LES SOLIDES DE PLATON ETOILES

Françoise Bertrand
Christine Oudin
pour
SBPMEF 2024

Définition selon Wikipedia

Un polyèdre convexe est un solide de Platon si et seulement si
1. Toutes ses faces sont des polygones réguliers convexes isométriques, c'est-à-dire superposables,
2. Aucune de ses faces ne se coupe, excepté sur les arêtes Le même nombre de faces se rencontre à chacun de ses sommets.

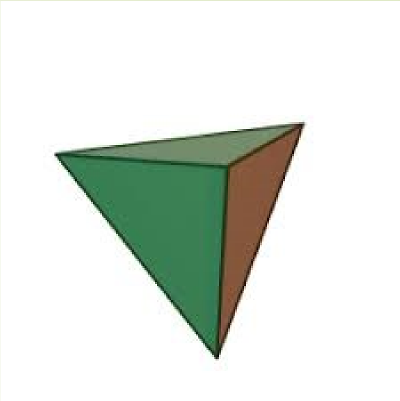
Chaque solide de Platon peut par conséquent être noté par un symbole {*p*, *q*} (appelé symbole de Schläfli) où

p = le nombre de côtés de chaque face (ou le nombre de sommets sur chaque face) et
q = le nombre de faces se rencontrant à chaque sommet (ou le nombre d'arêtes se rencontrant à chaque sommet).

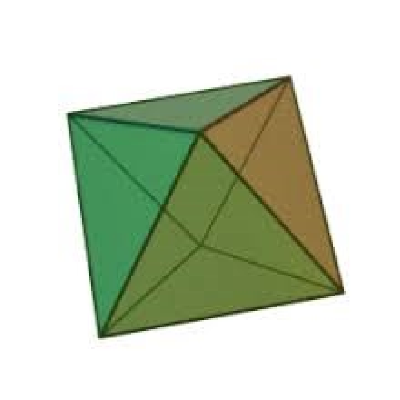
Polygone régulier : Tous les côtés ont la même mesure, tous les angles intérieurs ont la même mesure.
Le triangle équilatéral, le carré, le pentagone régulier, l'hexagone régulier, … sont des polygones réguliers

Avec des triangles équilatéraux

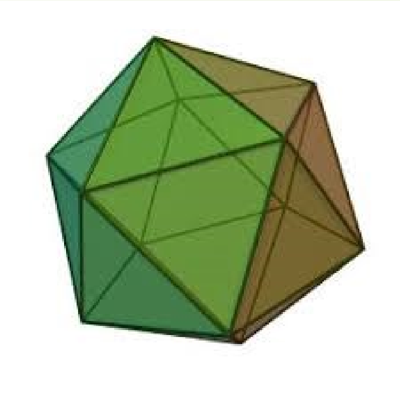
Il faut en mettre au minimum 3 par sommet
Ce qui donne le premier solide de Platon {3 ; 3} , **le tétraèdre**
Celui-ci a 4 sommets, 4 faces et 6 arêtes



Si on en met 4 par sommet on obtient **un octaèdre**
Symbole {3 ; 4}
Celui-ci a 6 sommets, 8 faces et 12 arêtes

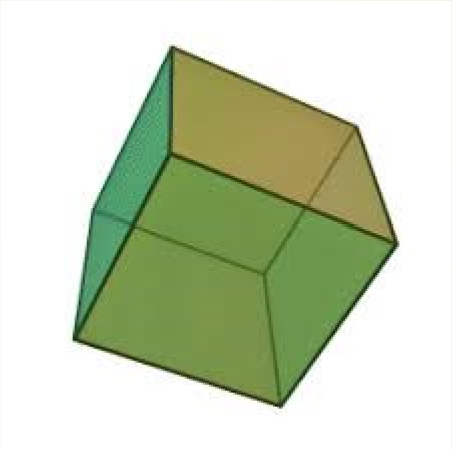


Si on en met 5 par sommet on obtient **un icosaèdre**
Symbole {3 ; 5}
Celui-ci a 20 faces, 30 arêtes et 12 sommets



Si on essaie d'en mettre 6 par sommet on pave un plan dans l'espace car 6 x 60 = 360 degrés, on ne pourra donc pas obtenir de solide

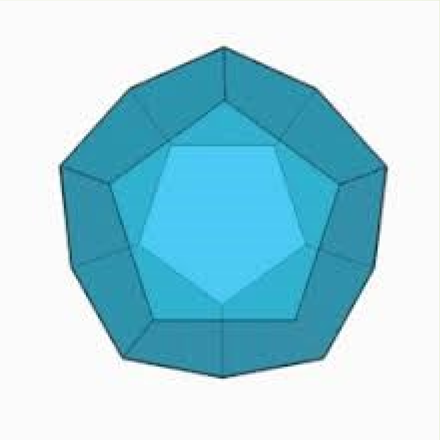
Avec des carrés



Il faut en mettre au minimum 3 par sommet
On obtient un cube
Symbole {4 ; 3}
Celui-ci a 8 sommets, 6 faces et 12 arêtes

On ne peut en mettre 4 par sommet car 4 x 90 = 360

Avec des pentagones réguliers



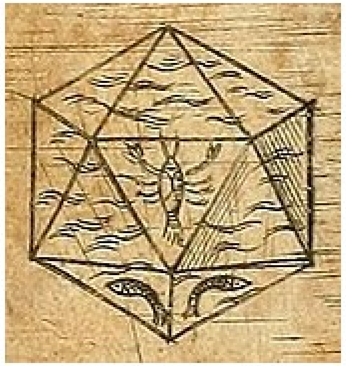
On en met 3 par sommet et pas plus et on obtient le dodécaèdre
Symbole {5 ; 3}
Celui-ci a 20 sommets, 12 faces et 30 arêtes

Avec des hexagones réguliers

Si on essaie d’en mettre 3 (le minimum) on pave le plan car 3 x 120 = 360

Les solide de Platon ne sont donc fabriqués qu’avec des triangles équilatéraux, des carrés et des pentagones réguliers
Platon les associait aux éléments suivants

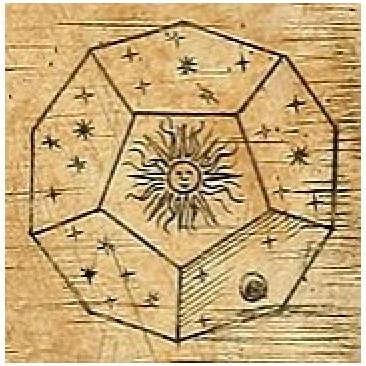
Terre, dans *Harmonice mundi* de Kepler.



Eau, dans *Harmonice mundi* de Kepler.

Air, dans *Harmonice mundi* de Kepler.

Feu, dans *Harmonice mundi* de Kepler.



Éther, dans *Harmonice mundi* de Kepler.

{n ; p}	Nom	Sommet	Faces	Arêtes
{3 ; 3}	Tétraèdre	4	4	6
{3 ; 4}	Octaèdre	6	8	12
{3 ; 5}	Icosaèdre	12	20	30
{4 ; 3}	Cube	8	6	12
{5 ; 3}	Dodécaèdre	20	12	30

Tous valident la formule d'Euler : **S + F – A = 2**

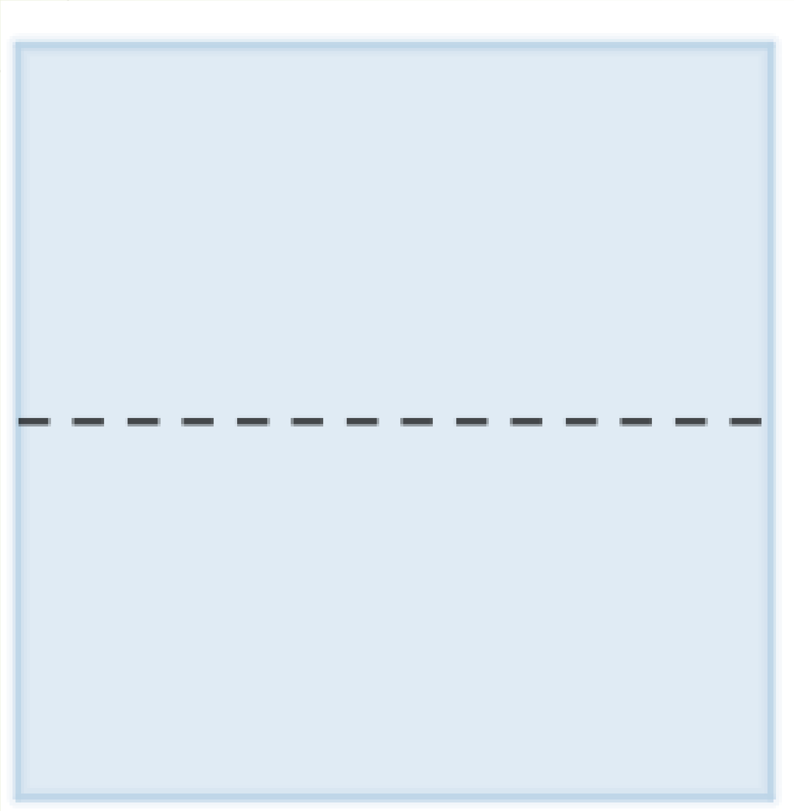
Le cube est le dual de l'octaèdre, le dodécaèdre est le dual de l'icosaèdre et réciproquement dans les deux cas ; le tétraèdre est son propre dual

On va maintenant étoiler les solides de Platon en construisant sur chaque face du solide une pyramide ayant pour base la face du solide de Platon

A chaque sommet du solide de Platon arrivera donc autant de pyramide que de face
Pour le tétraèdre étoilé, il faudra 3 pyramides par sommets et donc comme il y a 4 sommets 12 pyramides
Comme nos modules de montage serviront pour deux pyramides, il faudra donc 6 modules de montages.
etc

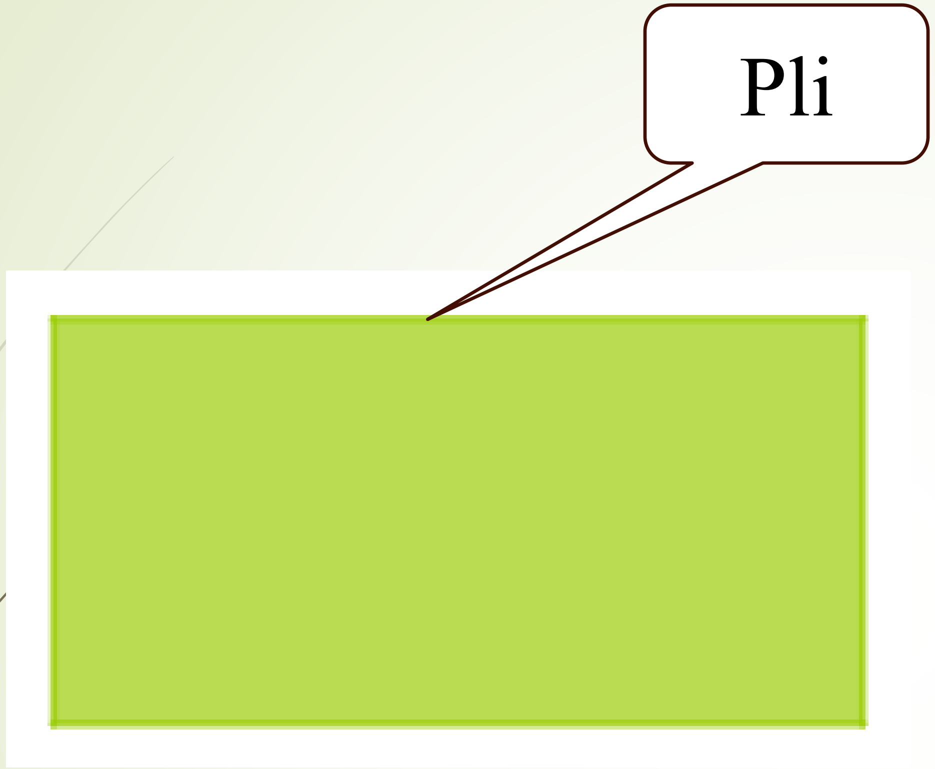
Solide de Platon			Nombre de pyramides autour d'un sommet	Nombre de modules
Tétraèdre	{3 ; 3}	4 sommets	3	6
Cube	{4 ; 3}	8 sommets	3	12
Octaèdre	{3 ; 4}	6 sommets	4	12
Dodécaèdre	{5 ; 3}	20 sommets	3	30
Icosaèdre	{3 ; 5}	12 sommets	5	30

Réalisation du module

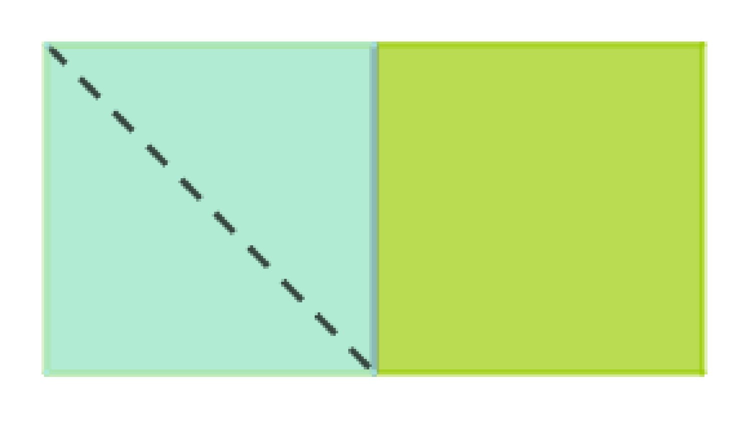


1. Prendre un carré et le plier suivant une médiane (pli vallée)

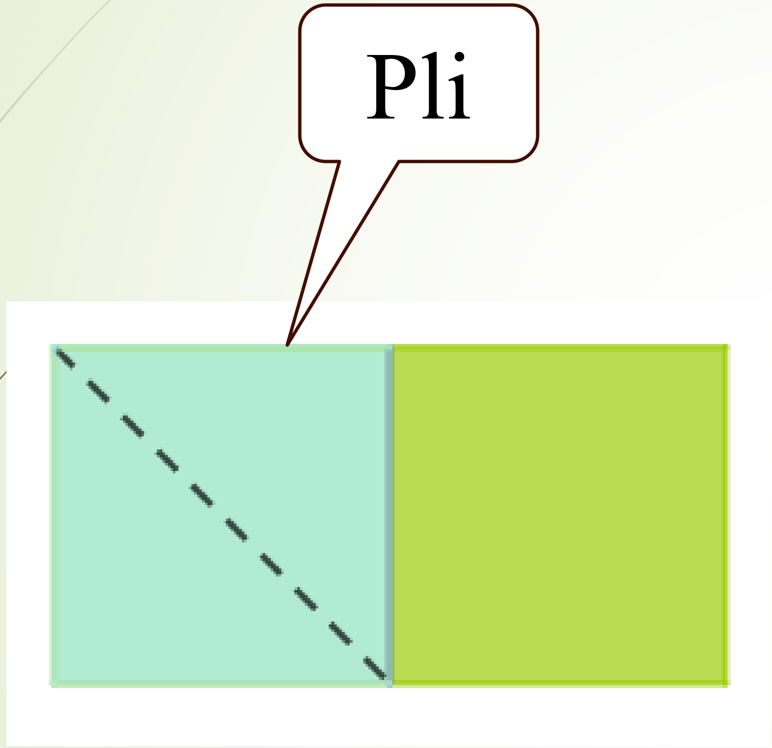
Papier bleu d'un côté et vert de l'autre



2. Positionner le pli vers le haut



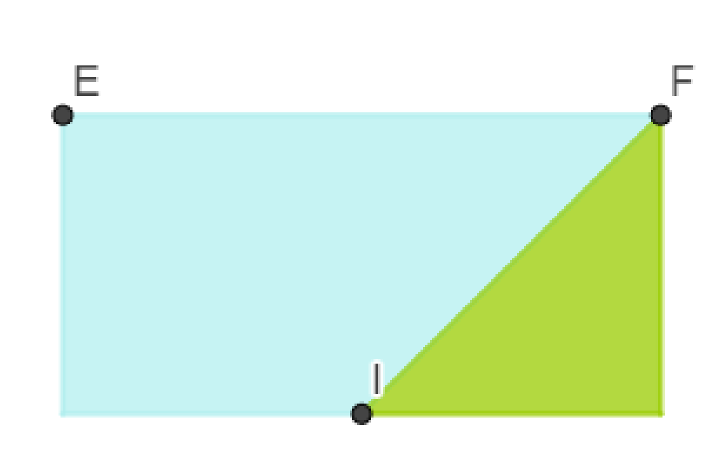
3. A gauche plier (pli vallée) suivant la droite qui passe par le sommet en haut **à gauche** et le milieu du côté en bas

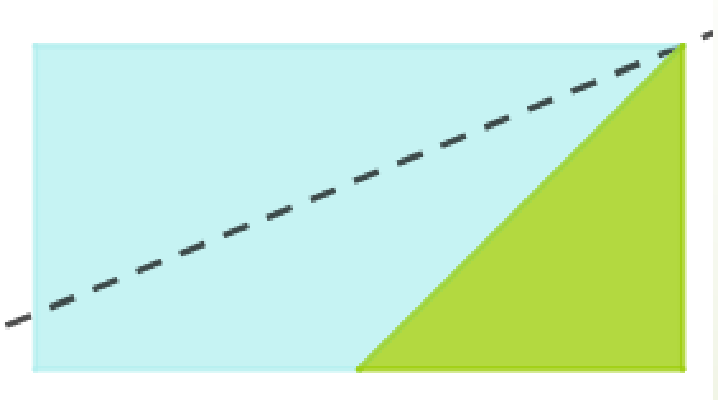


4 . Retourner l'ensemble en maintenant le pli vers le haut et recommencer la manipulation pour obtenir ceci

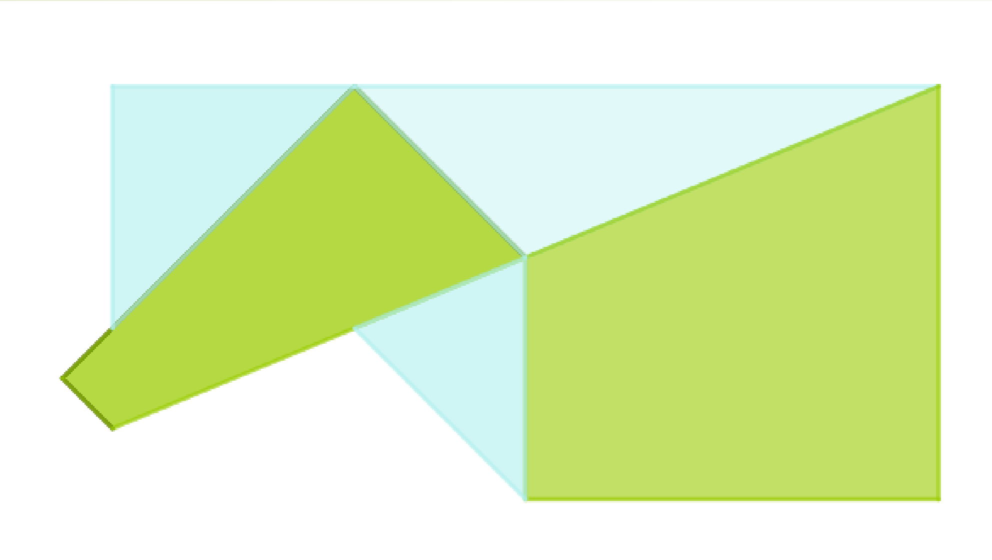
5. Ouvrir et transformer le pli vallée en pli montagne

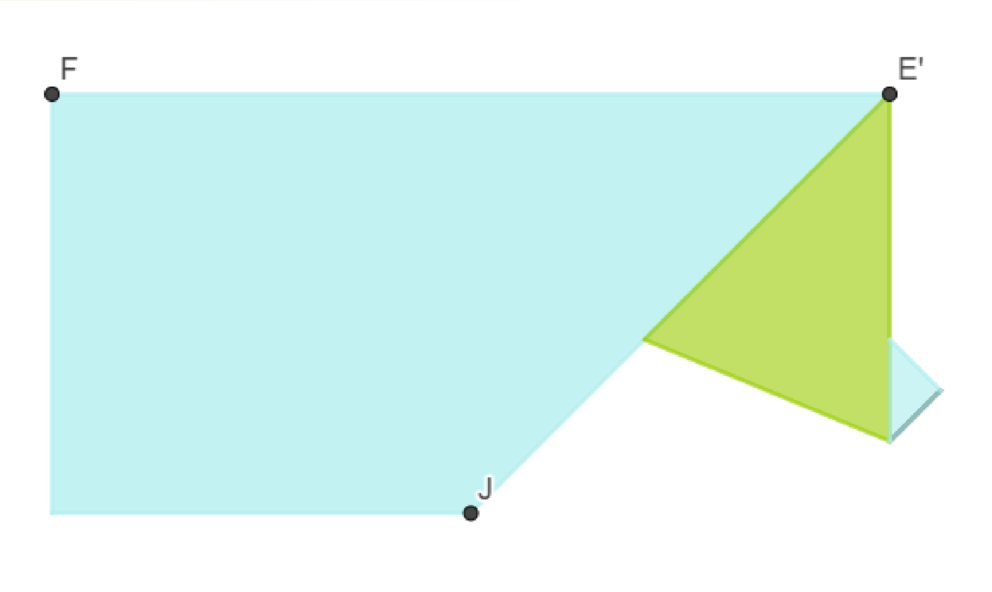
On obtient ceci





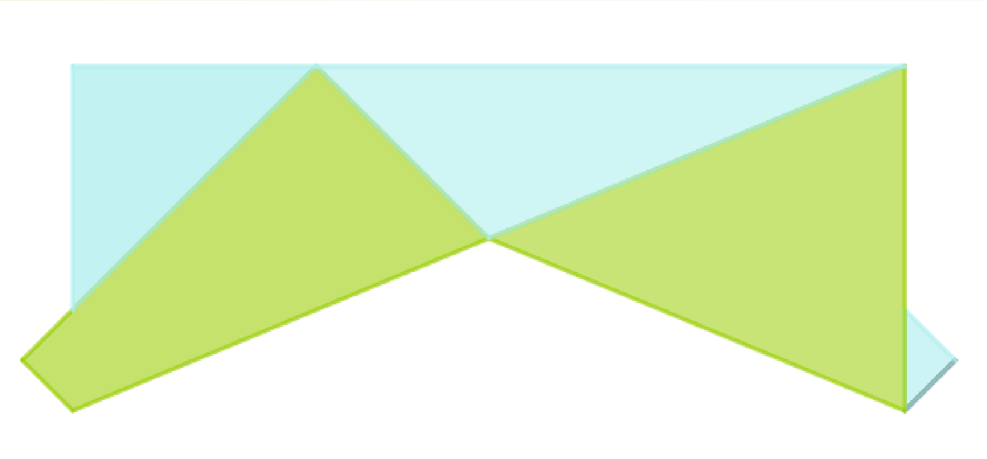
6. Plier la partie supérieure pour construire la bissectrice de $\widehat{EFI}$



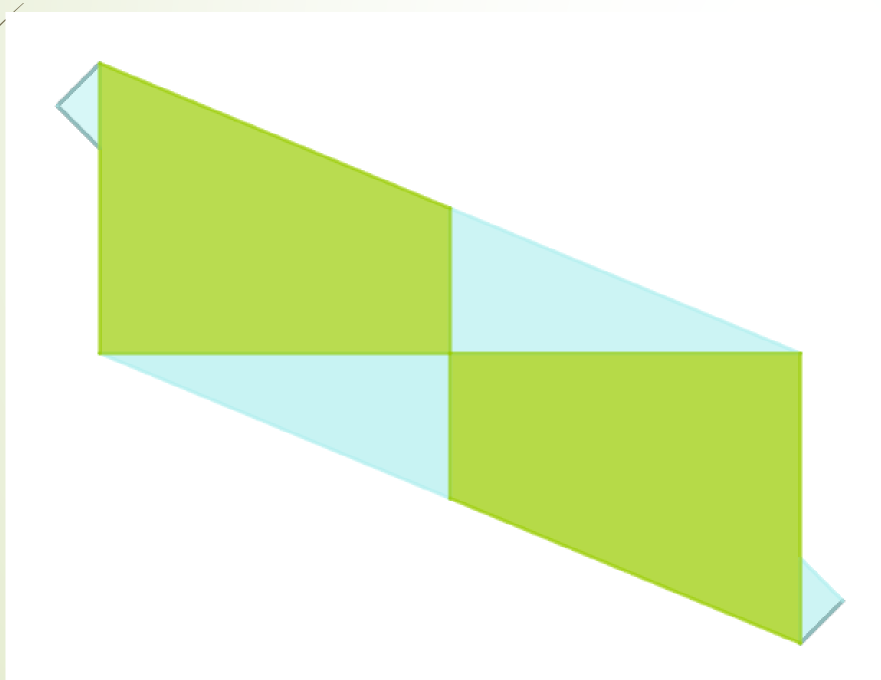


7. On obtient ceci ; retourner l’objet

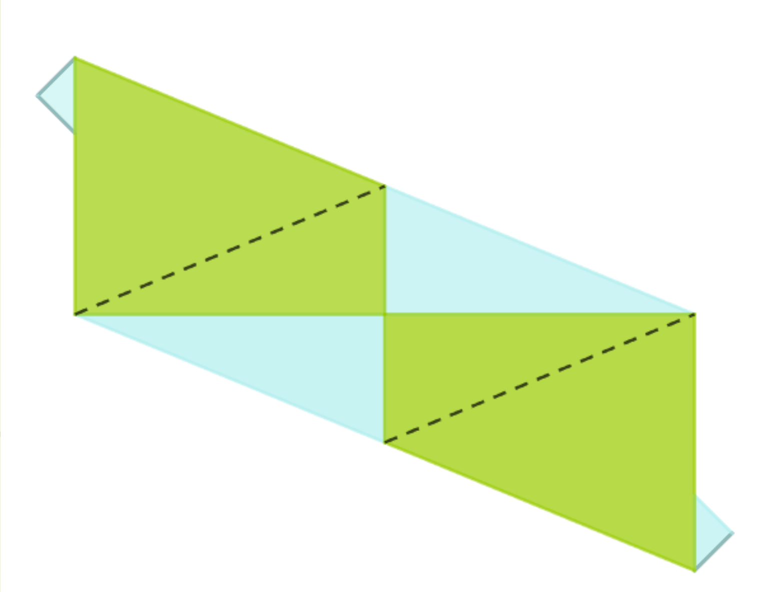
Et plier la partie supérieure suivant la bissectrice de $\widehat{FE'J}$

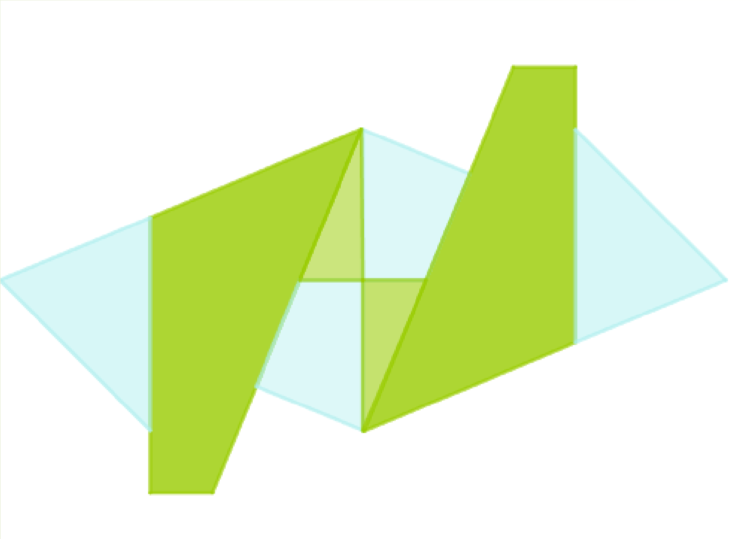


8. ouvrir



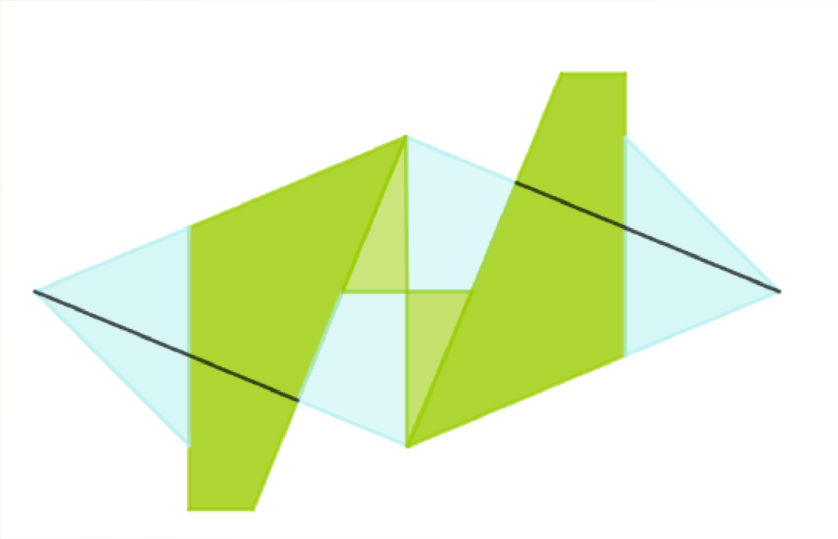
On obtient ceci



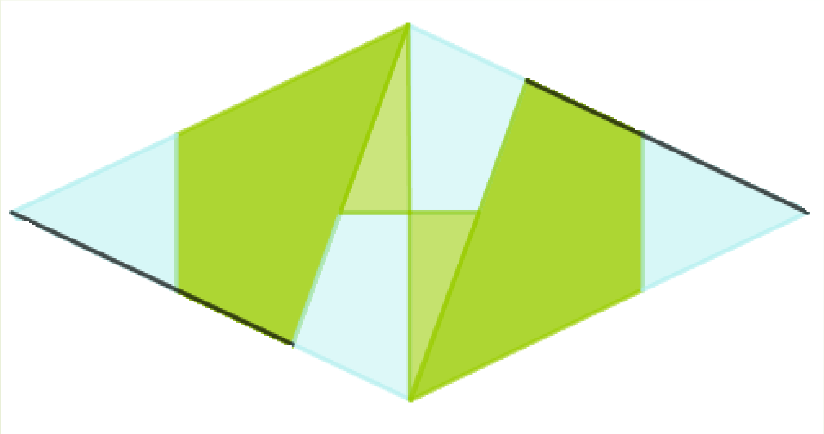


9. Plier suivant les segments en pointillés (comme si on voulait faire apparaître le losange dont on connait les diagonales

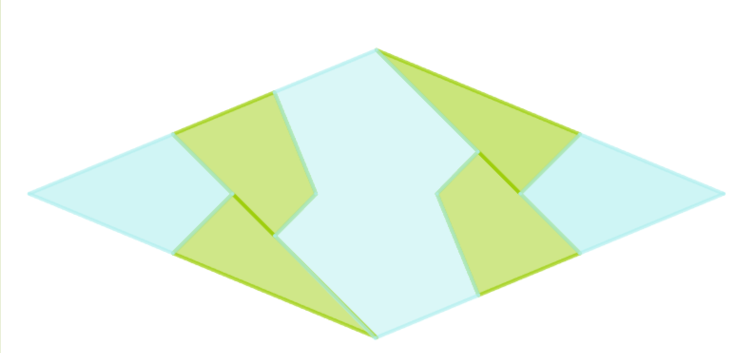
On obtient ceci

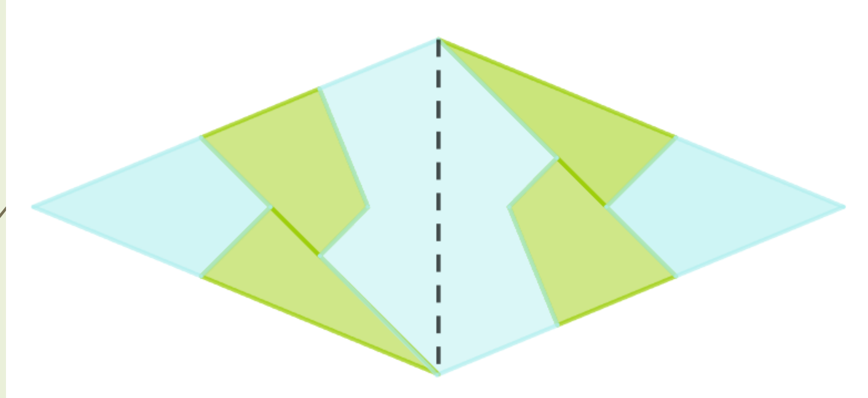


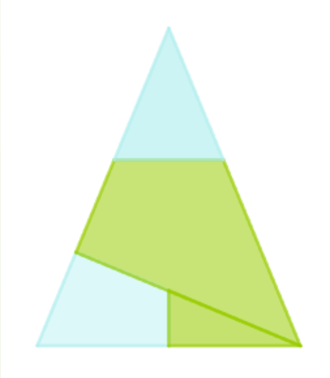
Faire deux plis montagnes comme suit



On obtient ceci

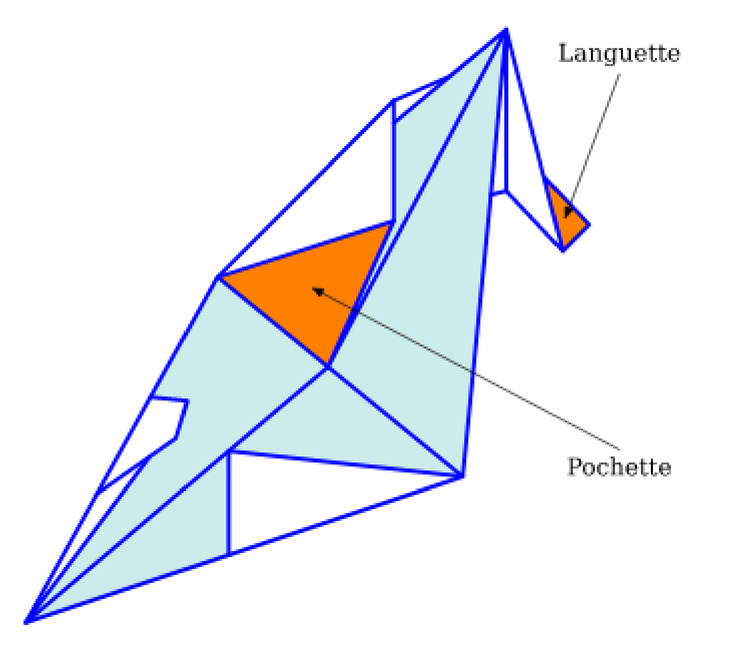






11. Retourner le tout
Plier en pli vallée suivant la petite diagonale

On obtient ceci



Pour relier deux modules, la languette de l’un s’intercalera dans la pochette de l’autre

Référence

Wikipédia

Article de Anne Marie Aebischer dans le « Au fil des Maths » n°552 intitulé « Des origamis en cours de maths »

https://afdm.apmep.fr/rubriques/ouvertures/des-origamis-en-cours-de-math/

Vidéo de Mickael Launay
https://www.youtube.com/watch?v=vN1FJPQG9co

N'hésitez pas à nous envoyer des photos de vos réalisations, cela nous fera très plaisir

christine.oudin@hotmail.fr
francoise.bertrand0859@orange.fr