Superpouvoirs mathématiques

Nathalie Braun

21 août 2024

Histoire

- Dès l'époque babylonienne :
  - Problème d'intérêts composés
  - Calcul du nombre d'années nécessaires pour doubler un capital placé à 20%

Histoire

- **ORESME Nicolas (1325 - 1382)** :
  - Introduit les exposants fractionnaires
  - Établit la règle de calcul $(x^p)^q = x^{pq}$
  - Tente de définir des exposants irrationnels (ex: $\sqrt{2}$) sans succès
- **CHUQUET Nicolas (15e siècle)** :
  - Auteur de "Triparty en la science des nombres" (1484)
  - Utilise la notation par exposant, y compris les puissances de 0 et négatives
  - Notations très proches des nôtres, avec les radicaux notés R
  - Exemple : $1225 + 148x^2$ écrit $1225p148^2$

Histoire

- **Notation du radical** :
  - Évolue de R à r, puis à $\sqrt{}$
  - Popularisée au 16e siècle par Christoff Rudolf (1500 - 1545)
- **STIFEL Michael (1487 - 1567)** :
  - Introduit le terme "exposant"
  - Généralise la notation pour les exposants négatifs
- **Descartes (1596 - 1650)** :
  - Utilise des notations proches des nôtres
  - Au 18e siècle, on écrit encore bb pour b^2, mais b^3, b^4, etc.

Histoire

1694 fonction exponentielle ⇒ correspondance entre Leibniz et Bernoulli

Informatique ⇒ses propres notations XXe siècle.
L'exponentiation : symbole ^ ou ** dans le langage de programmation Python

Les puissances...des maths

A partir du collège....

Dès la classe de 5ème en France : Les élèves découvrent leurs premières puissances

Ils apprennent à transformer le chiffre 0 en 1 $x^0 = x^{n-n} = \frac{x^n}{x^n} = \frac{\cancel{x^n}(1)}{\cancel{x^n}(1)} = \frac{1}{1} = 1$

Plus tard, au lycée :

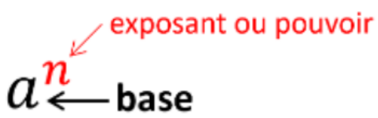
Dans les suites numériques : $u_n = 2 \times 3^n$
Dans les exponentielles : $f(x) = e^x$
En probabilité (loi binomiale)

genially EDUCATION

Les puissances...des maths

Dans le cours de mathématiques :

- Une puissance représente un produit de plusieurs fois le même facteur
- Si a désigne ce facteur (appelé «base»), la puissance a^n condense le produit de a exactement n fois par lui-même
  n peut désigner un entier naturel, un entier relatif, un nombre rationnel
- Par définition : $a^n = a \times a \times \cdots \times a$ (n fois)

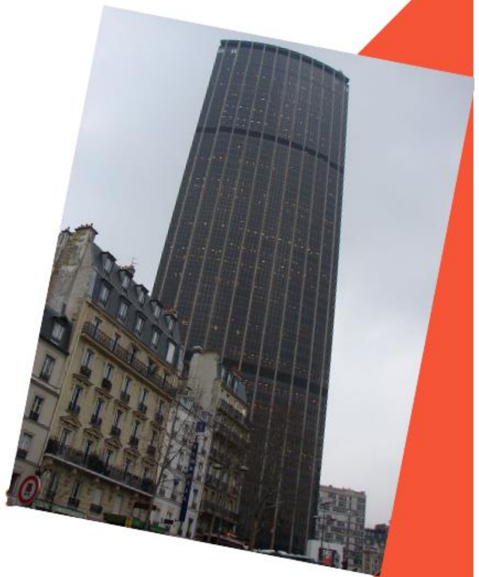


Anatomie de la puissance a^n . L'exposant n, ou pouvoir, est placé en hauteur de la base a.

genially EDUCATION

Les problèmes de pliage

- Les problèmes de pliage sont également inspirants :
  - Exemple : Pliage d'une feuille de papier d'épaisseur 0,1 mm
  - Objectif : Atteindre la hauteur de la tour Montparnasse (210 m)

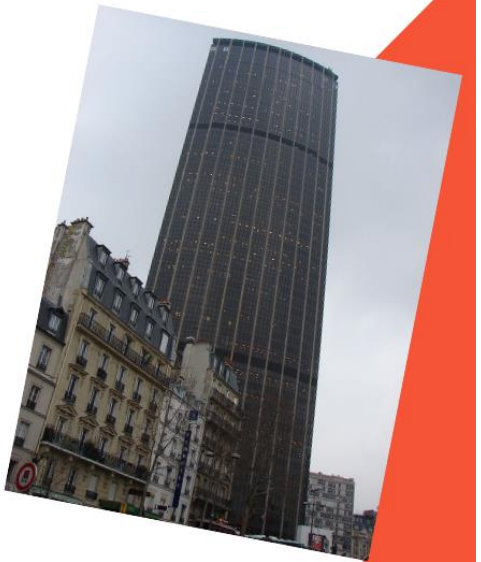


En combien d'étapes atteint-on la hauteur de la tour Montparnasse?

genially

Les problèmes de pliage

- Les problèmes de pliage sont également inspirants :
  - Exemple : Pliage d'une feuille de papier d'épaisseur 0,1 mm
  - Objectif : Atteindre la hauteur de la tour Montparnasse (210 m)
  - Épaisseur après 1 pli : $2^1 \times 0,1$ mm = 0,2 mm
  - Épaisseur après 2 plis : $2^2 \times 0,1$ mm = 0,4 mm
  - Épaisseur après 3 plis : $2^3 \times 0,1$ mm = 0,8 mm
  - Épaisseur après n plis : $2^n \times 0,1$ mm
  - Calcul : Trouver n tel que $2^n \times 0,1 \geq 210$
  - Résultat : Au 22e pliage, l'épaisseur dépasse la hauteur de la tour Montparnasse

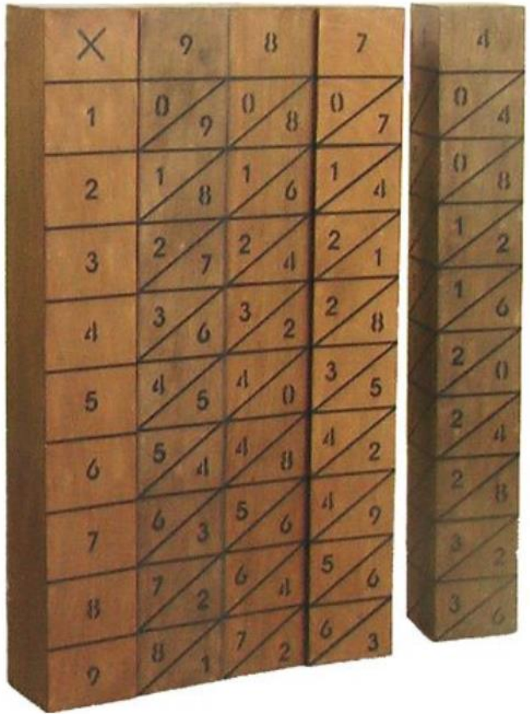


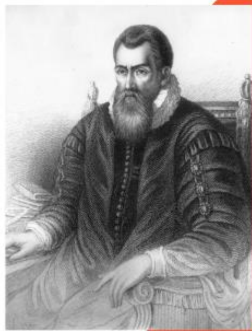
Utilisation des pouvoirs

- Règle du produit : $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- Règle du quotient : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- Règle d'une puissance élevée en puissance : $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- Règle du produit de puissances de même pouvoir : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- Règle du quotient de puissances de même pouvoir : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Les bâtons de Napier : multiplier

Inventées par mathématcien John Napier de Merchiston (1550 – 1617) en 1617

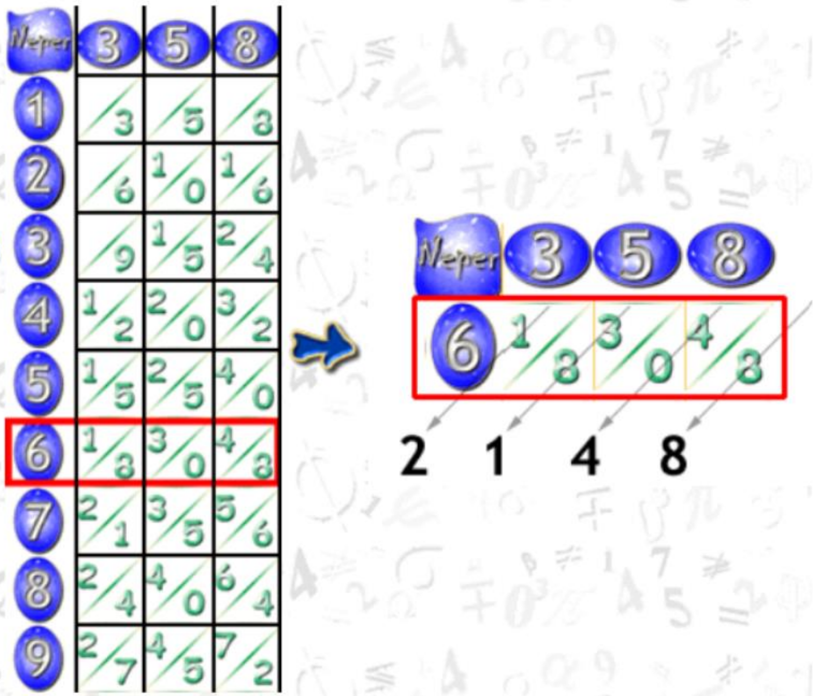




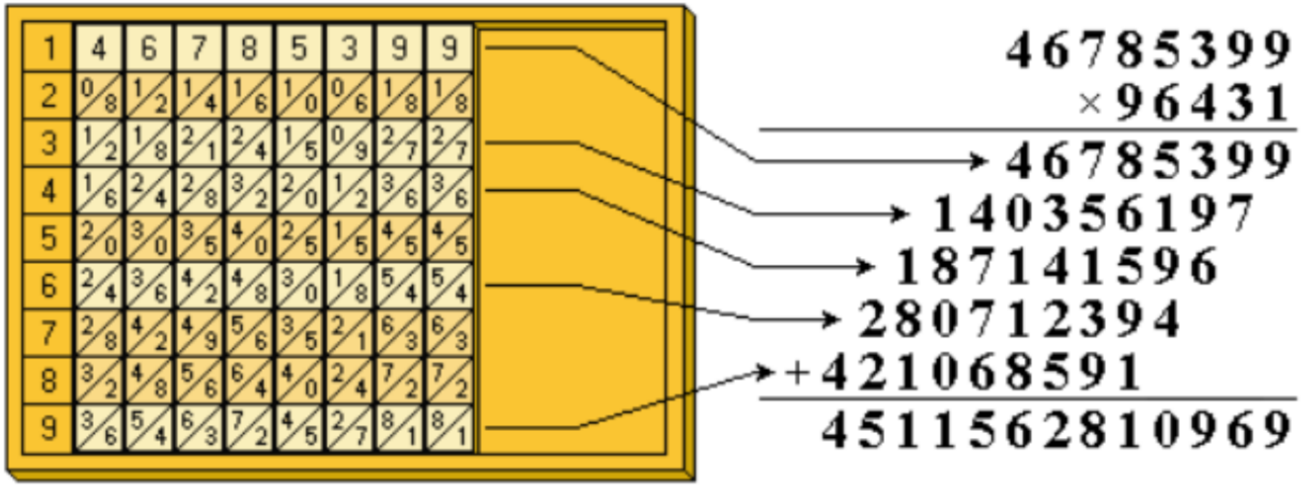
Les bâtons de Napier : multiplier

Exemple :
6x358

On rapproche de la réglette de gauche (multiplicateur) les bâtons dans l'ordre 3,5,8. Le résultat se lit en face du chiffre **6** en faisant l'addition diagonale par diagonale, et de droite à gauche. Soit **2148.**



Les bâtons de Napier : multiplier



Les bâtons de Napier : multiplier

https://drive.google.com/drive/folders/1xS2UhJ5KdbKko1f6p4vHFpu1DYVqEWX4?usp=sharing

Les patrons réalisés par Jean-Jacques Dupas

genially

Multiplication par jalousies

	9	4	
6			
7			

	9	4	
6	5 4	2 4	
7	6 3	2 8	

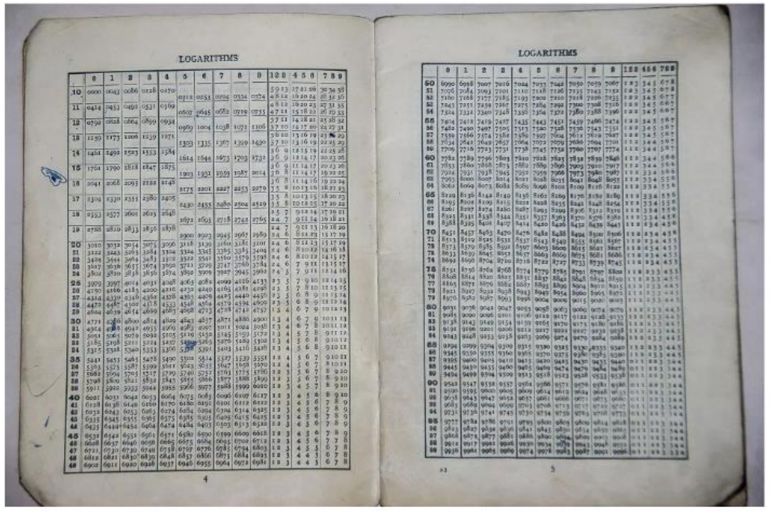
	9	4	
6	5 4	2 4	4
7	6 3	2 8	4
	7	1	

Cette technique figurait dans un ouvrage de Fibonacci de 1202.

enially

Les logarithmes

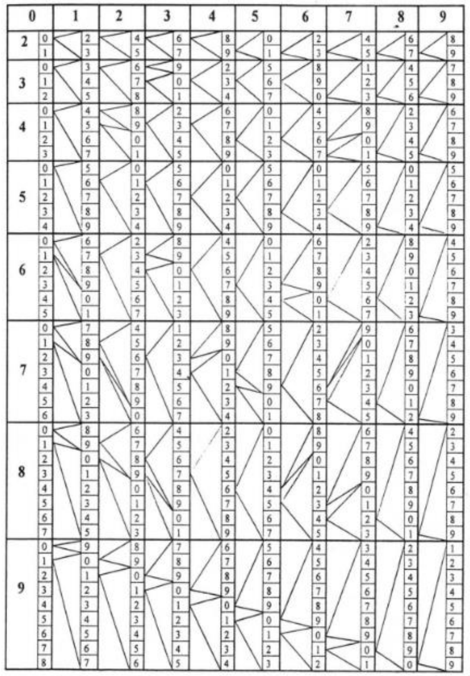
John Napier =>logarithmes au début du XVIIe siècle.
Utilité du logarithme pour le calcul avec développement de l'astronomie et de la navigation maritime d'une part et les calculs bancaires d'intérêts composés
=> fonction logarithme transforme un produit en somme



Henry Briggs avec John Napier, construisit la première table de logarithme décimal en 1615 =>3 sciècles avant la calculatrice

Les réglettes de Genaille et Lucas : multiplier

Inventées puis réalisées en 1885 par Henri Genaille (1856-1903), ingénieur civil et Edouard Lucas (1842-1891) mathématicien



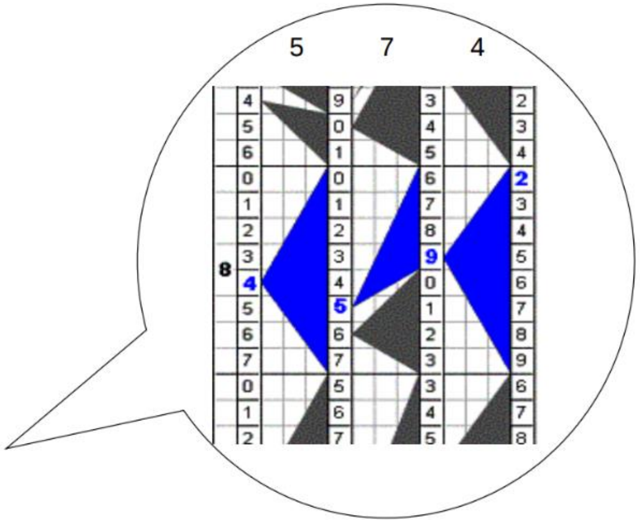
Les réglettes de Genaille et Lucas : multiplier

[...] La manoeuvre de ces réglettes est aussi facile que celle qui consiste à suivre un chemin à travers un labyrinthe, au moyen de mains indicatrices dessinées sur des poteaux placés aux carrefours ; c'est dire que l'on apprend à se servir de ces réglettes en une minute au plus. [...]

Récréations mathématiques (tome III), M. Édouard Lucas

Les réglettes de Genaille et Lucas : multiplier

Multiplions 574 par 8



On place de gauche à droite la réglette spéciale et les réglettes de 5, 7 et 4.

Calculs rapides des carrés

Nombres en ...5

- **Formule** : $N^2 = d \times (d+1) \rightarrow 25$
- Exemples :
  - $35^2 = 3 \times 4 \rightarrow 25 = 1,225$
  - $105^2 = 10 \times 11 \rightarrow 25 = 11,025$

Nombres en ...1

- **Formule** : $D^2 + 2D + 1$ (avec D dizaine inférieure)
- Exemples :
  - $21^2 = 20^2 + 40 + 1 = 441$
  - $71^2 = 70^2 + 140 + 1 = 5,041$
  - $131^2 = 130^2 + 260 + 1 = 17,161$

Calculs rapides des carrés

Nombres en ...9

- **Formule** : $D^2 - 2D + 1$ (avec D dizaine supérieure)
- Exemples :
  - $19^2 = 20^2 - 40 + 1 = 361$
  - $59^2 = 60^2 - 120 + 1 = 3,481$
  - $119^2 = 120^2 - 240 + 1 = 14,361$

Nombres autour de 50

- **Propriété** : $(50 + R)^2 = 2500 + 100R + R^2$
- Exemples :
  - $52^2 = 2500 + 100 \times 2 + 4 = 2,704$
  - $57^2 = 2500 + 100 \times 7 + 49 = 3,249$
  - $49^2 = 2500 + 100 \times (-1) + 1 = 2,401$
  - $42^2 = 2500 + 100 \times (-8) + 64 = 1,764$

ally

Rencontres avec les puissances de 2

On retient généralement deux valeurs simples par mnémotechnique

$2^{6} = 64$

$2^{10} = 1024$

genially

Rencontres avec les puissances de 2

Multiplication égyptienne : Il suffitde savoir multiplier par deux !

253 x 13 = ?
Ecrire le plus petit de ces nombres comme une somme de puissances de deux : 8 + 4 + 1
L’opération devient : 253 x (8 + 4 + 1).
Calculer les multiples de 253 par 2, 4 et 8

253 x 1			253
253 x 2 =	506		
253 x 4 =	506 x 2	=	1012
253 x 8 =	1012 x 2	=	2024
253 x 13		=	3289

genially

Rencontres avec les puissances de 2

Rectifier l'opération en déplaçant un seul chiffre.

$$26 - 63 = 1$$

Devinette

Rencontres avec les puissances de 2

$2^n \div n$ ne donne jamais le reste 3 avant $n = 4,700,063,497$

Rencontres avec les puissances de 2

La suite des puissances de 2 en base 10 est bien connue, au moins pour ses premiers termes : 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048, …

Elle est essentielle en informatique pour définir les unités de mesure de la mémoire : un kilooctet (Ko) équivaut à 2^{10}= 1 024 octets, un mégaoctet (Mo) à 2^{20} = 1 048 576 octets, et un gigaoctet (Go) à 2^{30} = 1 073 741 824 octets. Les unités suivantes incluent les téraoctets, pétaoctets, exaoctets, zettaoctets, yottaoctets pour 2^{40}, 2^{50}, 2^{60}, 2^{70}, 2^{80} octets.

Echiquier de Sissa

Fascination pour les puissances de 2 et difficulté à comprendre leur croissance rapide : anciennes

Remplissage de l'échiquier : l'Inde du XIIe siècle

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
65536	131072	262144	524288	1048576	2097152	4194304	8388608
16777216	33554432	67108864	134217728	268435456	536870912	10737418-24	21474836-48
42949672-96	85899345-92	17179896-184	34359738-368	68719476-736	137438953-472	27487790-6944	54975581-3888
10995116-27776	21990232-55552	43980465-11104	87960930-22208	175921860-44416	351843720-88832	70368744-177664	140737488-355328
281474976-710656	562949953-421312	112589990-6842624	22517998-13685248	450359962-7370496	900719925-4740992	180143985-09481984	360287970-18963968
720575940-37927936	144115188-075855872	288230376-151711744	576460752-303423488	1152921504-606846976	230584300-9213693952	461168601-8427387904	922337203-6854775808

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63}$, cela équivaut à $2^{64} - 1$, soit 18446744073709551615 grains de blé
=> plus de 1000 fois la production mondiale annuelle de blé

genially

Jeu du 2048

https://jeu2048.fr/

Jeu de grille qui se joue sur une grille de 4 x 4, inventé en 2014 par un jeune programmeur italien, Gabriele Cirulli
Les quatre flèches du clavier déplacent tous les nombres présents (tuiles) pour les plaquer du côté indiqué *(ici, en haut, tous à droite)*.
En même temps, un 2 ou un 4 s'affiche dans une des cases libres.
Si lors du mouvement, deux nombres identiques se touchent, ils s'ajoutent.
Le but est d'obtenir la somme 2048 par somme successives. Une tuile passe de 2 à 2048 en étant doublée dix fois, et en neuf fois pour un départ avec a4
Le jeu se termine dès qu'il est impossible d'ajouter un nombre en plus, toutes les cases étant remplies.

Jeu du 2048

https://jeu2048.fr/

Exemple

En passant de la grille du haut à celle du bas, nous avons appuyé sur la flèche "haut":

- **En 1ère colonne: nouveau nombre, le 2;**
- **En 3^{e} colonne le 4 est plaqué en haut; et**
- **En 4^{e} colonne, addition sur deux cases comportant des 2 pour donner le 4, et le troisième 2 est plaqué le plus haut possible.**

Sac à maths


SAC
À
MATHS
Gauss
Histoires de maths
L'infini
Un mystère sans limites

Sources

DAHAN-DALMEDICO/J.PEIFFER (Une histoire des mathématiques, p104)- Points sciences

J.L.AUDIRAC (Vie et oeuvre des grands mathématiciens, p24 et p34) -Magnard

Jean-Pierre ESCOFIER (Théorie de Gallois, p5) - Masson

https://www.mathemarium.fr/IMG/pdf/atelier_quipu_bilan.pdf

https://onvaessayer.org/aventureducalcul/session2/yupana.php

https://www.navigart.fr/lesabattoirs/artwork/anonyme-amerique-du-sud-perou-yupana-270000000002228

https://iremi.univ-reunion.fr/homocalculus/Data/menu/atelier/neper_explication.htm#:~:text=Le%20principe%20des%20b%C3%A2tons%20de,des%20dizaines%20par%20la%20diagonale.

Le monde fabuleux de 2n, Jean-Paul Delahaye, 18 mars 2022, POUR LA SCIENCE N° 534