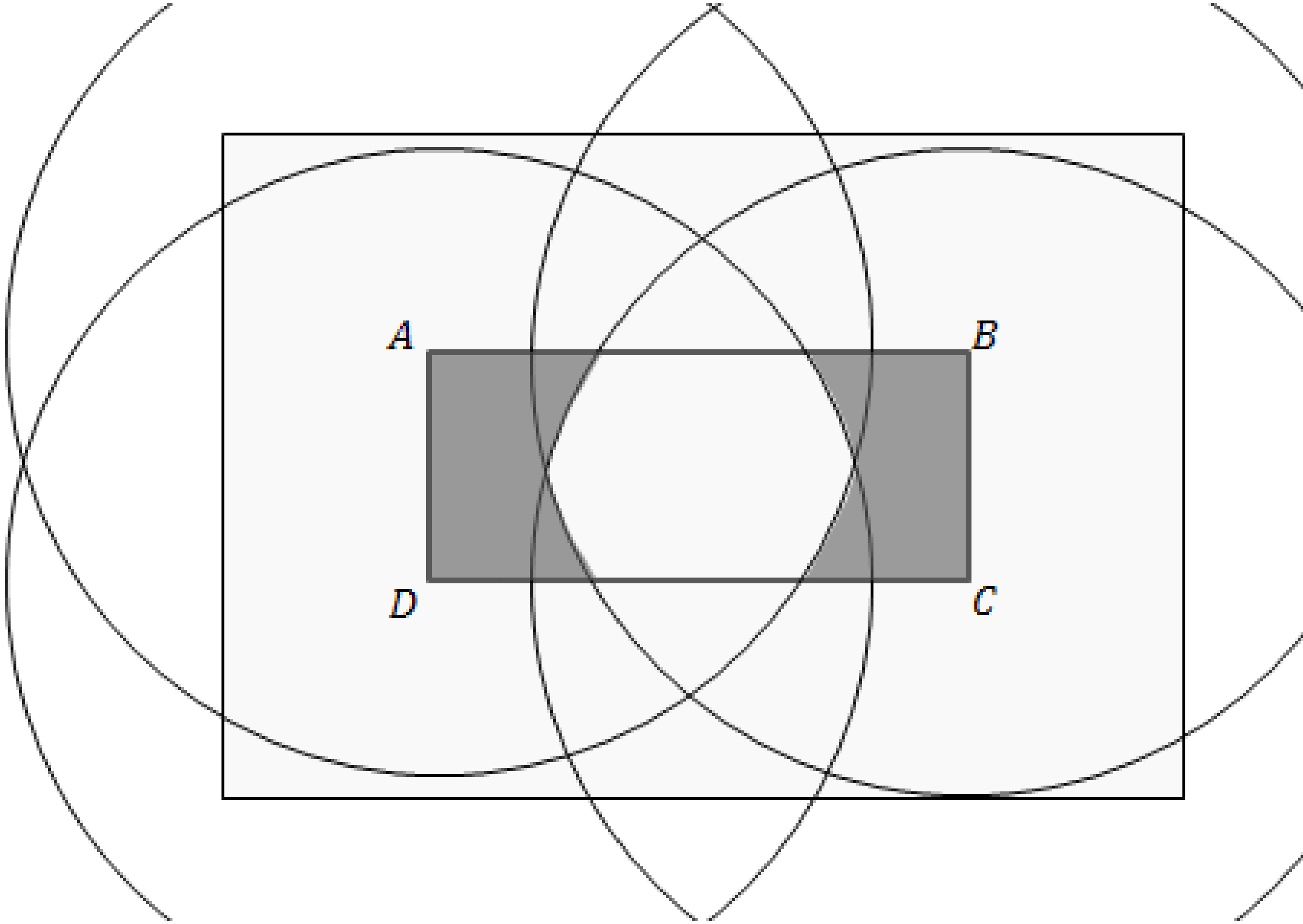
$\Leftrightarrow$ au moins un des points A, B, C, D se trouve hors du disque $(P, 36)|$

$\Leftrightarrow |AP| > 36 \;\; \vee \;\; |BP| > 36 \;\; \vee \;\; |CP| > 36 \;\; \vee \;\; |DP| > 36$

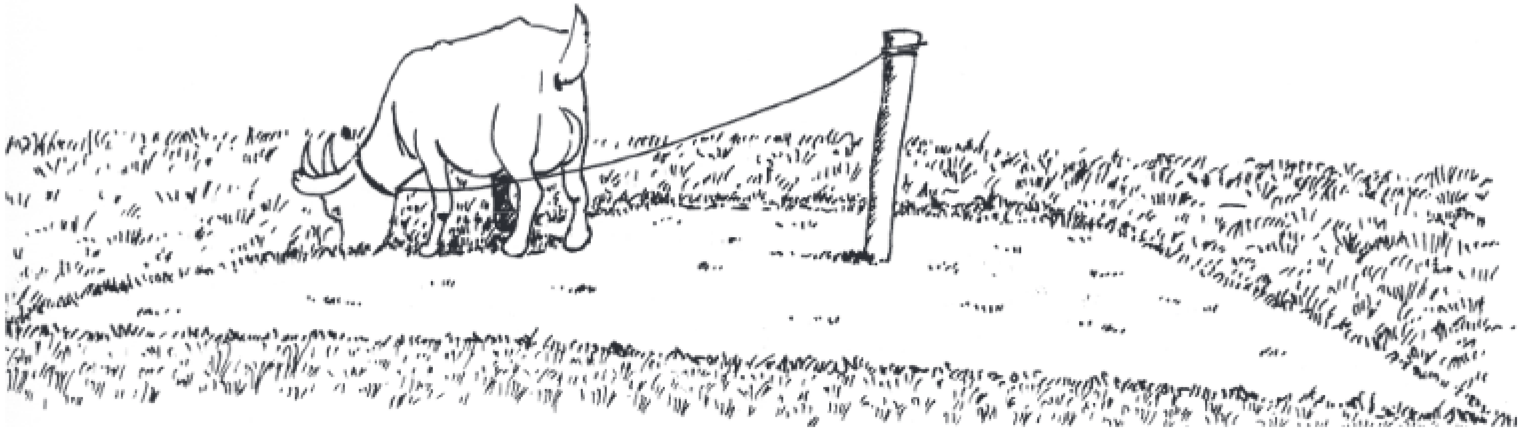
$\Leftrightarrow$ P se trouve hors d'au moins un des disques de centre A, B, C, D et rayon 36

$\Leftrightarrow$ P ne se trouve pas dans l'intersection des disques de centre A, B, C, D et rayon 36

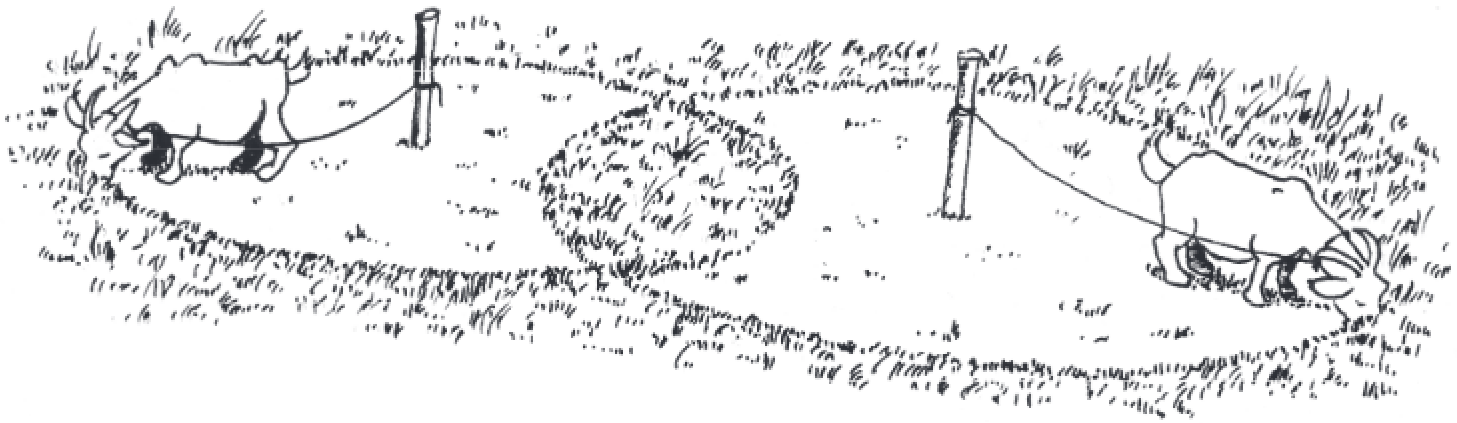
Le disque journalier de la chèvre



Le disque journalier de la chèvre



Le disque journalier de la chèvre

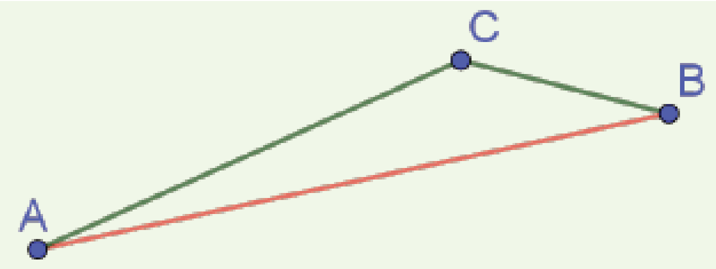


Le triangle du détour

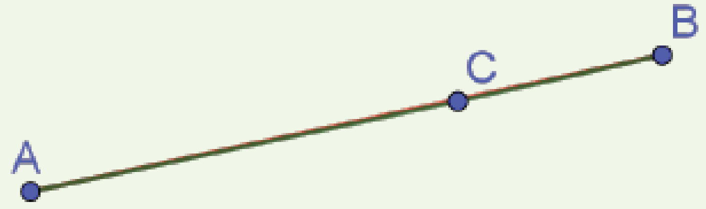
Roelens, M. (2022). Bewijzen met de driehoeksongelijkheid. *Uitwiskeling 38/3.*

Aller de *A* à *B*, en passant par le café *C*, est-ce un détour ?

Oui, sauf si *C* se trouve sur le segment [*AB*].



$$|AB| \leq |AC| + |CB|$$



$$|AB| = |AC| + |CB| \Leftrightarrow C \in [AB]$$

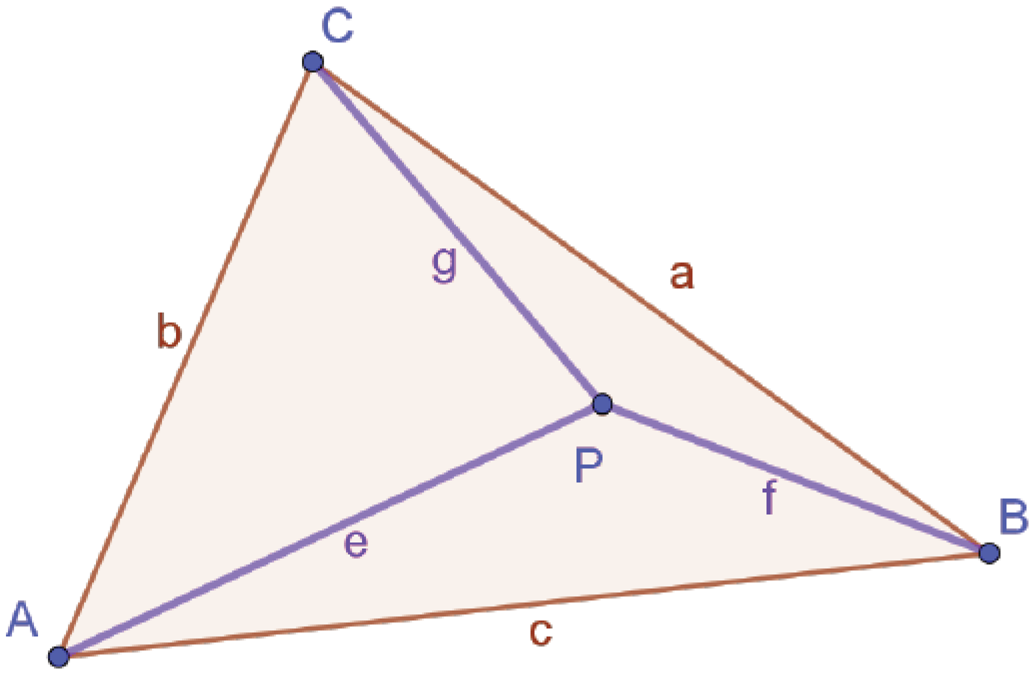
Le triangle du détour

Démontrer : pour tout point *P* à l'intérieur d'un triangle *ABC* de périmètre *p* :

$$\frac{p}{2} < |PA| + |PB| + |PC| < p$$

Première inégalité

$$\begin{array}{lll} a & < f + g & (\Delta BPC) \\ b & < g + e & (\Delta CPA) \\ c & < e + f & (\Delta APB) \\ \hline p & < 2(e + f + g) & \\ \frac{p}{2} & < e + f + g. & \end{array}$$



Le triangle du détour

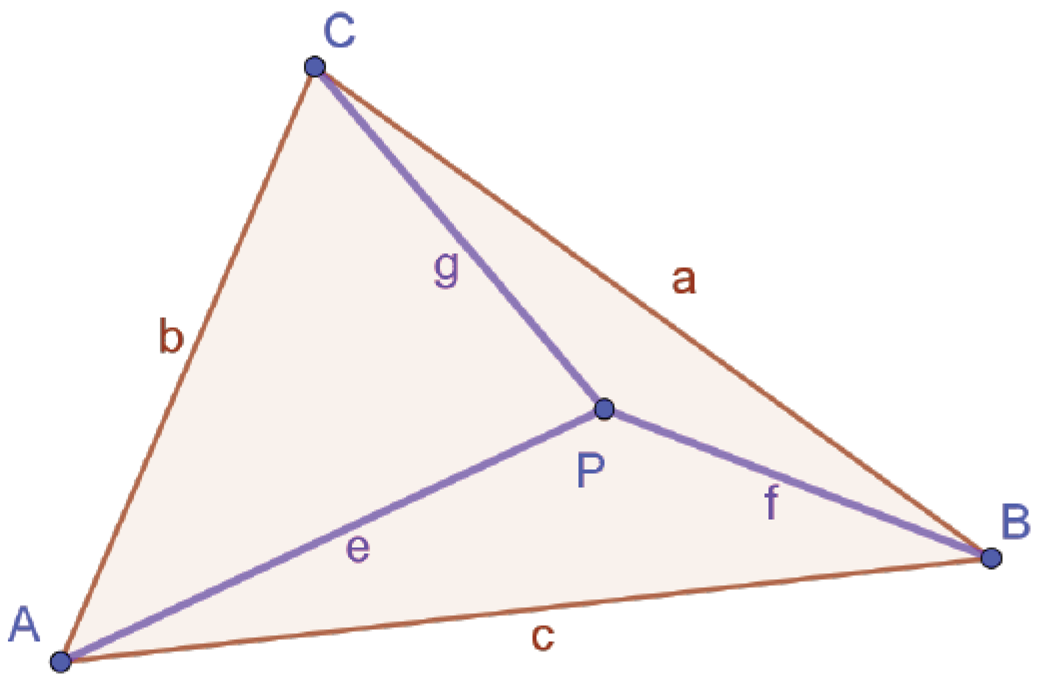
Démontrer : pour tout point *P* à l'intérieur d'un triangle *ABC* de périmètre *p* :

$$\frac{p}{2} < |PA| + |PB| + |PC| < p$$

Deuxième inégalité

Utilisons le théorème de l'élastique :

$$\begin{array}{rl} e+f & < a+b \\ f+g & < c+b \\ g+e & < a+c \\ \hline 2(e+f+g) & < 2p \\ e+f+g & < p. \end{array}$$



Théorème de l'élastique

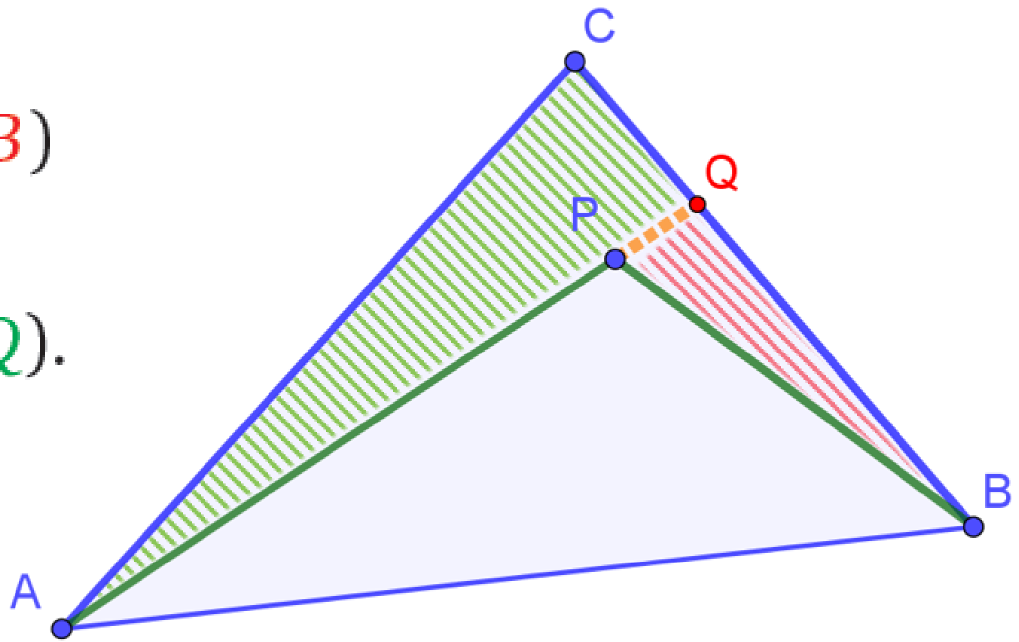
Pour tout point P à l'intérieur du triangle ABC:

$$|AP| + |PB| < |AC| + |CB|$$

Le triangle du détour

Mais maintenant, démontrer le théorème de l'élastique

$$
\begin{aligned}
|AP| + |PB| &< \underbrace{|AP| + |PQ|}_{|AQ|} + |QB| \quad (\Delta PQB)\\
&< |AC| + \underbrace{|CQ| + |QB|}_{|CB|} \quad (\Delta ACQ).
\end{aligned}
$$

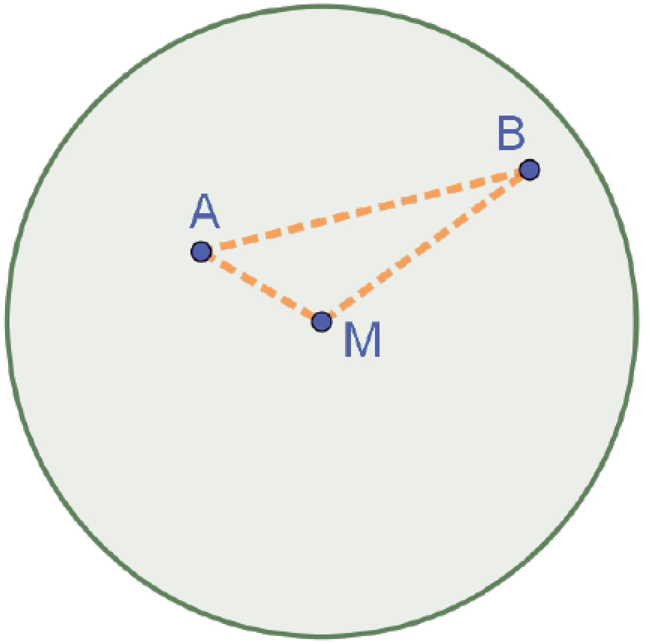


Le triangle du détour

Démontrer ce que l'on sait déjà ?

Démontrer que la distance entre deux points à l'intérieur d'un cercle, est moins que le diamètre.

$$|AB| \leq |AM| + |MB| < r + r = 2r$$



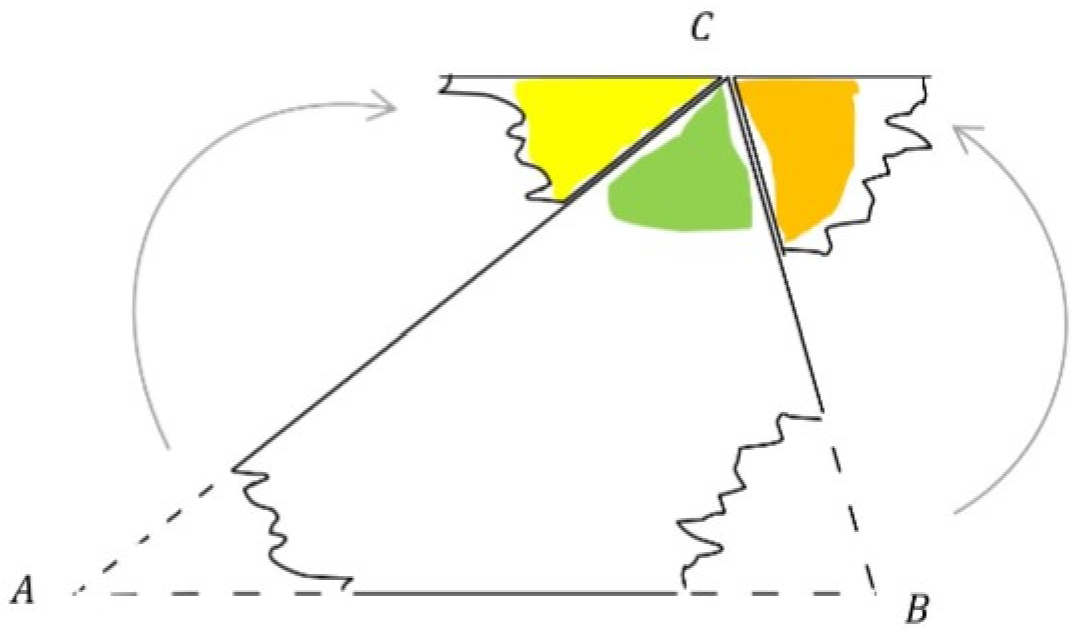
Les angles déchirés du triangle

Roelens, M. (2008). De som van de hoeken in een driehoek: een intéressant fout bewijs. *Uitwiskeling 24/2*.

Déchirons…

On voit que, pour un triangle ABC :
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

Démontrons-le.



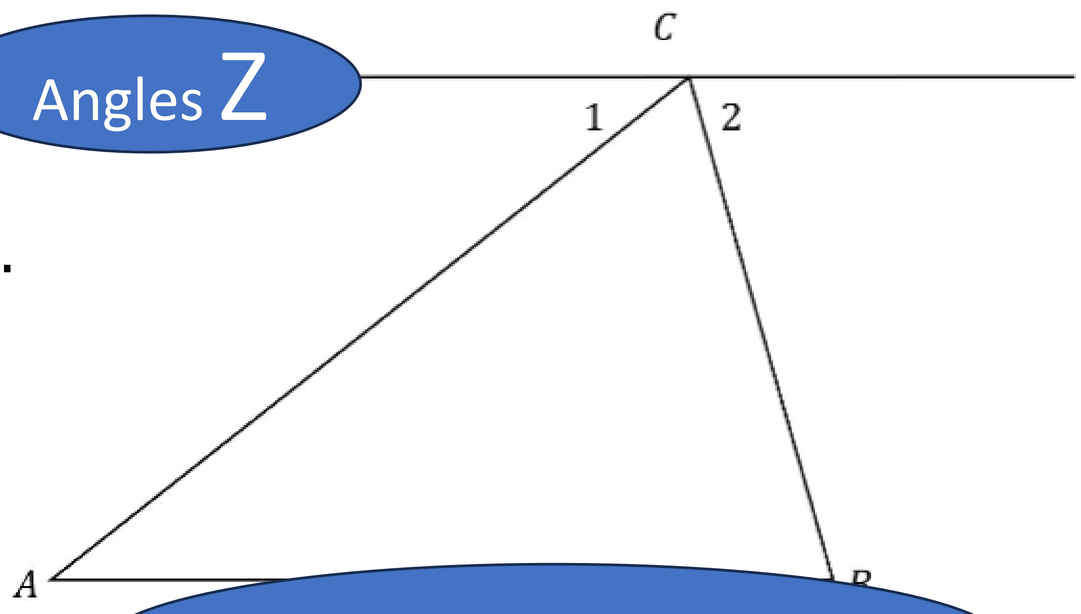
Les angles déchirés du triangle

Première démonstration

Dessinons la parallèle en C à AB.

On a : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} + \hat{C} = 180°$.

Angles Z



Deuxième démonstration

Dessinons des demi-droites en C

telles que $\widehat{C_1} = \hat{A}$ et $\widehat{C_2} = \hat{B}$.

L'inverse des angles Z

Alors les deux demi-droites sont parallèles à AB et forment donc une droite.

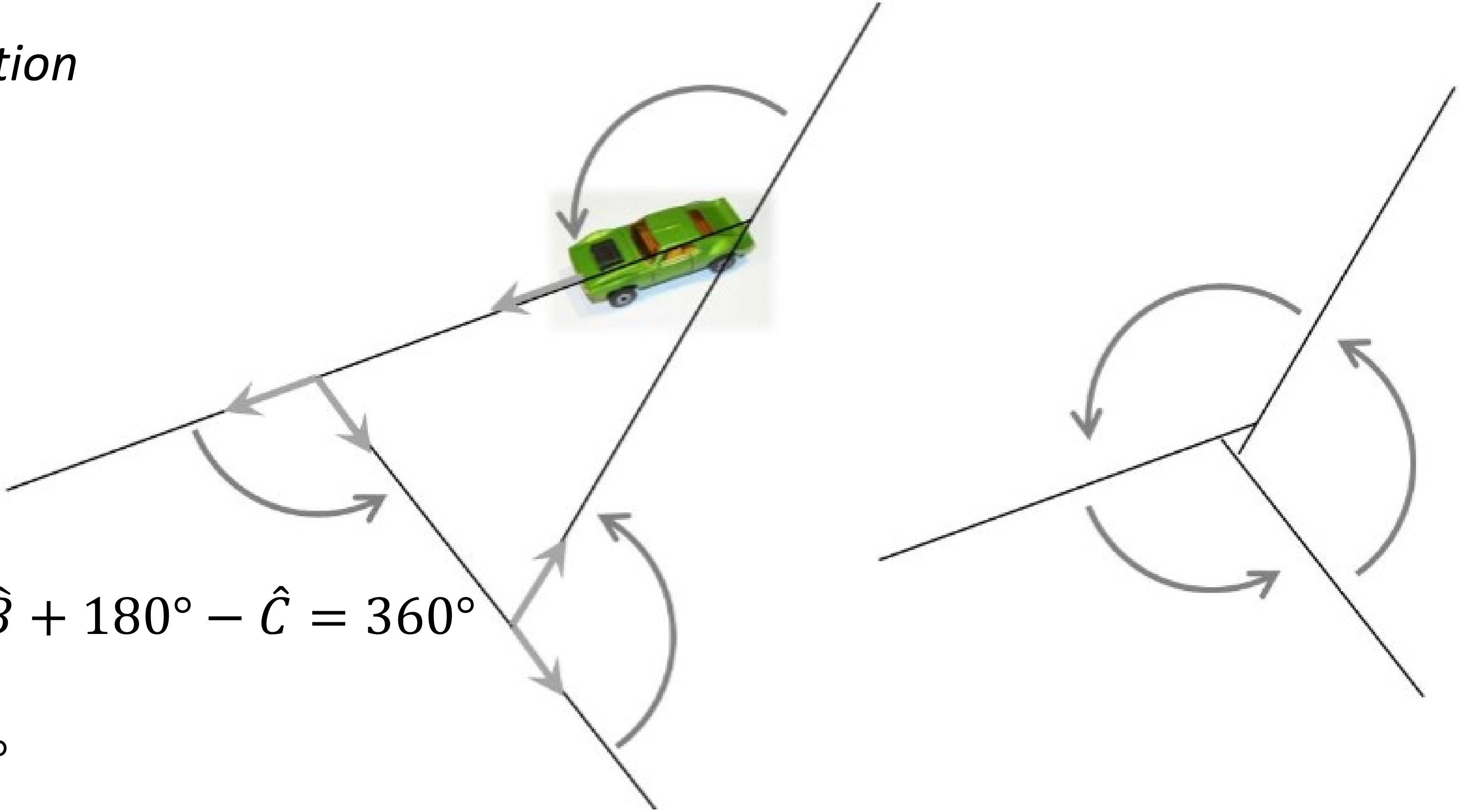
On a : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} + \hat{C} = 180°$.

Unicité de la parallèle

Les angles déchirés du triangle

Troisième démonstration

La voiture téléguidée



$$180° - \hat{A} + 180° - \hat{B} + 180° - \hat{C} = 360°$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

Les angles déchirés du triangle

Quatrième démonstration ?

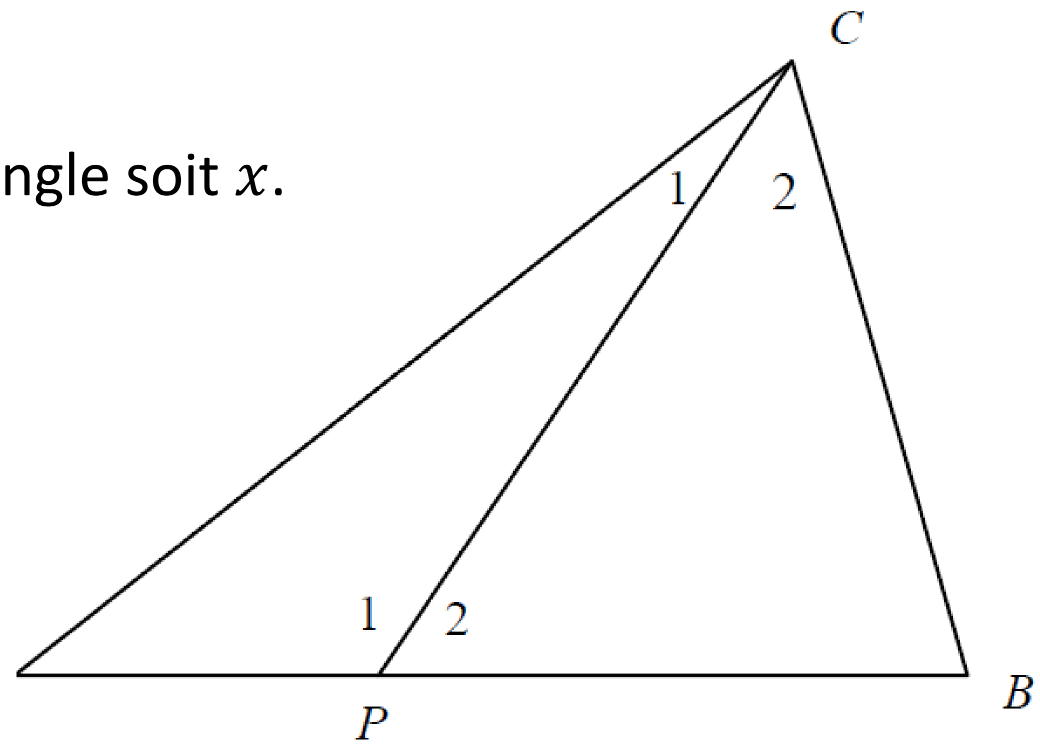
Supposons que la somme des angles d'un triangle soit x.

Démontrons que $x = 180°$.

$$\underbrace{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}_{x} = \underbrace{\hat{A}+\hat{C}_1+\hat{P}_1}_{x} + \underbrace{\hat{B}+\hat{C}_2+\hat{P}_2}_{x} - \underbrace{\hat{P}_{12}}_{180°}$$

$$x = 2x - 180°$$

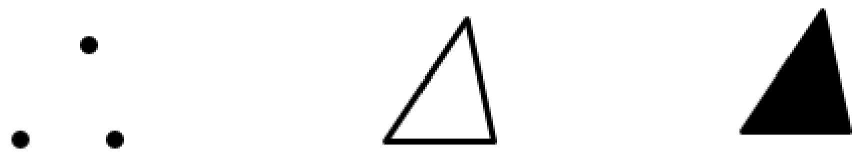
$$x = 180°.$$



Le triangle en équilibre, mais quel triangle ?

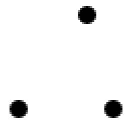
Roelens, M. (2005). Het zwaartepunt van een driehoek. Welke driehoek? *Uitwiskeling 21/1.*

Qu’est-ce qu’un triangle ?

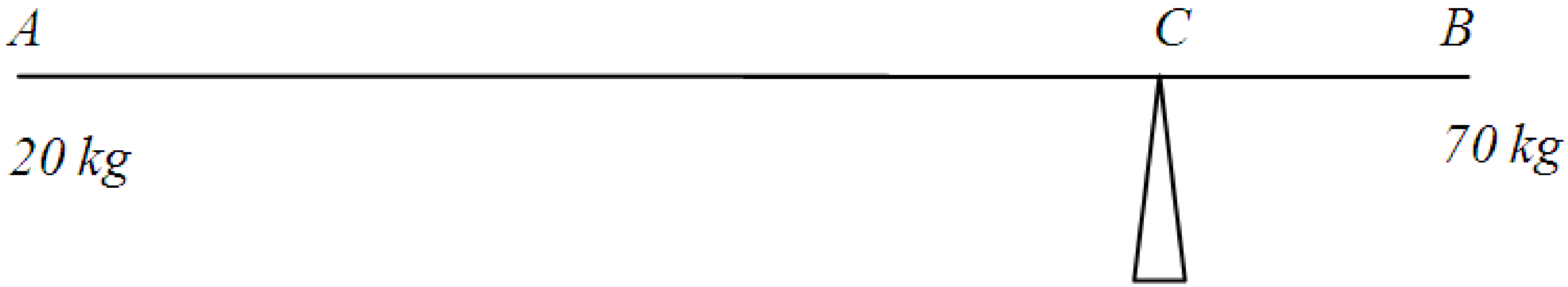


Le triangle en équilibre, mais quel triangle ?

Commençons par le triangle des trois points.



Le barycentre d'*A*dam (masse 20 kg) et son père *B*ernard (masse 70 kg), c'est le point C tel que la balançoire soit en équilibre.



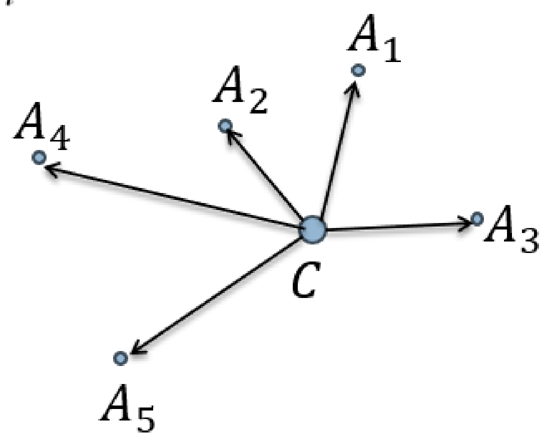
$$20\overrightarrow{CA} + 70\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

Le triangle en équilibre, mais quel triangle ?

On peut généraliser à plus de deux points :

le barycentre des points A_i de masses a_i, c'est le point C tel que

$$\sum_i a_i \overrightarrow{CA_i} = \vec{0}\,.$$

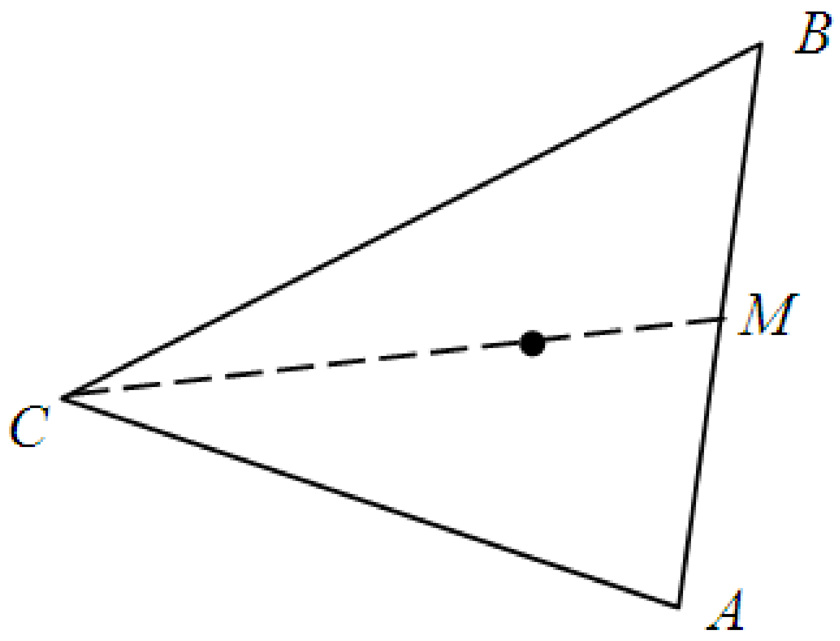


On peut grouper des points :

le barycentre de $\underbrace{A_1\ (a_1), A_2\ (a_2)}, A_3\ (a_3)$ c'est le barycentre de

$C'(a_1 + a_2), A_3\ (a_3)$ avec C' le barycentre de $A_1\ (a_1), A_2\ (a_2)$.

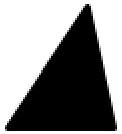
Le triangle en équilibre, mais quel triangle ?



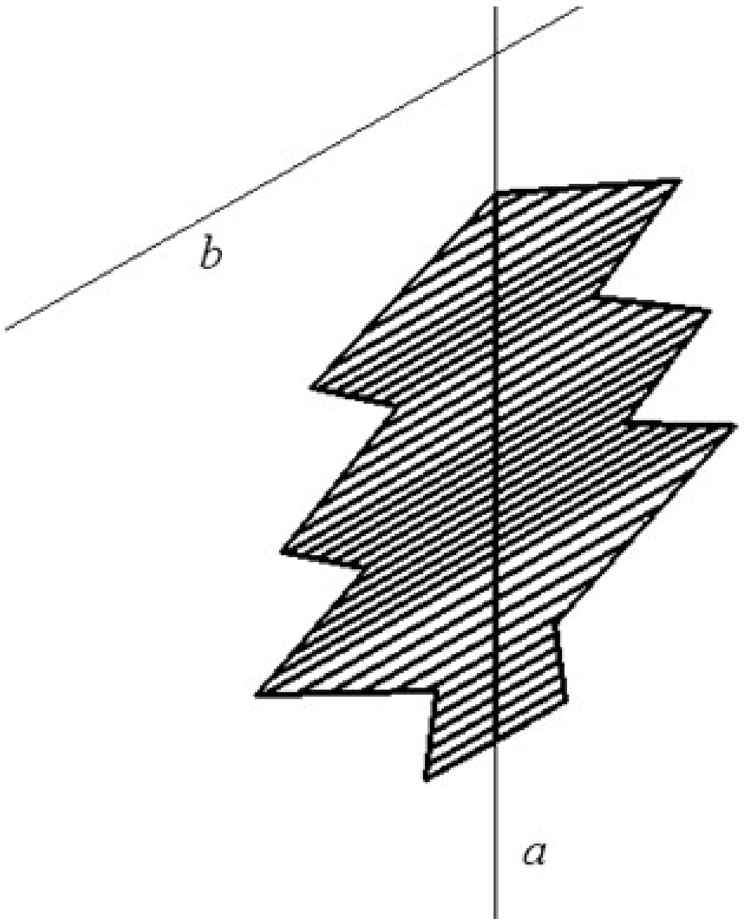
Donc, le centre de gravité du triangle des trois points est le point d’intersection des médianes.

Le triangle en équilibre, mais quel triangle ?

Passons au triangle plein.



Une figure qui possède un axe de symétrie orthogonale ou oblique, a son centre de gravité sur cet axe a.

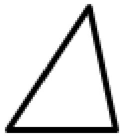


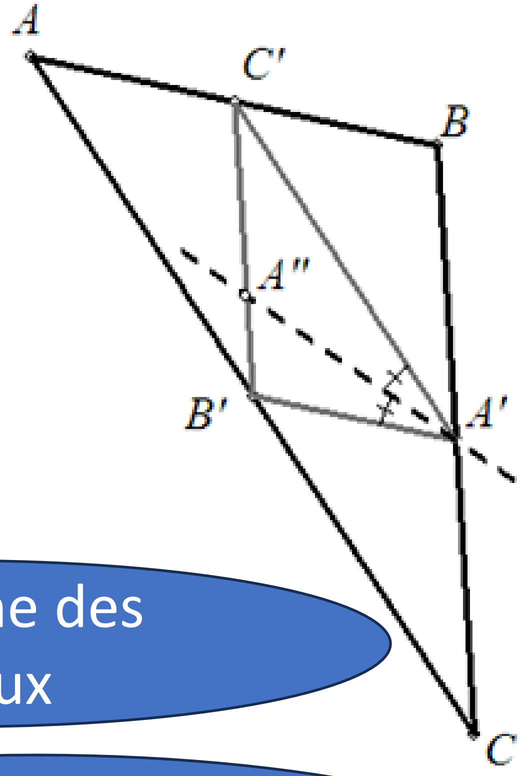
Appliquons-ça au triangle.

Le centre de gravité doit se trouver sur chaque médiane.

Donc, le triangle plein a le même centre de gravité que le triangle des trois points.

Le triangle en équilibre, mais quel triangle ?

Finalement, le triangle des côtés 



Remplaçons chaque côté par son milieu, avec comme masse la longueur de ce côté.

Remplaçons les milieux B' et C' par leur barycentre, c.à.d. par le point A'' tel que $|AC|\,\overrightarrow{A''B'} + |AB|\,\overrightarrow{A''C'} = \vec{0}$.

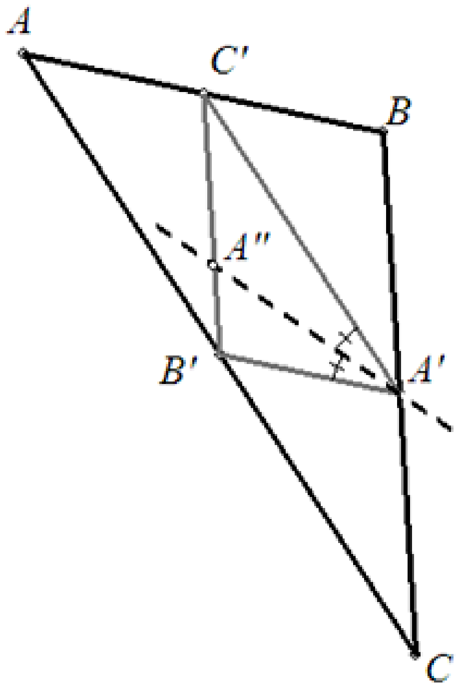
Théorème des milieux

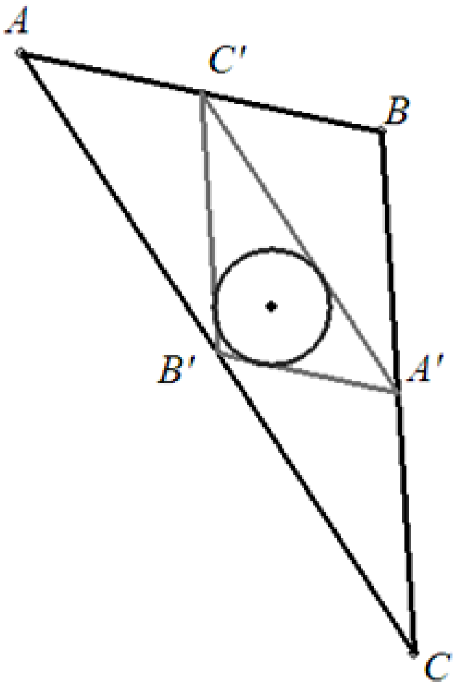
On a $\dfrac{|A''B'|}{|A''C'|} = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|A'B'|}{|A'C'|}$

L'inverse du théorème de la bissectrice dans un triangle

Et donc $A'A''$ est la bissectrice de $\widehat{B'A'C'}$.

Le triangle en équilibre, mais quel triangle ?



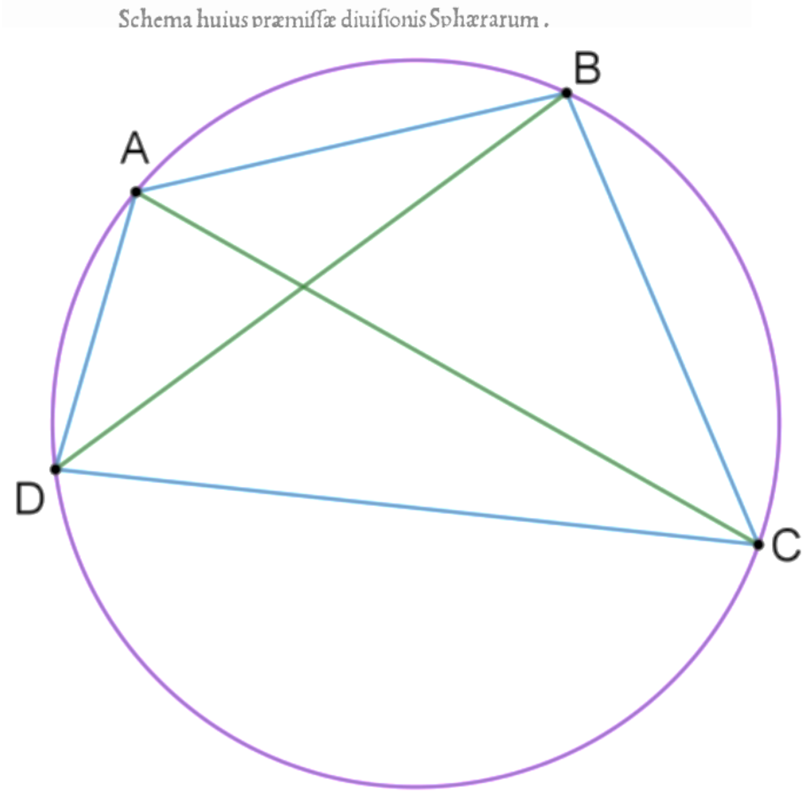


Le centre de gravité du triangle de côtés, est le centre du cercle inscrit dans le triangle des milieux.

Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

Roelens, M. (2023). De stelling van Ptolemaios, een ideale context om te leren bewijzen. *Uitwiskeling 39/2*.

Κλαυδιος Πτολεμαιος (2e siècle)



Dans un quadrilatère inscrit…

$$|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|.$$

Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

Démontrons $|AD|\cdot|BC|+|AB|\cdot|CD|=|AC|\cdot|BD|.$

Premier terme

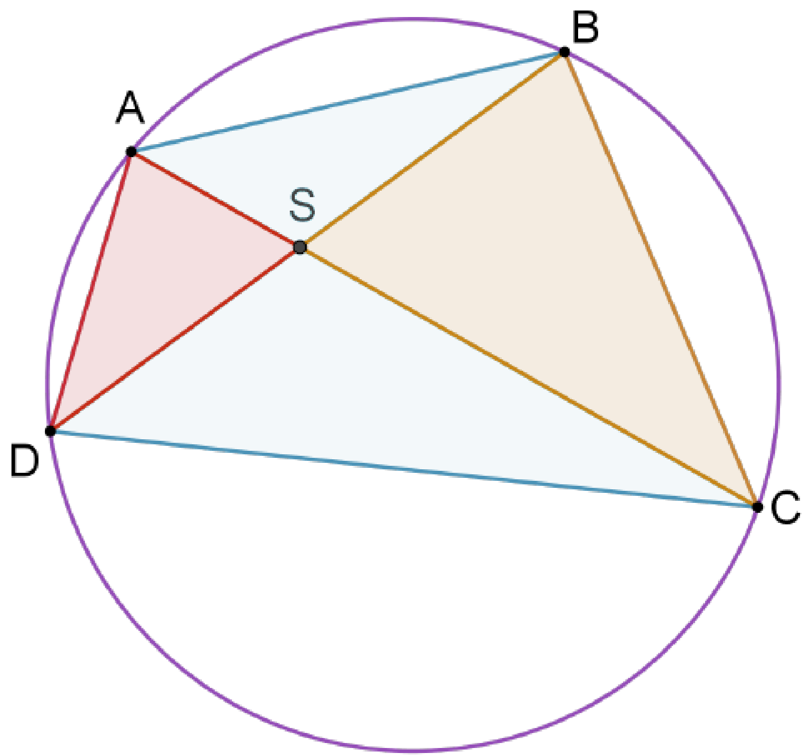
$$\Delta\ldots\sim\Delta\ldots$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|AD|}{\ldots}=\frac{\ldots}{|BC|}$$

$$\Downarrow$$

$$|AD|\cdot|BC|=\ldots\cdot\ldots$$



Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

Démontrons $|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|.$

Premier terme

$$\Delta\ldots \sim \Delta\ldots$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|AD|}{\ldots} = \frac{\ldots}{|BC|}$$

$$\Downarrow$$

$$|AD| \cdot |BC| = \ldots \cdot \ldots$$

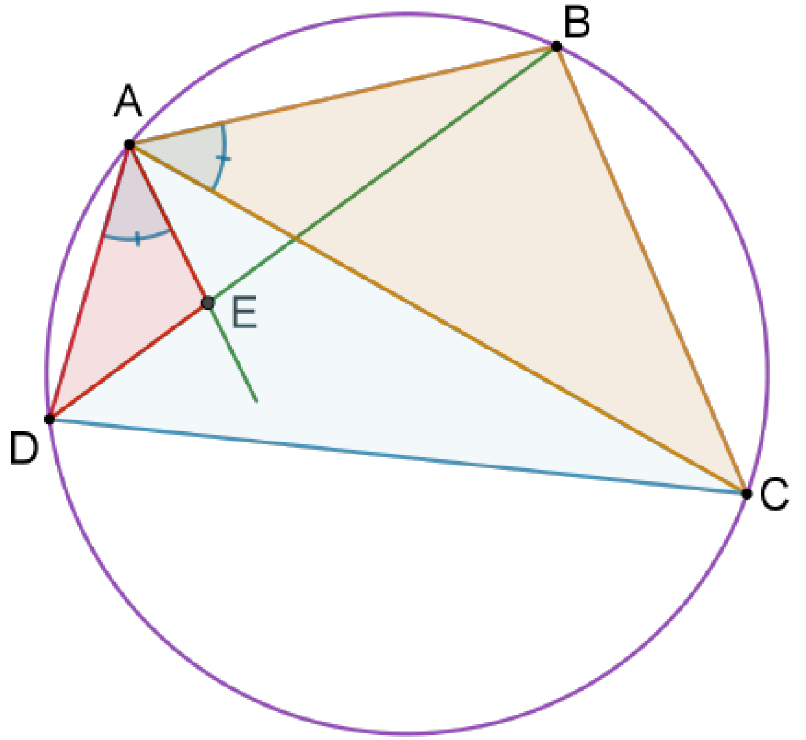
$$\Delta AED \sim \Delta ABC$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

$$\Downarrow$$

$$|AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |DE|$$



Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

Démontrons $|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|.$

Deuxième terme

$$\Delta\ldots \sim \Delta\ldots$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|AB|}{\ldots} = \frac{\ldots}{|CD|}$$

$$\Downarrow$$

$$|AB| \cdot |CD| = \ldots \cdot \ldots$$

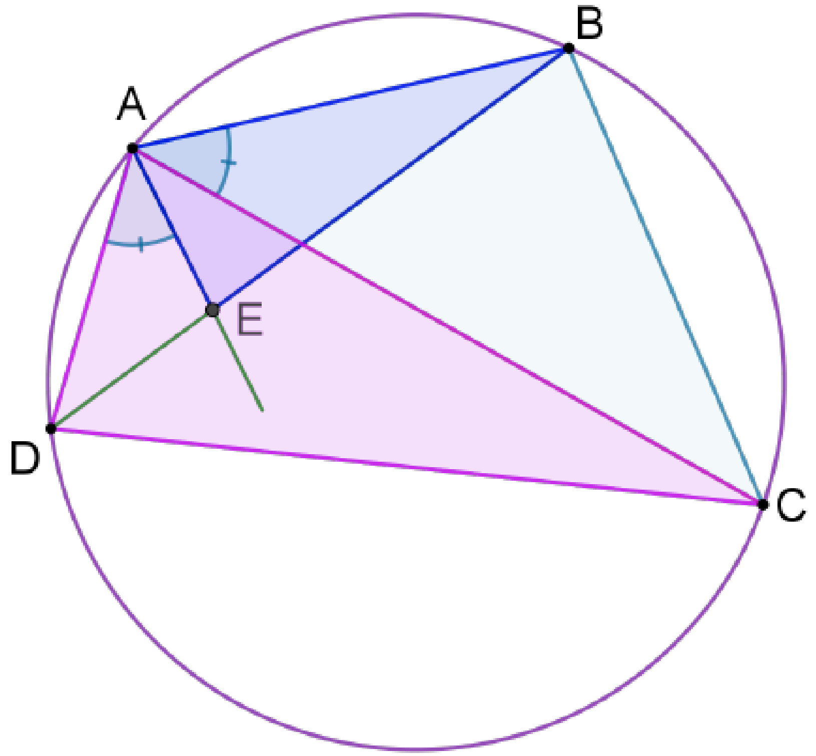
$$\Delta ACD \sim \Delta ABE$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|CD|}$$

$$\Downarrow$$

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |EB|$$

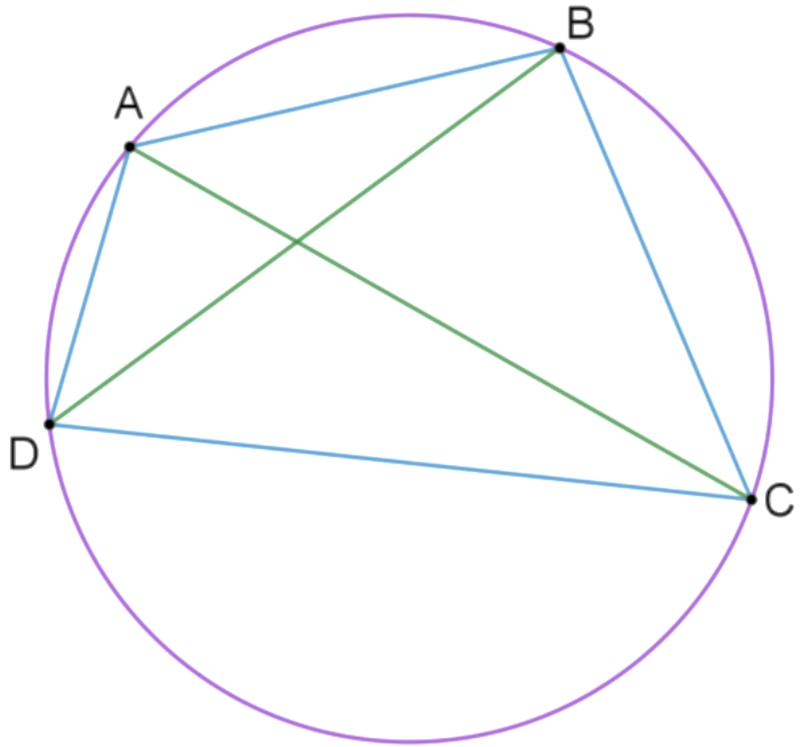


Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

Démontrons $|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|.$

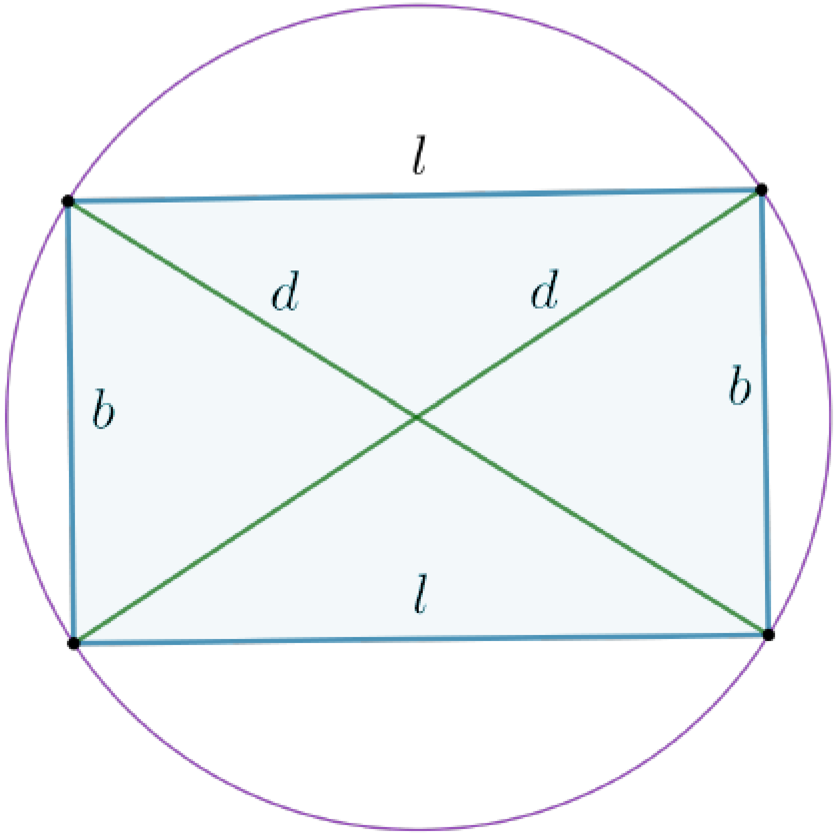
Additionnons

$$\begin{aligned} |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| &= |AC| \cdot |DE| + |AC| \cdot |EB| \\ &= |AC| \cdot (|DE| + |EB|) \\ &= |AC| \cdot |DB|. \end{aligned}$$



Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

Que nous dit Ptolémée au sujet d'un rectangle ?

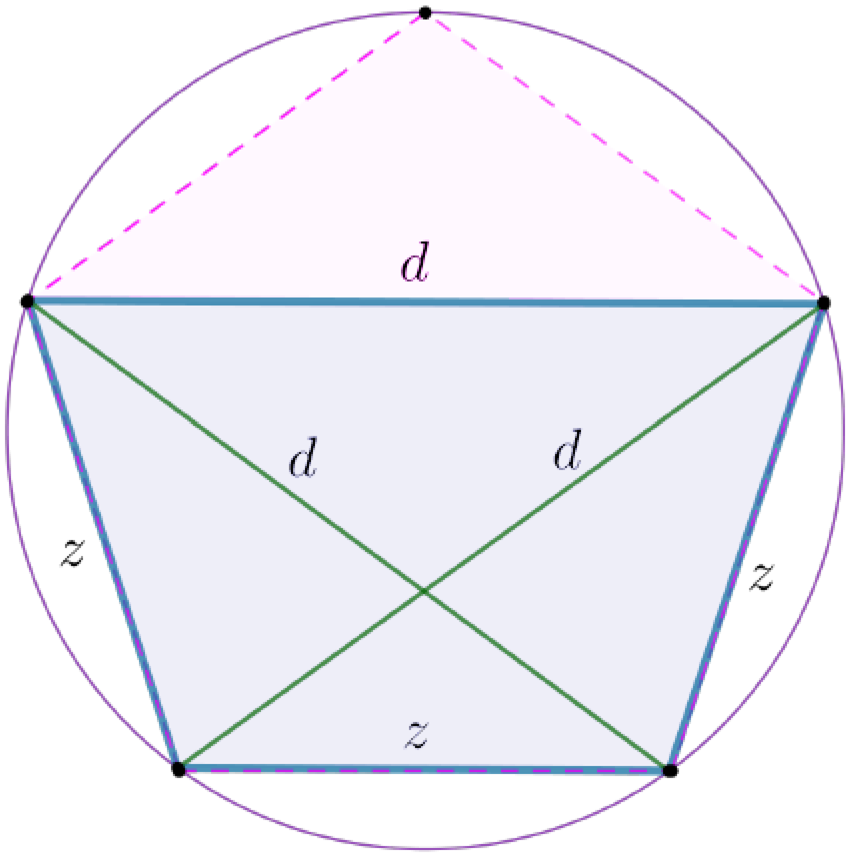


$$l \cdot l + b \cdot b = d \cdot d$$

$$l^2 + b^2 = d^2.$$

Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

Que nous dit Ptolémée au sujet d’un pentagone régulier ?



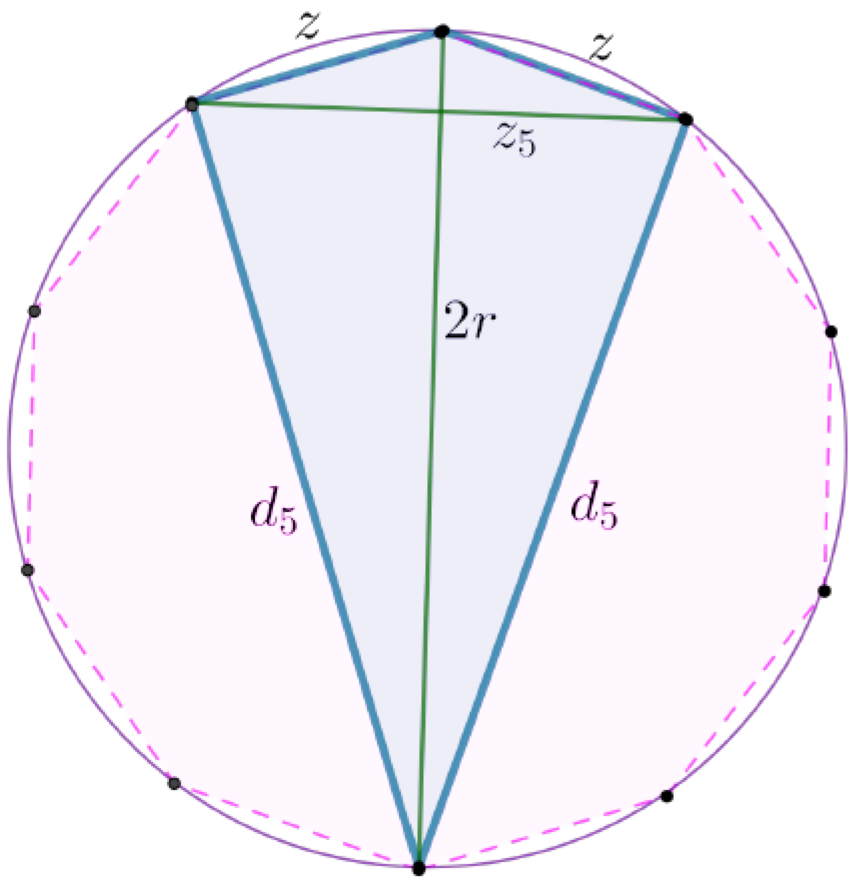
$$z^2 + zd = d^2$$

$$1 + \frac{d}{z} = \left(\frac{d}{z}\right)^2$$

$$\frac{d}{z} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

Que nous dit Ptolémée au sujet d'un décagone régulier ?



$$2\,z\,d_5 = 2\,r\,z_5$$

$$z\,d_5 = r\,z_5.$$

$$z\,\varphi\,z_5 = r\,z_5$$

$$\frac{r}{z} = \varphi.$$

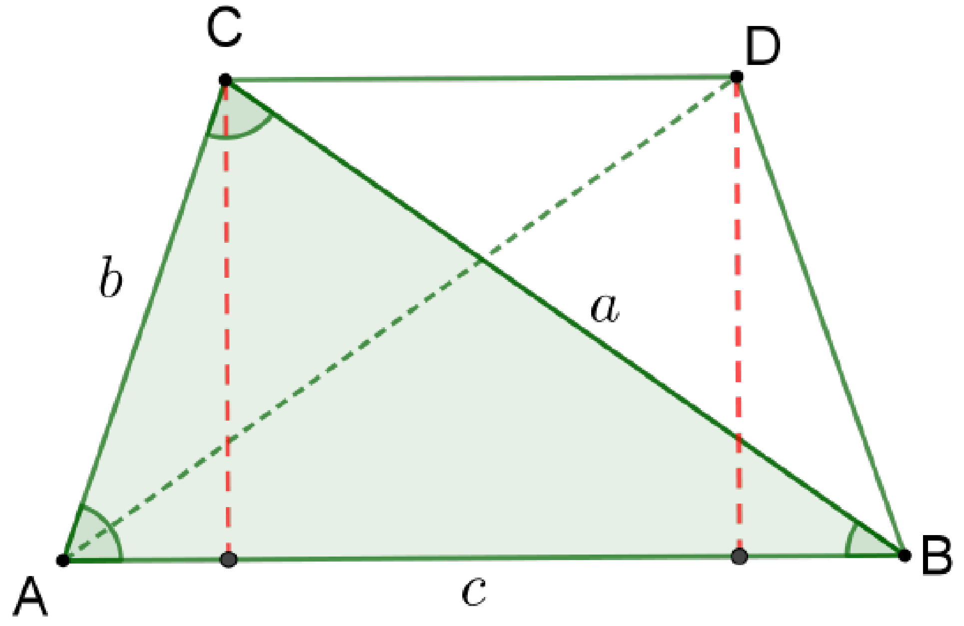
Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

La règle des cosinus comme conséquence du théorème de Ptolémée

$$|CD| = c - 2\, b \cos \hat{A}$$

$$a^2 = b^2 + c\left(c - 2b\cos\hat{A}\right)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



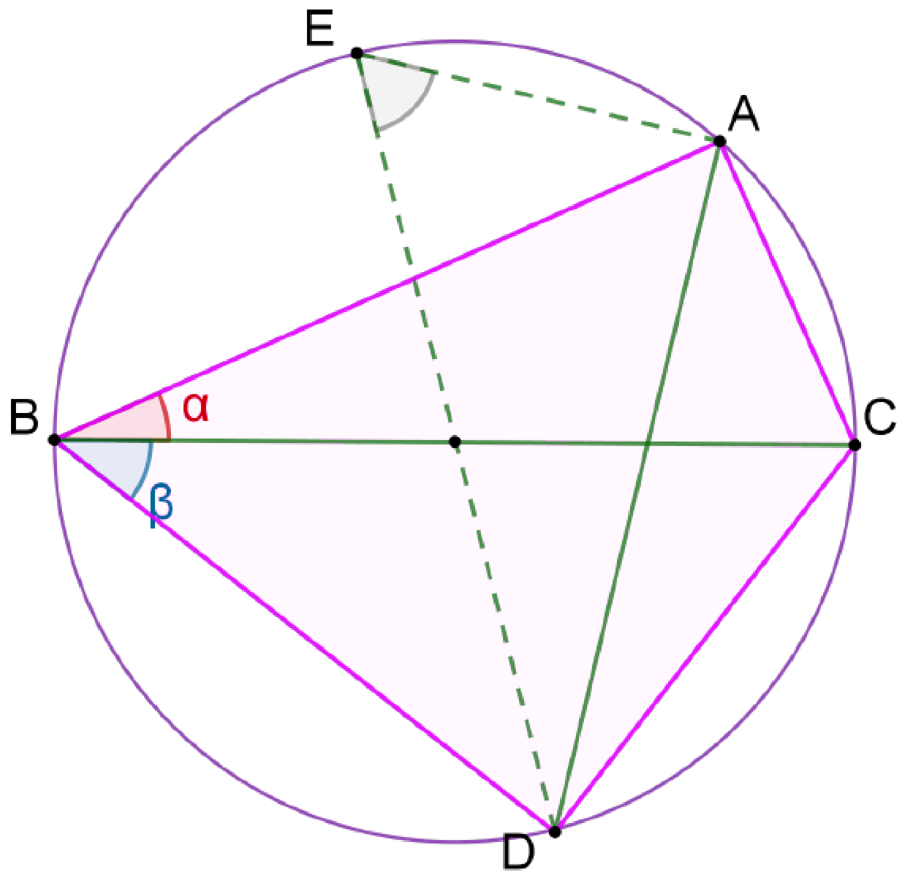
Le quadrilatère inscrit de Ptolémée

Le sinus d'une somme comme conséquence du théorème de Ptolémée

Diamètre = 1

$$|AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD| + |AB| \cdot |CD|$$

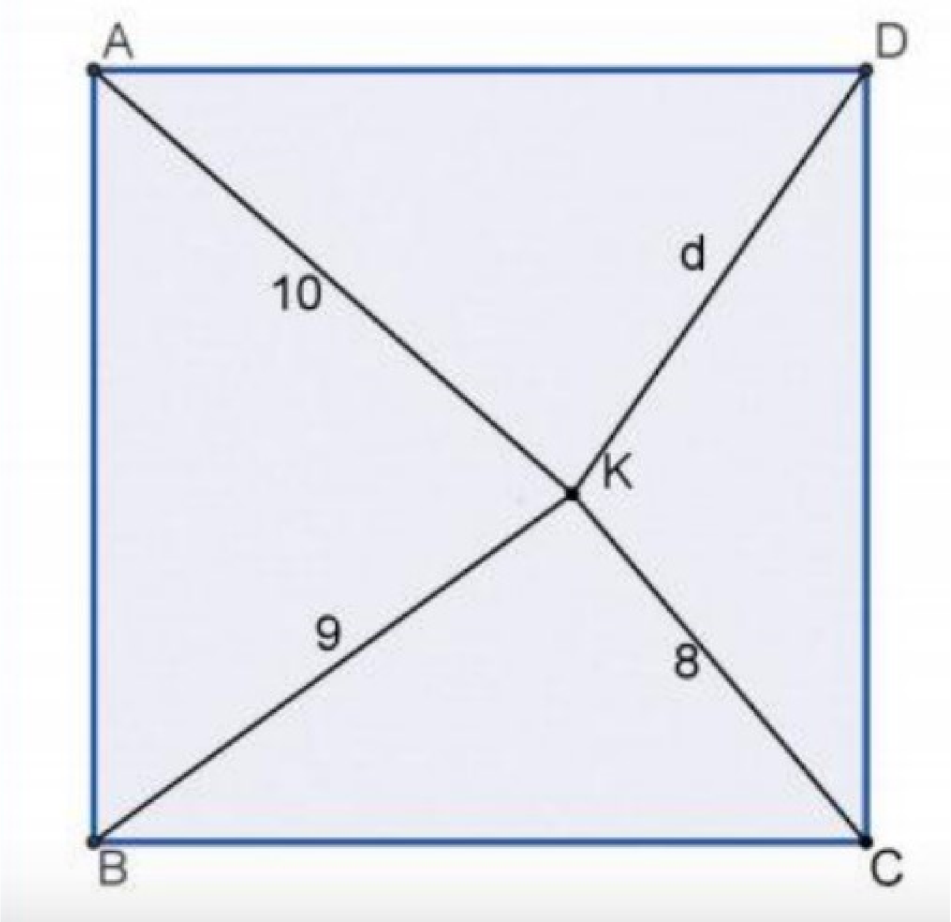
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$



Juste un petit exercice sur le théorème de Pythagore ?

Roelens, M. (2015). Zomaar een oefening op de stelling van Pythagoras? *Uitwiskeling 31/4*.

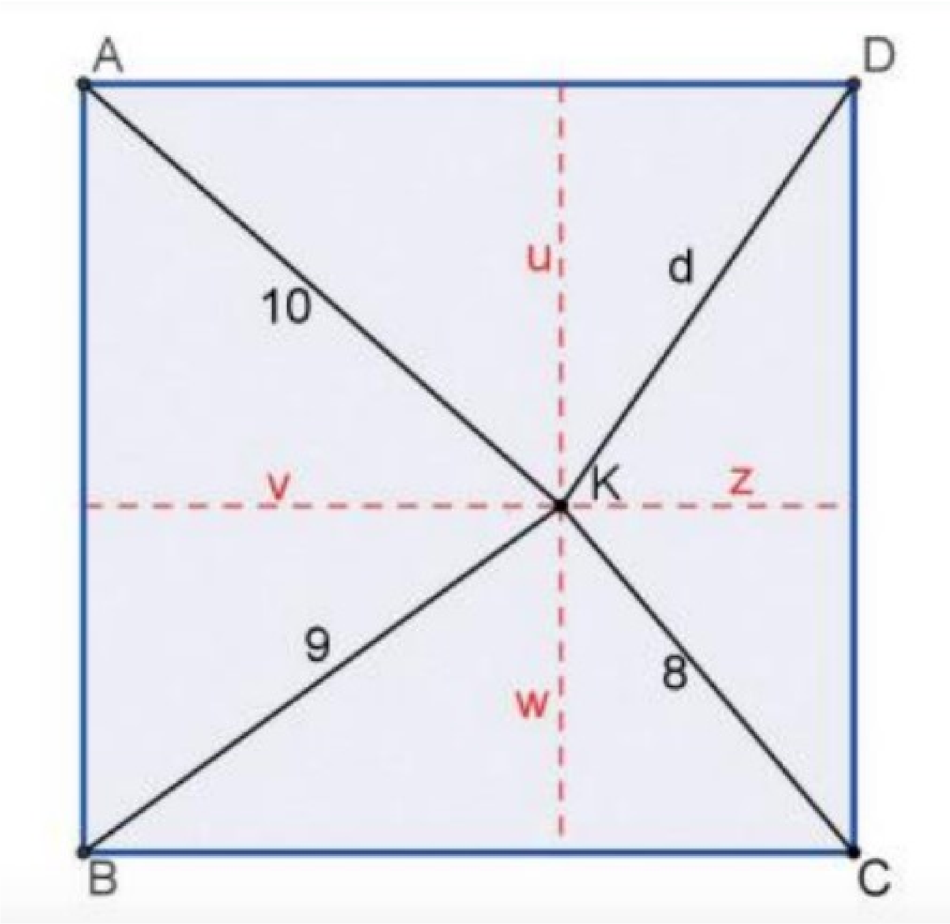
Combien vaut *d* ?



Juste un petit exercice sur le théorème de Pythagore?

$$d^2 = u^2 + z^2$$
$$100 = u^2 + v^2$$
$$81 = v^2 + w^2$$
$$64 = w^2 + z^2$$

$$\begin{aligned} d^2 &= u^2 + z^2 \\ &= 100 - v^2 + 64 - w^2 \\ &= 164 - (v^2 + w^2) \\ &= 164 - 81 \\ &= 83 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{83}$$



Juste un petit exercice sur le théorème de Pythagore?

Généraliser.

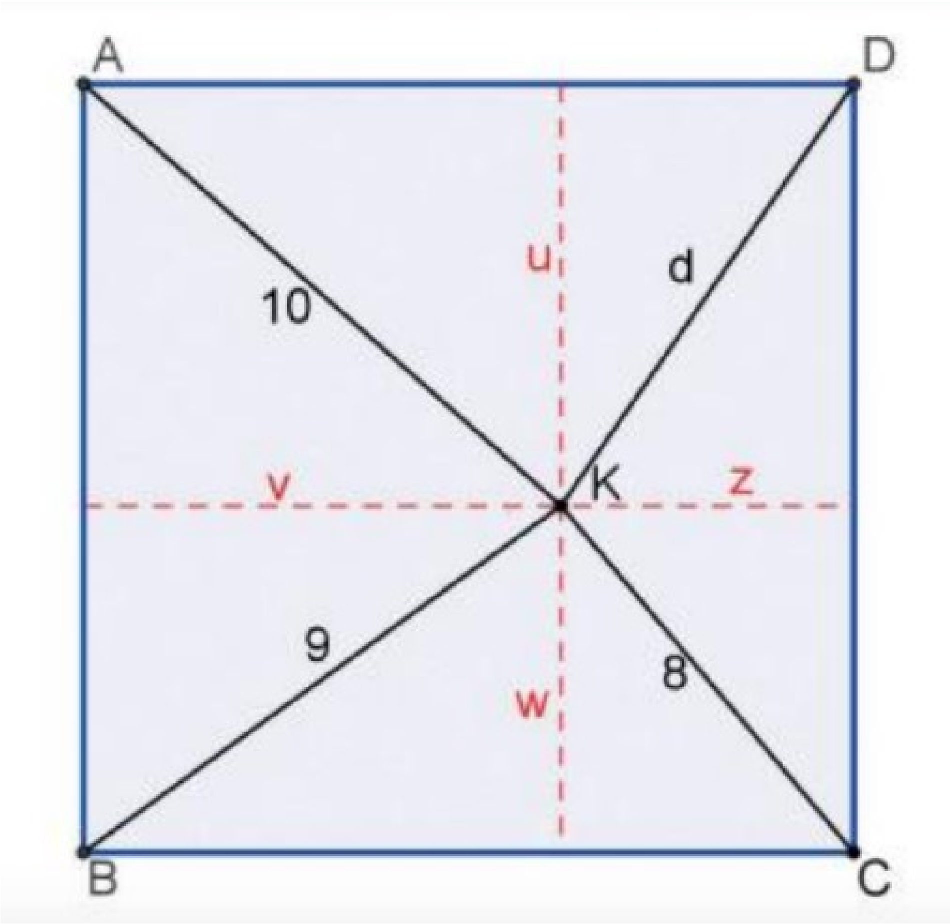
Mettons a, b, c au lieu de 10, 9, 8.

Ça donne :

$d^2 + b^2 = a^2 + c^2$

« Pour un point $\boxed{\text{à l'intérieur}}$ d'un carré, la somme des carrés des distances à deux sommets opposés ne dépend pas du choix de ces deux sommets. »

Généraliser encore plus.



Juste un petit exercice sur le théorème de Pythagore?

Généraliser.

Mettons a, b, c au lieu de 10, 9, 8.

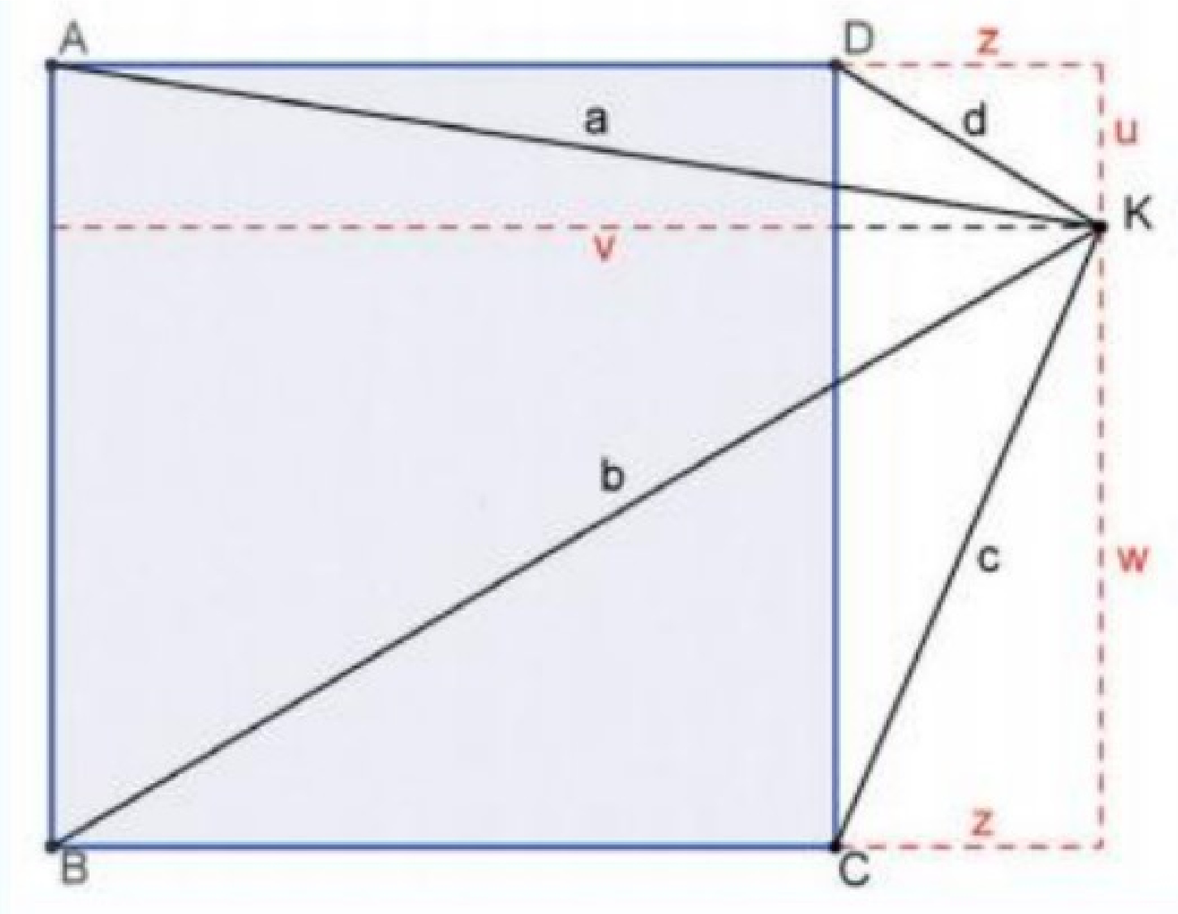
Ça donne :

$$d^2 + b^2 = a^2 + c^2$$

« Pour un point à l'intérieur d'un carré, la somme des carrés des distances à deux sommets opposés ne dépend pas du choix de ces deux sommets. »

Généraliser encore plus.

« Pour un point du plan, la somme des carrés des distances à deux sommets opposés d'un rectangle de dépend pas du choix de ces deux sommets. »



Juste un petit exercice sur le théorème de Pythagore?

Lieu des points K tels que la valeur de $b^2 + d^2$ soit égale à une constante k ?

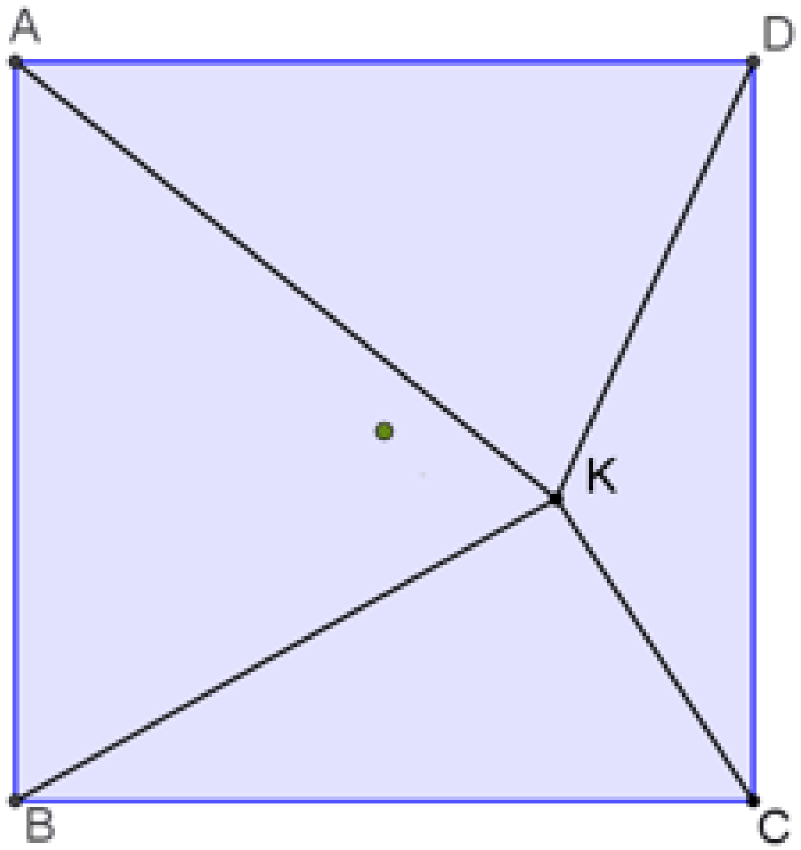
C'est le lieu « classique » des points tels que la somme des carrés des distances à deux points fixes soit constante.

Mettons $B(p, 0); D(-p, 0)$.

$$(x-p)^2 + y^2 + (x+p)^2 + y^2 = k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - p^2$$

Un cercle, un point ou rien du tout.



Juste un petit exercice sur le théorème de Pythagore?

Lieu des points *K* tels que la valeur de $b^2 + d^2$ soit égale à une constante *K* ?

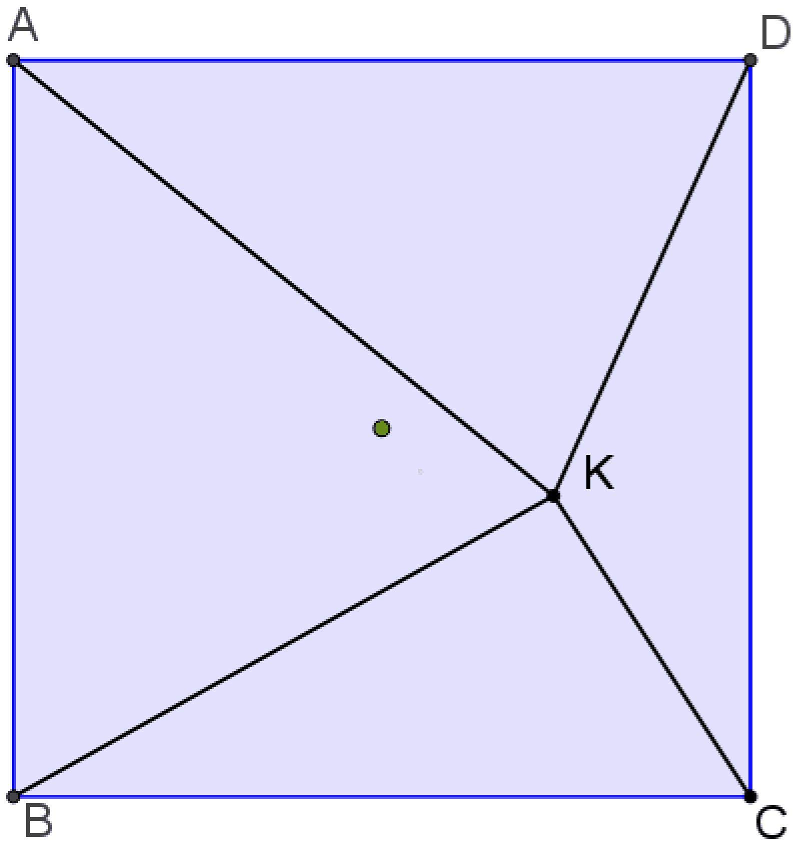
C'est le lieu « classique » des points tels que la somme des carrés des distances à deux points fixes soit constante.

Mettons $B(p, 0); D(-p, 0)$.

$$(x-p)^2 + y^2 + (x+p)^2 + y^2 = k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - p^2$$

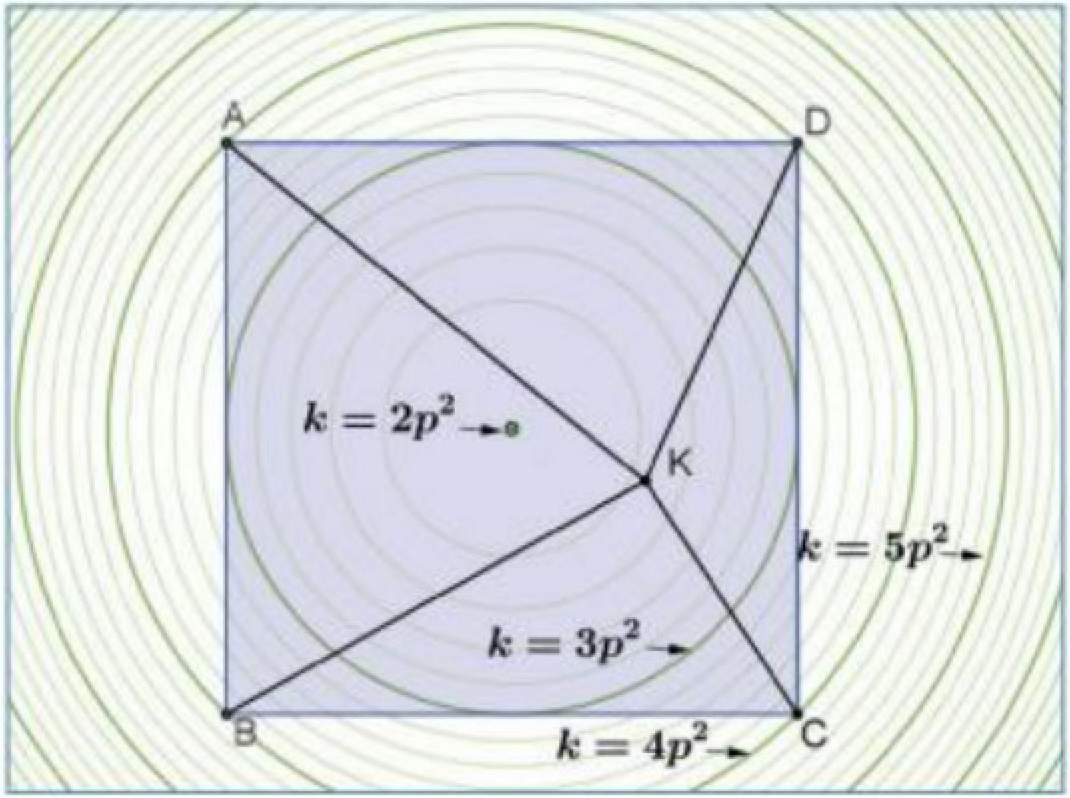
Un cercle, un point ou rien du tout.



Juste un petit exercice sur le théorème de Pythagore?

Lieu des points *K* tels que la valeur de $b^2 + d^2$ soit égale à une constante *K* ?

C'est le lieu « classique » des points tels que la somme des carrés des distances à deux points fixes soit constante.



Mettons $B(p, 0); D(-p, 0)$.

$$(x - p)^2 + y^2 + (x + p)^2 + y^2 = k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - p^2$$

Un cercle, un point ou rien du tout.

Juste un petit exercice sur le théorème de Pythagore?

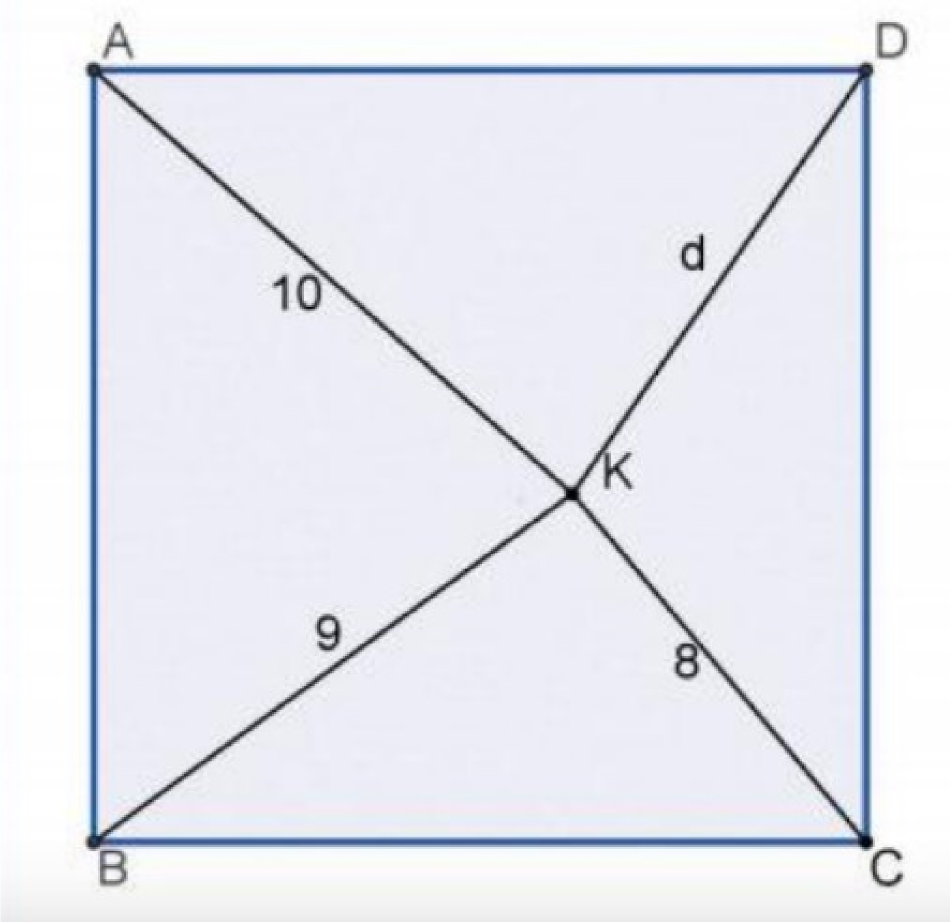
Retournons au problème initial.

Bien plus difficile :

Calculer le côté du carré.

Réponse : $|\mathrm{AB}| = \sqrt{82 + 9\sqrt{79}}$.

Tous les détails sont dans Uitwiskeling !



Merci.

UITWISKELING

MODERNISERING SO ONDER DE LOEP

Statistiek in de derde graad humane wetenschappen

Jan De Neve, Tom Loeys, Dennis Presotto, Luc Van den Broeck

SPINNENWEB

Beter wiskundeonderwijs? Geen gps maar een goed plan!

SPINNENWEB

Een onmogelijk bewijs van de stelling van Pythagoras

MODERNISERING SO

ONDER DE LOEP

MODERNISERING SO ONDER DE LOEP

Statistiek in de derde graad humane wetenschappen

Jan De Neve, Tom Loeys, Dennis Presotto, Luc Van den Broeck

SPINNENWEB

Beter wiskundeonderwijs? Geen gps maar een goed plan!

SPINNENWEB

Een onmogelijk bewijs van de stelling van Pythagoras

MODERNISERING SO

ONDER DE LOEP