W, drôle de nom pour une fonction…

Pascal DUPONT

Congrès SBPMef
Namur, le 21 aout 2024

Des équations… qu'on étudie… ou pas…

- Trigonométriques
  - $3\,\mathrm{tg}^2\,x + 5 = \dfrac{7}{\cos x}$
  - $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3\,\mathrm{tg}\,x = 2$
  - $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$
  - $\sin x + \cos 7x = 1$
- Exponentielles ou logarithmiques
  - $\log_5(5^x - 7) = \log_{25} 324 + 2 - x$
  - $3^{3x+1} + 1 = 9^x + 3^{x+1}$
  - $\log_{1/3}\left(3^{1-x} - 18\right) = x$
  - $9^x + 2 \times 4^x = 3 \times 6^x$
  - $8^x + 2 \times 4^x = 3 \times 6^x$

(Il n'y a pas qu'en maths !)

- Analyse… grammaticale

Ce matin-là, à l'arrêt de bus du centre de Coligny.
Cela faisait une demi-heure et quatre bus que Karine avait déposé ses enfants à l'école, mais elle faisait le pied de grue sur le trottoir. Elle attendait le passage de Sophie. Impossible qu'elle l'ait ratée, Isaak n'était pas encore en classe.

(Joël DICKER, *Un Animal sauvage*, Rosie Wolfe, Genève, 2024)

Des équations… qu'on n'étudie pas

- Algébrico-trigonométriques
  - $4\pi\cos x = x$
  - $x + \cos x = 1$
- Algébrico-exponentielles
  - $e^x = (e-1)x + 1$
  - $x^2 e^x = 3$
- Pourquoi n'en parle-t-on pas ?
- Parce qu'elles ne se laissent pas résoudre « analytiquement ».

Résoudre « analytiquement » : que signifie ?

- Fournir une expression algébrique de la ou des solutions.
- Avec un nombre fini d'opérations — donc pas $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$ ni $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{16+\ddots}}}$.
- Algébrique ou analytique ?
- On admet non seulement les quatre opérations et les radicaux, mais aussi certaines fonctions transcendantes. P. ex., $\sin\frac{\pi}{7}$ ou $\ln 2$ sont des expressions analytiques.

Certaines fonctions transcendantes : lesquelles ?

- Toutes celles qu'on connait à ce stade, c.-à-d. :
  - Les fonctions puissance (d'exposant quelconque) ;
  - Les fonctions trigonométriques ;
  - Leurs réciproques ;
  - Les fonctions exponentielles et logarithmiques.
- Ces fonctions sont dites « fonctions élémentaires ».

Expressions analytiques

- On appellera *expression analytique* toute combinaison finie de fonctions élémentaires au moyen
  - Des quatre opérations ;
  - De la composition ;
  - De la définition par morceaux
    (comme p. ex. $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x<1 \\ e^x & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$).
- Mais il est bien connu que ce cadre est trop étriqué.
- P. ex., la densité gaussienne
  $$x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$
  est une fonction élémentaire.
  Elle est continue, donc primitivable.
  Mais « sa » primitive n'admet pas d'expression analytique…

Fonctions spéciales

- Quand on est coincé de la sorte… il faut se donner de nouveaux outils : de nouveaux types de fonctions.
- Parmi ces « nouvelles » fonctions, certaines, qui sont d'usage suffisamment fréquent, ont été bien étudiées et baptisées *fonctions spéciales*.

Fonctions spéciales : exemples

- Une primitive de la densité gaussienne (donc la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite) :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=0}^{t=x} e^{-t^2/2}.$$

- Les fonctions elliptiques (fonctions du genre

$$f(x) = \int_{t=0}^{t=\pi/2} \sqrt{1 + x \sin^2 t} \quad).$$

- Les fonctions de Bessel J_k.
- La fonction Pi :

$$\Pi(x) = \int_{t\to 0_+}^{t\to+\infty} t^x\, e^{-t}$$

qui étend la factorielle aux arguments non entiers (donc $\Pi(n) = n!$ si n est naturel).

La fonction de Lambert

- Notre propos, aujourd'hui, est la fonction de Lambert, ou plutôt *les deux* fonctions de Lambert :

$$W_0 \qquad \text{et} \qquad W_{-1}.$$

- Johann Heinrich Lambert, Mulhouse 1728 – Berlin 1777.

- Remarque en passant : Drôle de numérotation !

Mais encore…

- Revenons à un exemple très simple d'équation exponentielle :

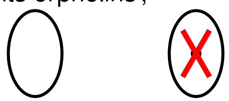
$$e^x = 3.$$

- L'inconnue est « cachée » à l'intérieur d'une fonction exponentielle.
- Pour l'en « faire sortir », on fait appel à la fonction réciproque de l'exponentielle : le logarithme népérien.

Interlude — rappels (1)

- $f : A \longrightarrow B$ est
  - Une *injection* si $(\forall\, a, a' \in A)\ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$;
    c.-à-d. : pas de flèches convergentes ;

  - Une *surjection* si $(\forall\, b \in B)\ (\exists\, a \in A)\ f(a) = b$;
    c.-à-d. : pas de points orphelins ;



  - Une *bijection* si elle est à la fois une injection et une surjection ;
    autrement dit si tout élément de B est l'image d'un et un seul élément de A ;
    en tout point de B arrive exactement une flèche.
- N.B. : Dans cette discussion, et dans la suite, le domaine A et le codomaine B interviennent de manière cruciale ; donc il est question d'*applications* et non de *fonctions*.

Interlude — rappels (2)

- Une *réciproque* de $f : A \longrightarrow B$ est une application $g : B \longrightarrow A$ telle que

$$(\forall\, a \in A)\ (\forall\, b \in B)\ b = f(a) \Leftrightarrow a = g(b).$$

- Cette condition équivaut à la conjonction des deux suivantes :

$$\begin{cases} (\forall\, a \in A)\ g(f(a)) = a \\ (\forall\, b \in B)\ f(g(b)) = b, \end{cases}$$

ou pour l'écrire plus légèrement :

$$\begin{cases} g \circ f = \mathrm{I}_A \\ f \circ g = \mathrm{I}_B. \end{cases}$$

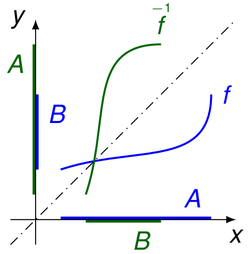
Interlude — rappels (3)

- Questions naturelles (pour un mathématicien !) :
  - Une application possède-t-elle toujours une réciproque ?
  - Lorsqu'il existe une réciproque, est-elle unique ?
- Réponses : non & oui.
- **Proposition.**
  - L'application f possède une réciproque si et seulement si elle est bijective.
  - Lorsque c'est le cas, elle est unique.
- Cette réciproque mérite donc une notation : $\overset{-1}{f}$.
- **Proposition.** Si f est bijective, $\overset{-1}{f}$ l'est également, et $\overset{-1}{\left(\overset{-1}{f}\right)} = f$.

Interlude — rappels (4)

Lorsque A et B sont des parties de $\mathbf{R}$,

- Une condition suffisante pour que $f : A \longrightarrow B$ soit injective est qu'elle soit strictement monotone.
- Si $f : A \longrightarrow B$ est injective, alors $\overline{f} : A \longrightarrow \operatorname{im} f$ est bijective, et donc possède une réciproque.
- Le graphe de $\overset{-1}{f}$ est le symétrique de celui de f par rapport à la bissectrice des axes.



Retour à notre problème

- Nous voulons maintenant résoudre l'équation

$$xe^x = a,$$

d'inconnue x, où a est un réel donné.

- Dans le membre de gauche, l'inconnue « se cache » cette fois à l'intérieur de la fonction

$$F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto xe^x.$$

- Os : F n'est pas monotone.

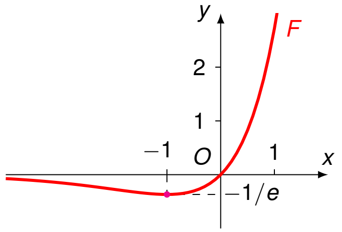
Étude sommaire de la fonction F

- Nous avons

$$F'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x,$$

donc

x		-1	
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	$-1/e$ min	$\nearrow$



Définition des fonctions de LAMBERT

- Nous allons résoudre (partiellement) le problème en restreignant F à des intervalles sur lesquels elle est strictement monotone :

$$F_{-1} : \left]-\infty;-1\right] \longrightarrow \left[-\tfrac{1}{e};0\right[: x \mapsto xe^x$$

et

$$F_0 : \left[-1;+\infty\right[\longrightarrow \left[-\tfrac{1}{e};+\infty\right[: x \mapsto xe^x ;$$

l'une et l'autre sont des bijections.

- Leurs réciproques sont les fonctions de LAMBERT :

$$W_{-1} : \left[-\tfrac{1}{e};0\right[\longrightarrow \left]-\infty;-1\right] : y \mapsto W_{-1}(y)$$

et

$$W_0 : \left[-\tfrac{1}{e};+\infty\right[\longrightarrow \left[-1;+\infty\right[: y \mapsto W_0(y).$$

Caractérisation

- Donc

$$(\forall\, x \leqslant -1)\ (\forall\ -\tfrac{1}{e} \leqslant y < 0) \quad x = W_{-1}(y) \Leftrightarrow y = xe^x$$
$$(\forall\, x \geqslant -1)\ (\forall\, y \geqslant -\tfrac{1}{e}) \quad x = W_0(y) \Leftrightarrow y = xe^x.$$

- Et encore :

$$\begin{cases} (\forall\, x \leqslant -1) & W_{-1}(xe^x) = x, \\ (\forall\ -\tfrac{1}{e} \leqslant y < 0) & W_{-1}(y) \cdot e^{W_{-1}(y)} = y, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\forall\, x \geqslant -1) & W_0(xe^x) = x, \\ (\forall\, y \geqslant -\tfrac{1}{e}) & W_0(y) \cdot e^{W_0(y)} = y. \end{cases}$$

- N.B. : Lorsque l'indice n'a pas d'importance, on note parfois W l'une quelconque des deux fonctions W_0 ou W_{-1}.
En particulier, si $x \geqslant 0$, $W(x) = W_0(x)$.

L'équation $xe^x = a$

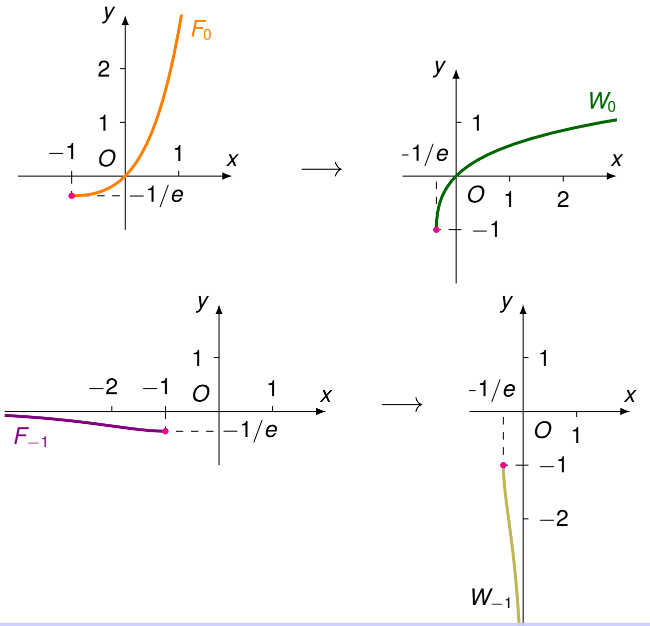
- Notre but est atteint ! Nous pouvons dire que l'ensemble des solutions de l'équation

$$xe^x = a,$$

d'inconnue réelle x, est :

  - Si $a \geqslant 0$, $S = \{W_0(a)\}$;
  - Si $-\frac{1}{e} < a < 0$, $S = \{W_0(a), W_{-1}(a)\}$;
  - Si $a = -\frac{1}{e}$, $S = \{-1\}$;
  - Si $a < -\frac{1}{e}$, $S = \varnothing$.

Graphes



Valeurs particulières

- $W_0(e) = 1$;
  $W_0(0) = 0$;
  $W_0(-1/e) = W_{-1}(-1/e) = -1$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} W_0(x) = +\infty$;
  $\lim\limits_{x \to 0_-} W_{-1}(x) = -\infty$.

Quelques identités

- $e^{W(x)} = \dfrac{x}{W(x)}$ $\quad [x \geqslant -1/e, x \neq 0]$;
- $W(x) = \ln\left(\dfrac{x}{W(x)}\right)$ $\quad [x \geqslant -1/e, x \neq 0]$;
- $W_0(x) = \ln x - \ln W_0(x)$ $\quad [x > 0]$;
- $W_{-1}(x \ln x) = \ln x$ et $e^{W_{-1}(x \ln x)} = x$ $\quad [0 < x \leqslant 1/e]$;
- $W_0(x \ln x) = \ln x$ et $e^{W_0(x \ln x)} = x$ $\quad [x \geqslant 1/e]$;
- $W_{-1}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right) = -\ln x$ et $e^{W_{-1}(-(\ln x)/x)} = 1/x$ $\quad [x \geqslant e]$;
- $W_0\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right) = -\ln x$ et $e^{W_0(-(\ln x)/x)} = 1/x$ $\quad [0 < x \leqslant e]$.

Dérivée

- Rappel : si f est bijective et dérivable,
  $$\left(\overset{-1}{f}\right)' = \frac{1}{f' \circ \overset{-1}{f}} \quad \text{c.-à-d.} \quad \left(\overset{-1}{f}\right)'(x) = \frac{1}{f'(\overset{-1}{f}(x))}$$
  (définie où $f'(\overset{-1}{f}(x)) \neq 0$).
- Donc,
  $$W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}.$$
- Si $x \neq 0$, on a aussi
  $$W'(x) = \frac{W(x)}{x(W(x)+1)}.$$

Primitive

- En commençant par le changement de variable $t = W(x)$ puis en primitivant deux fois par parties,

$$\int W(x)\,dx = x\left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)}\right).$$

Exemples d'utilisation

- Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x :
  - $3^x = 3x$;
  - $x + 2^x = 4$;
  - $\dfrac{x^3}{2^x} = 4$;
  - $x^x = 100$;
  - $x^x = \dfrac{1}{e}$;
  - $x^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Discuter selon les valeurs de $a \in \mathbf{R}_+^*$ le nombre de solutions des équations suivantes, d'inconnue réelle x :
  - $a^x = ax$,
  - $x^x = a$.
- Résoudre l'équation
$$s_\infty = s_0 e^{-R_0(1-s_\infty)},$$
d'inconnue $s_\infty \in [\,0;1\,]$.
- Expliciter y en fonction de x à partir de la relation $x^y = y^x$.