Math et musique

De la vie dans nos oreilles

Marie Pierard - 20 août 2024 - Congrès de la SBPMef

Présentation

Marie Pierard

- étudiante en mathématiques à l'UNamur de 2009 à 2014
- assistance à l'UNamur de 2014 à 2018
- collaboratrice didactique à l'UNamur de 2018 à 2022
- enseignante en mathématiques depuis 2014, à l'IATA depuis 2016

- étude de la flûte-traversière au conservatoire Balthazar-Florence de Jambes de 1998 à 2009 (académie)
- étude du violoncelle (depuis 2015) mais surtout de la harpe (depuis 2021)
- études supérieures en flûte-traversière à l'IMEP depuis septembre 2022 (école supérieure des arts)

- pas du tout une experte des liens entres les deux…

Introduction

Objectifs du jour :

- établir quelques notions élémentaires de la théorie musicale
- relier les caractéristiques d'un son (hauteur, durée, intensité) à plusieurs notions mathématiques
- explorer quelques applications de ces liens
- vous donner des clés pour aller plus loin

Pour que cet exposé soit accessible à chacun, j'ai choisi de

- prendre quelques raccourcis musicaux ;
- parler essentiellement des mathématiques qui font naturellement partie de la musique

Citation de Leibniz à Christian Goldbach :

« La musique est une activité arithmétique où l'esprit n'est pas conscient qu'il compte ».

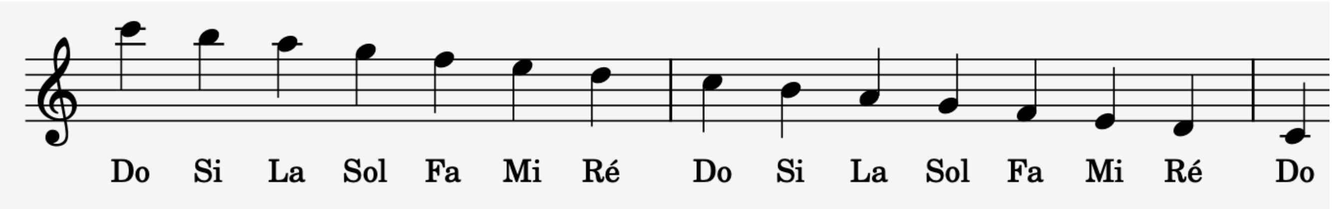
La hauteur du son

Les notes de la gamme

Les notes de la gamme ont des noms : Do Ré Mi Fa Sol La Si.

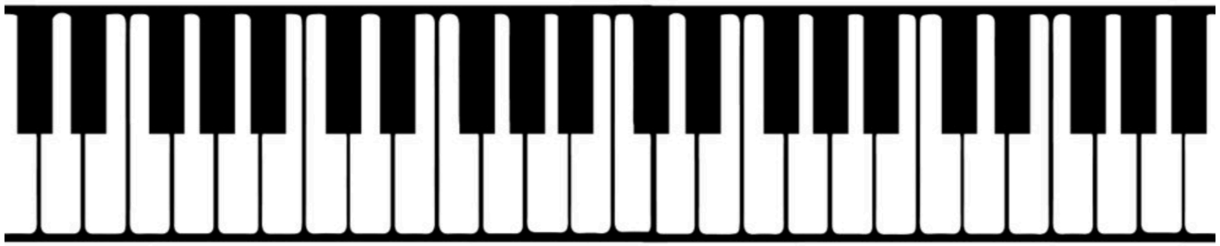
Puis on boucle, c'est une sorte de modulo 7 permettant de passer d'une octave à une autre.

On peut se promener dans l'autre sens et aller des notes aiguës vers les notes grave : Do Si La Sol Fa Mi Ré Do.

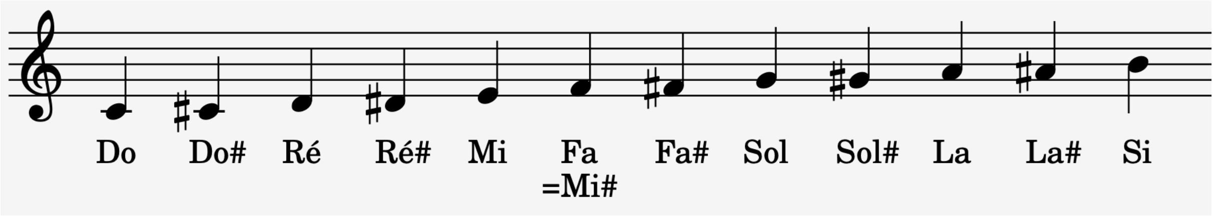


La hauteur du son

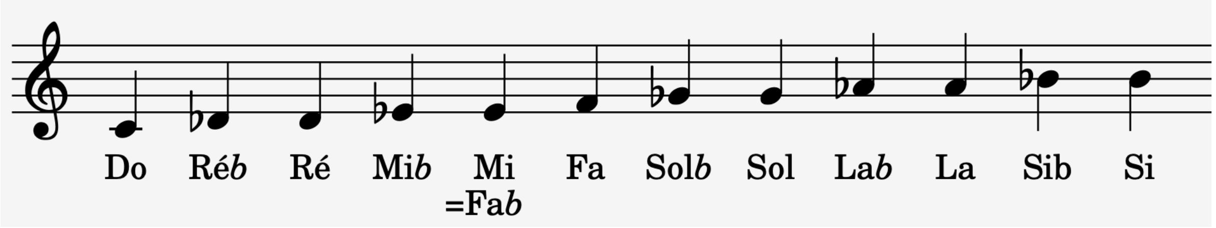
Les notes de la gamme



- les dièses (#) permettent de jouer une note légèrement plus aiguë que celle de base :

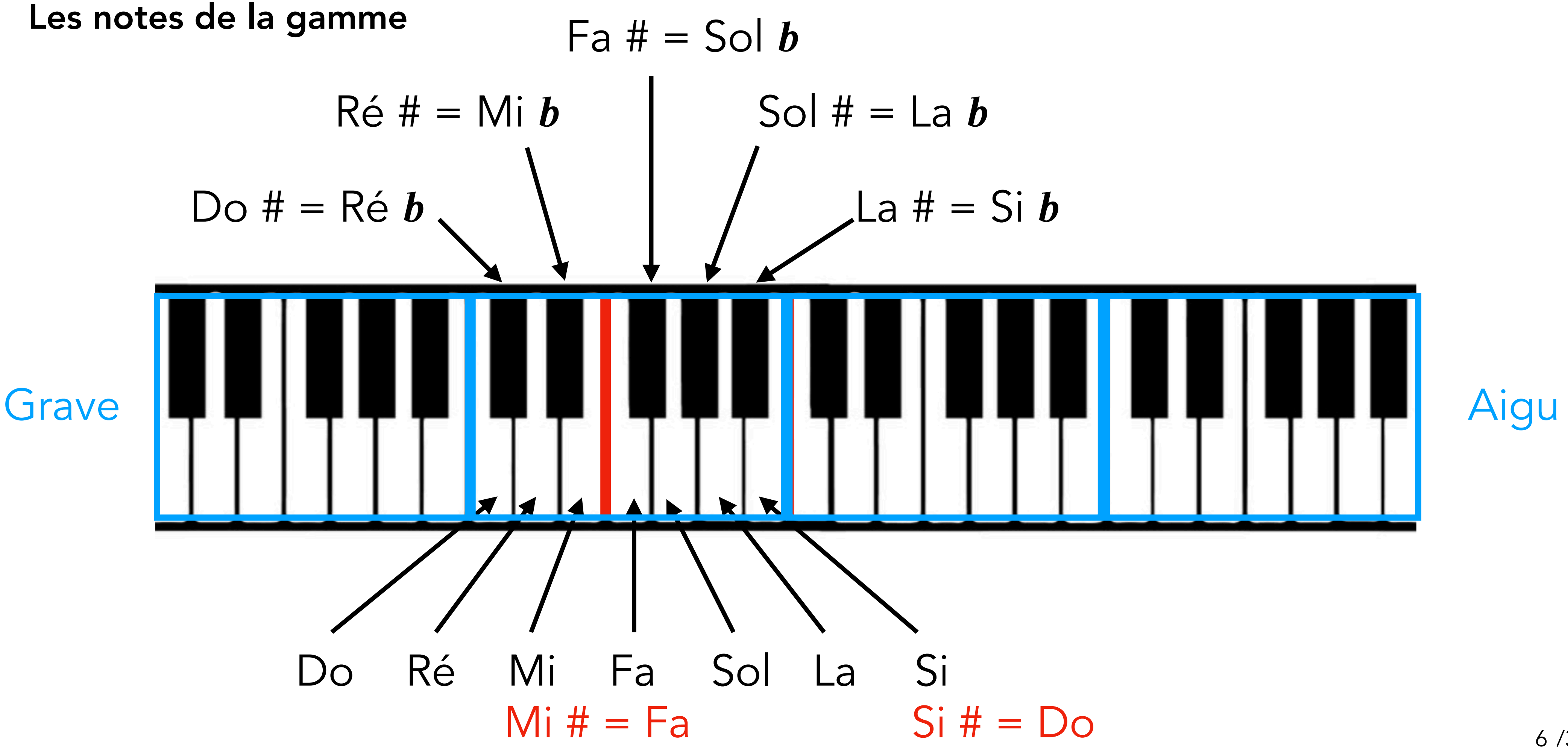


- les bémols (*b*) permettent de jouer une note légèrement plus grave que celle de base :



La hauteur du son

Les notes de la gamme



La hauteur du son

Encore plus de notes

On a donc 12 notes.

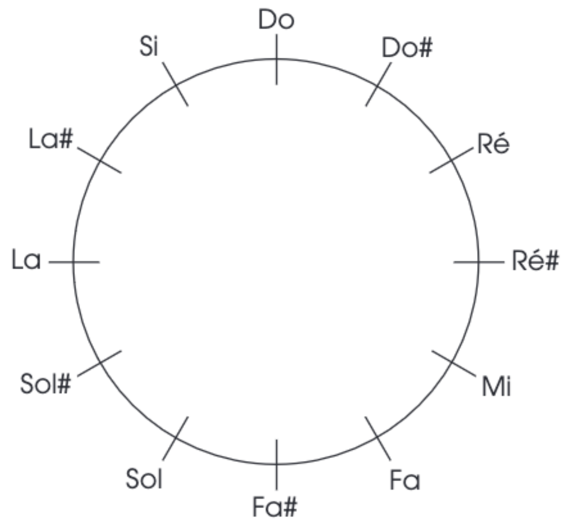
- données discrètes pour la plupart des instruments de musique
- données continues pour d'autres !

Par exemple :

  - les instruments de la famille du violon
  - la flûte à coulisse
  - la voix humaine

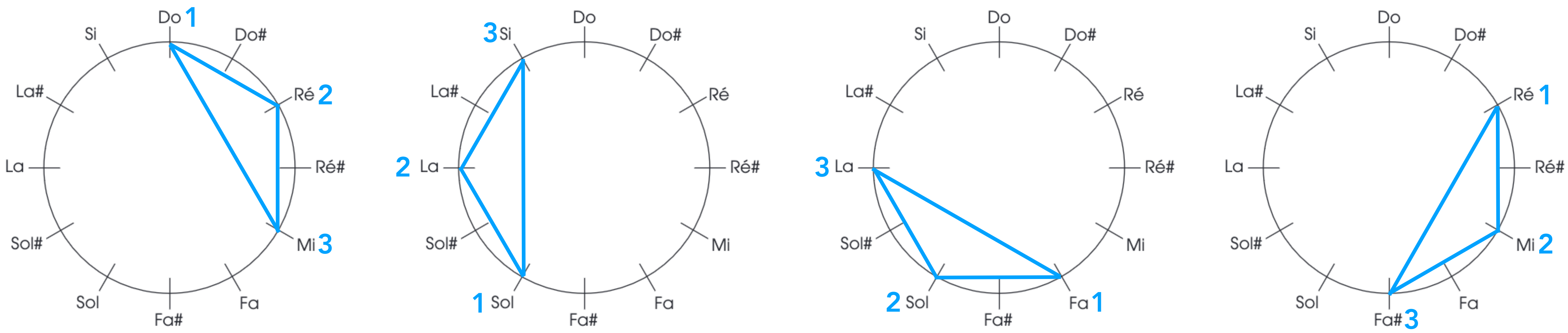
La hauteur du son

La transposition



Exercice : puisque vous êtes échauffés… chantons « au clair de la lune »

Géométriquement, il suffit de faire une rotation pour trouver les notes d'une transposition.

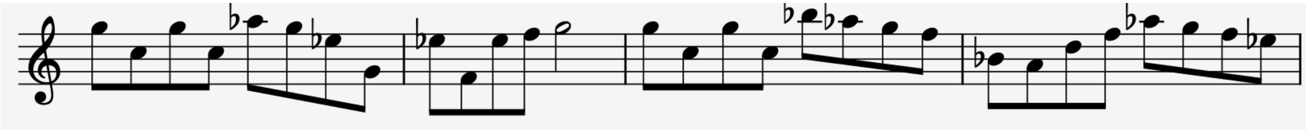


La hauteur du son

Les intervalles

Blind Test !

1. Thème de « Star Wars »



2. Thème de « La liste de Schindler »

Ces deux morceaux commencent par un intervalle de quinte :

- ascendante pour « Star Wars »
- descendante pour « La Liste de Schindler ».

Attention, en musique, l'intervalle est une distance entre deux notes : ce n'est pas [Do - Sol] !

La hauteur du son

Les intervalles

Tous les intervalles ont des noms :

- de Do à Ré : la seconde majeure
- de Do à Ré*b* : la seconde mineure
- de Do à Mi : la tierce majeure
- de Do à Mi*b* : la tierce mineure
- de Do à Fa : la quarte
- de Do à Sol : la quinte → La quinte est vraiment très agréable à l'oreille.
- de Do à La : la sixte majeure
- de Do à La*b* : la sixte mineure
- de Do à Si : la septième majeure
- de Do à Si*b* : la septième mineure
- de Do à Do : l'octave

La hauteur du son

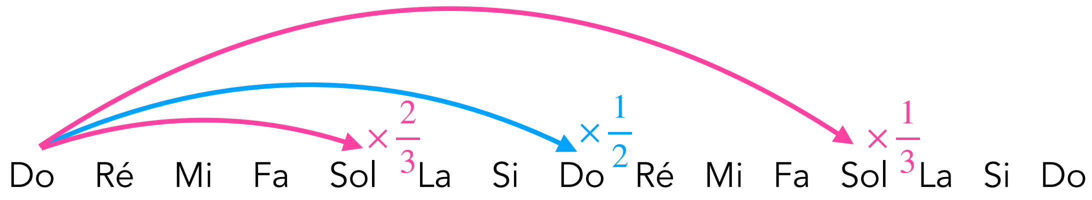
Les intervalles

C’est à la société des pythagoriciens qu’on attribue la découverte des intervalles.

Admettons qu’une corde tendue permette de faire sonner un Do. Alors :

- une corde deux fois plus courte permet d’obtenir l’octave supérieure : un Do plus aigu
- une corde faisant deux tiers de la longueur initiale permet d’obtenir la quinte supérieure : un Sol plus aigu
- une corde faisant un tiers de la longueur permet d’obtenir une octave de la quinte : un Sol encore plus aigu

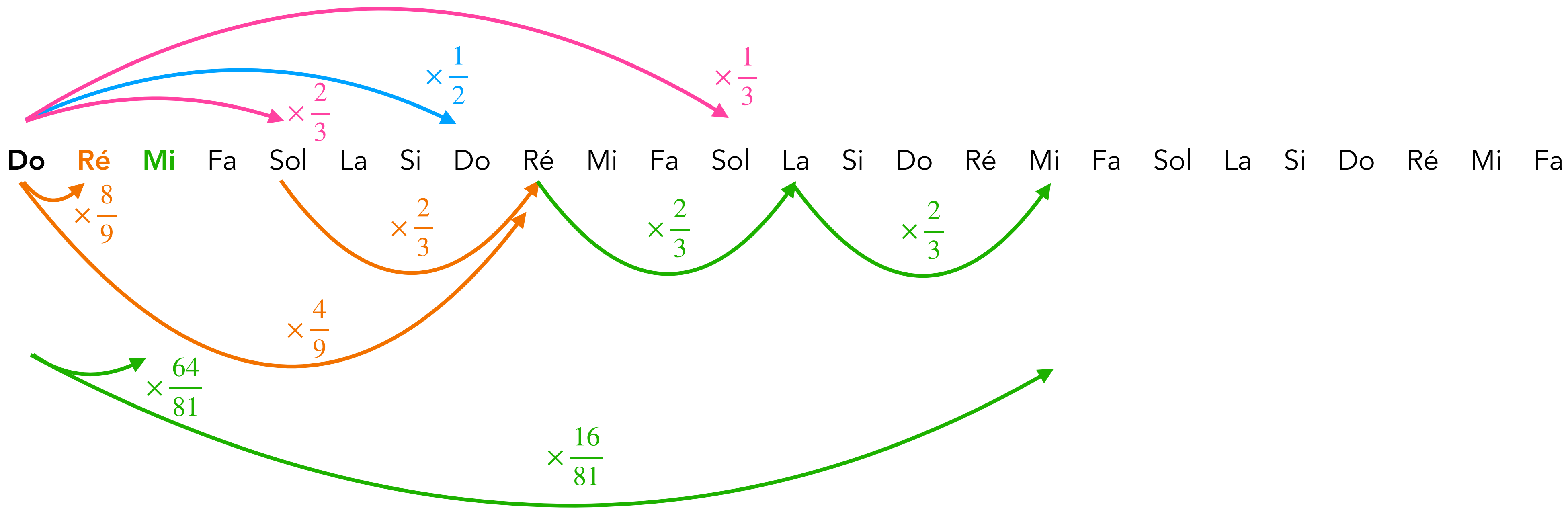
À partir de là, ils ont pu constituer toute une gamme… merci aux fractions !



La hauteur du son

Les intervalles

À vous de jouer : comment passer du **Do** au **Ré** ? et du **Do** au **Mi** ?



Malheureusement, cette technique ne permet pas de « boucler la boucle ».

On retrouve un Do après sept quintes : $\left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0{,}059$. Et ce même Do correspond à la quatrième octave : $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0625$

La hauteur du son

Les intervalles

Aujourd’hui, on travaille essentiellement avec le « tempérament égal » : les intervalles entre deux notes consécutives sont tous égaux.

Si une corde permet de jouer un Do, on utilise :

- $\frac{1}{2}$ de la corde du Do → Do à l’octave supérieure
- $\frac{2}{3}$ de la corde du Do → Sol (quinte)
- $\frac{3}{4}$ de la corde du Do → Fa (quarte)
- $\frac{4}{5} = 0{,}8$ de la corde du Do, au lieu de $\frac{64}{81} = 0{,}7901$ → Mi (tierce majeure)
- $\frac{5}{6} = 0{,}8333$ de la corde du Do, au lieu de $\frac{8}{9} = 0{,}8889$ → Ré (seconde majeure)

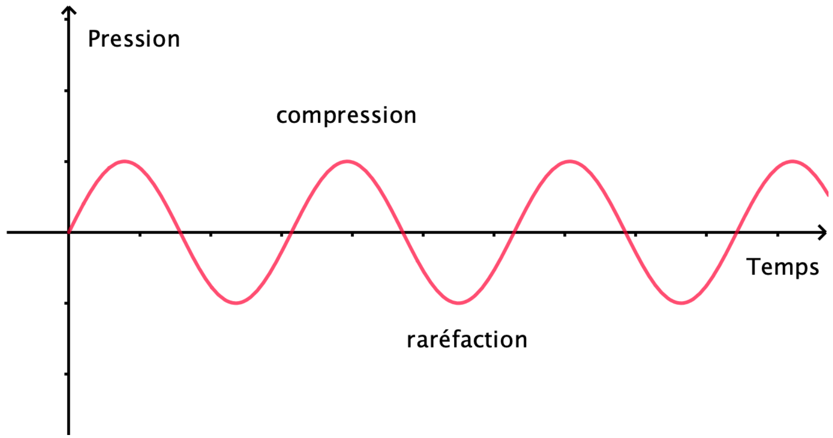
La hauteur du son

Les fréquences

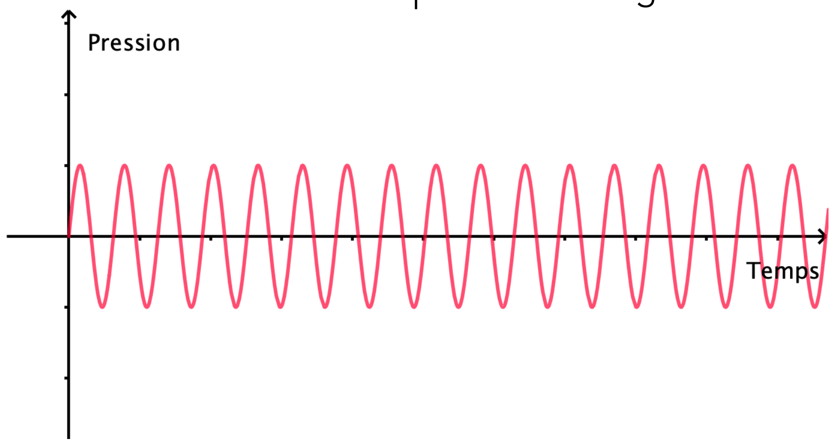
Rappelons que le son est :

1. une vibration émise par une source
2. qui se propage dans l'air sous forme d'onde
   - alternance de zones de compression et de raréfaction des particules dans l'air
3. qui est captée par un récepteur (notre oreille)
4. puis traduite par notre cerveau.

Basse fréquence : son grave



Haute fréquence : son aigu



La hauteur du son

Les fréquences

Si on joue une note de fréquence f_1, alors des multiples de cette fréquence permettent d'entendre d'autres notes :

- $f_2 = 2f_1$ fera sonner l'octave,
- $f_3 = 3f_1 = \dfrac{3}{2}f_2$ fera sonner la quinte de f_2,
- $f_4 = 4f_1 = \dfrac{4}{3}f_3$ fera sonner la quarte de f_3,
- $f_5 = 5f_1 = \dfrac{5}{4}f_4$ fera sonner la tierce de f_4,
- etc.

La hauteur du son

Les fréquences

Quel rapport avec la consonance ?

Par exemple, quand on joue un Do (fréquence f_1), on entend

- essentiellement un **Do** : f_1
- beaucoup plus faiblement, un **Do** à l'octave supérieure : $f_2 = 2f_1$;
- encore plus faiblement, un **Sol** à l'octave supérieure : $f_3 = 3f_1 = \frac{3}{2}f_2$;
- encore plus faiblement, un **Do** encore plus aigu : $f_4 = 4f_1 = 2f_2$;
- encore plus faiblement, un **Mi** toujours plus aigu : $f_5 = 5f_1 = \frac{5}{4}f_4$;
- etc.

Do Ré Mi Fa Sol La Si **Do** Ré Mi Fa **Sol** La Si **Do** Ré **Mi** Fa

La hauteur du son

Les fréquences

D'une certaine manière, le Do contient déjà un Sol. Ces deux notes ont des harmoniques communes : elles sont consonantes.

- Accord parfait majeur : Do - Mi - Sol
- Accord parfait mineur est Do - Mib - Sol
- Les instruments de musique se différencient par leur timbre.
- Un son pur ne fait pas résonner d'harmoniques (sinusoïde parfaite).

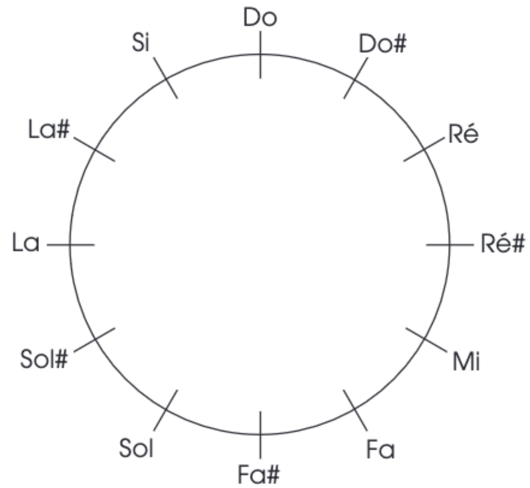
Exercice :

Quelles sont les harmoniques du La grave, dont la fréquence est de 110 Hz ? Retrouvez leur fréquence et leur nom.

- 110 Hz : La octave 1 - f_1
- 220 Hz : La octave 2 - $f_2 = 2f_1$
- 330 Hz : Mi octave 2 - $f_3 = 3f_1 = \frac{3}{2}f_2$
- 440 Hz : La octave 3
- 550 Hz : Do# octave 3
- 660 Hz : Mi octave 3
- 770 Hz : Sol octave 3
- 880 Hz : La octave 4

La hauteur du son

Le groupe cyclique modulo 12



On a vu que :

- la gamme est constituée de 12 notes dont 7 notes de base et 5 notes altérées.

- différentes fréquences portent le même nom de note (à une octave près) : La à 110 Hz, 220 Hz, 330 Hz, 440 Hz etc ;

  On peut considérer que les 12 notes sont en réalité 12 classes d'équivalence de notes : la classe d'équivalence du La reprend toutes les notes dont la fréquence est 440 Hz $\times 2^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

- les écarts entre différentes notes portent le nom d'intervalles : seconde, tierce, quarte, quinte, etc.

  Le nom d'un intervalle ne change pas en fonction de l'octave : Do-Sol est une quinte, pour n'importe que Do et n'importe que Sol.

La hauteur du son

Le groupe cyclique modulo 12

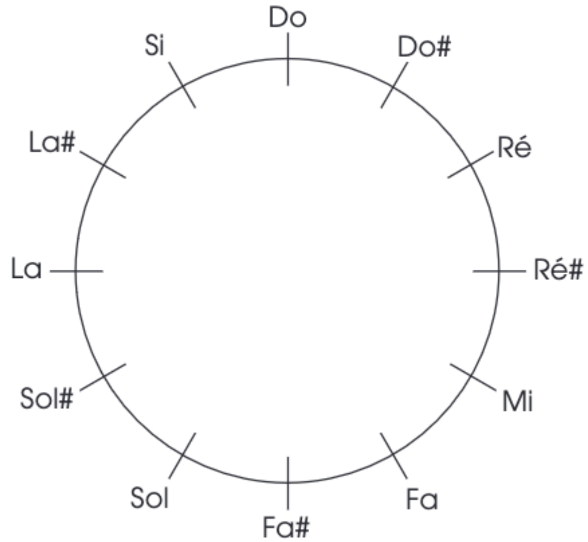
On peut réaliser des additions modulo 12 comme sur une horloge :

Do + Sol = 0 + quinte = 0 + 7 = Sol

Fa + Sol = 5 + quinte = 5 + 7 = Do

La + Fa = 9 + quarte = 9 + 5 = Ré

Mi + Do = 4 + octave = 4 + 0 = Mi



On a, grosso modo, une structure de groupe cyclique modulo 12.

Groupe : Collection d'éléments qui peuvent être combinés entre eux de sorte que le résultat de la combinaison de deux éléments fasse également partie de la collection.

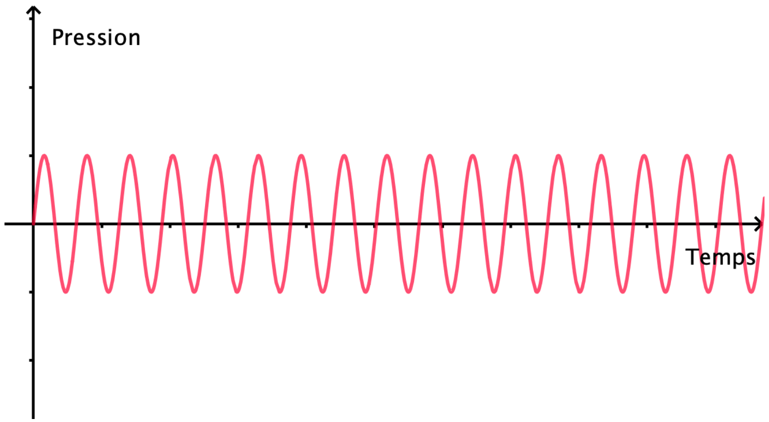
- associativité : (Mi + Fa) + Sol = Mi + (Fa + Sol)
- neutre : Do + Sol = Sol + Do = Sol
- symétrique : pour Fa, il existe Sol tel que Fa + Sol = Do

La hauteur du son

Les fréquences et la décomposition de Fourier

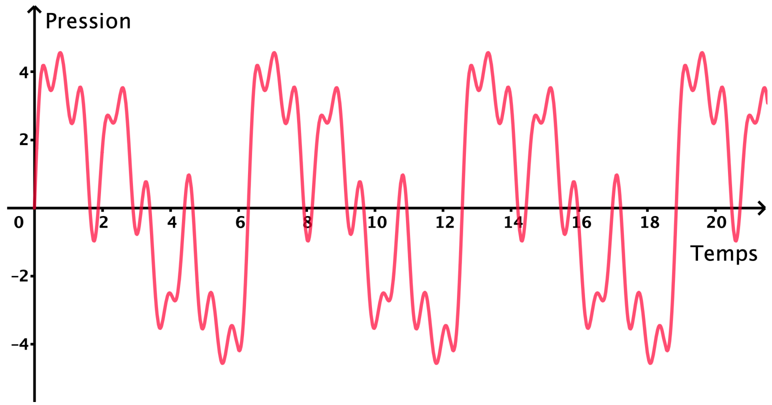
Rappel : les seuls sons qui peuvent être modélisés par une sinusoïde parfaite sont les sons purs.

Et les autres ?



Les sons peuvent être modélisés par des fonctions périodiques qui peuvent être décomposées en sinusoïdes, grâce à la décomposition de Fourier :

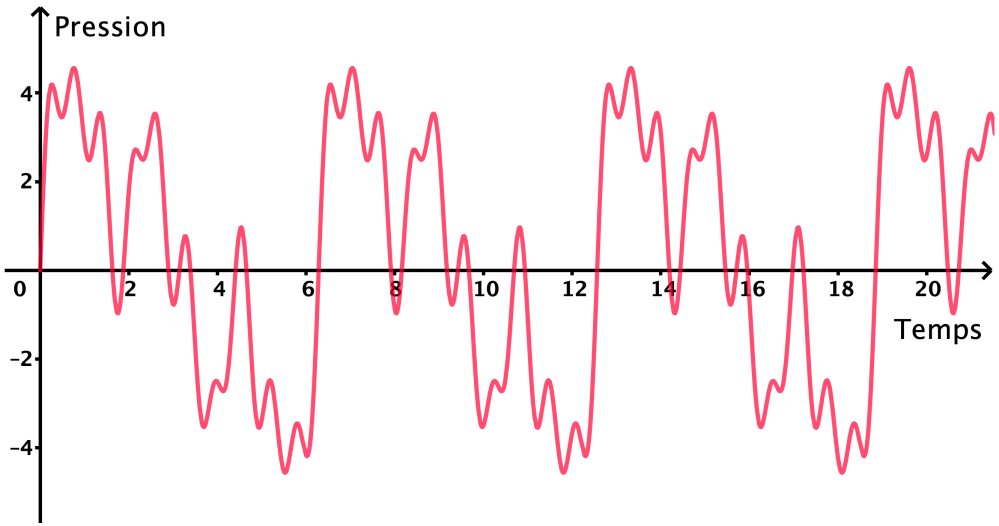
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin(ix) \qquad \text{où} \qquad b_i = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(ix)dx$$

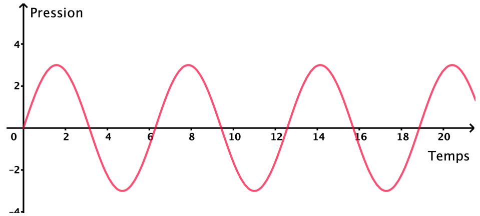


Si i est tel quel $b_i \neq 0$, alors i permet d'obtenir la fréquence d'une harmonique.

La hauteur du son

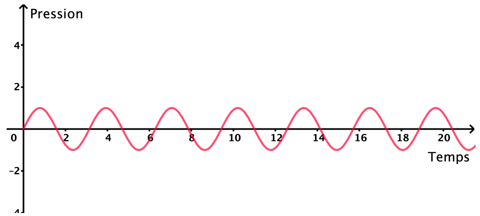
Les fréquences et la décomposition de Fourier





fréquence f_1

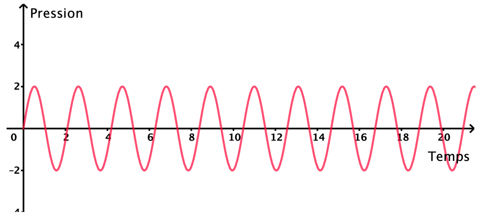
= fréquence fondamentale



fréquence $f_2 = 2f_1$

= deuxième harmonique

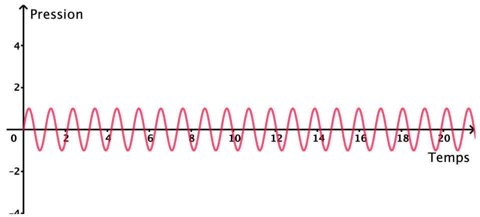
= octave



fréquence $f_3 = 3f_1 = \dfrac{3}{2} f_2$

= troisième harmonique

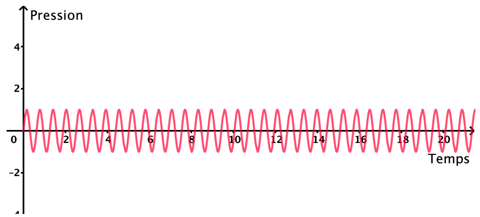
= quinte



fréquence $f_4 = 4f_1 = \dfrac{4}{3} f_3$

= quatrième harmonique

= quarte



fréquence $f_5 = 5f_1 = \dfrac{5}{4} f_4$

= cinquième harmonique

= tierce

La hauteur du son

Les fréquences et la décomposition de Fourier

$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin(ix)$ où $b_i = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(ix)dx$

Cette fonction est périodique de période $T = 2\pi$ et donc de fréquence $f_1 = \frac{1}{2\pi}$.

$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)dx = 3$ donc $f(x) = 3\sin(x) + \ldots$ -> fréquence $f_1 = \frac{1}{2\pi}$

$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(2x)dx = 1$ donc $f(x) = 3\sin(x) + \sin(2x) + \ldots$ -> fréquence $f_2 = \frac{2}{2\pi} = 2f_1$

$b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(3x)dx = 2$ donc $f(x) = 3\sin(x) + \sin(2x) + 2\sin(3x) + \ldots$ -> fréquence $f_3 = \frac{3}{2\pi} = 3f_1$

On peut continuer et écrire : $f(x) = 3\sin(x) + \sin(2x) + 2\sin(3x) + \sin(6x) + \sin(10x)$

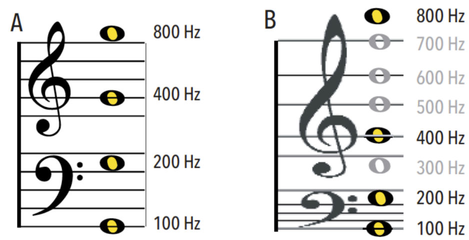
La hauteur du son

Les fréquences et les repères logarithmiques

Quand on travaille sur une portée, on travaille en quelque sorte sur un repère logarithmique des fréquences.

Entre le premier et le second Do, la fréquence a été multipliée par 2, idem entre le premier et le second Ré, etc.

Pourtant, pour atteindre le premier Ré, on a multiplié par 5/6.



La hauteur du son

Les fréquences et les repères logarithmiques

Revenons à notre La plus usuel, de fréquence 440 Hz.

Puisque le rapport entre deux octaves est toujours de deux, cela veut dire que pour les La, on a les fréquences :

55 - 110 - 220 - 440 - 880 - 1760 Hz

55 Hz d'écart

880 Hz d'écart

L'oreille humaine est donc beaucoup plus fine dans les hautes fréquences.

Cela explique aussi que pour bien distinguer des sons graves, on doit monter le volume.

L’intensité du son

Les nuances sur la partition

ppp	triple piano - pianissimo
pp	double piano
p	piano
mp	mezzo piano
mf	mezzo forte
f	forte
ff	double forte
fff	triple forte - fortissimo

L’intensité du son, en $W.m^{-2}$, se mesure aisément mais donne des nombres fort grands et peu manipulables. Les logarithmes vont nous simplifier la tâche.

On mesure le niveau sonore (« level », volume) en décibels :

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I est l’intensité du son (en $W.m^{-2}$)

et $I_0 = 10^{-12}W.m^{-2}$ est le seuil d’audibilité.

Si on double le nombre de sources, on augmente le niveau sonore de 3dB :

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{2\times I}{I_0}\right) = \left(10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) + \log_{10}(2)\right) = \left(10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)\right) + 3{,}01$$

L'intensité du son

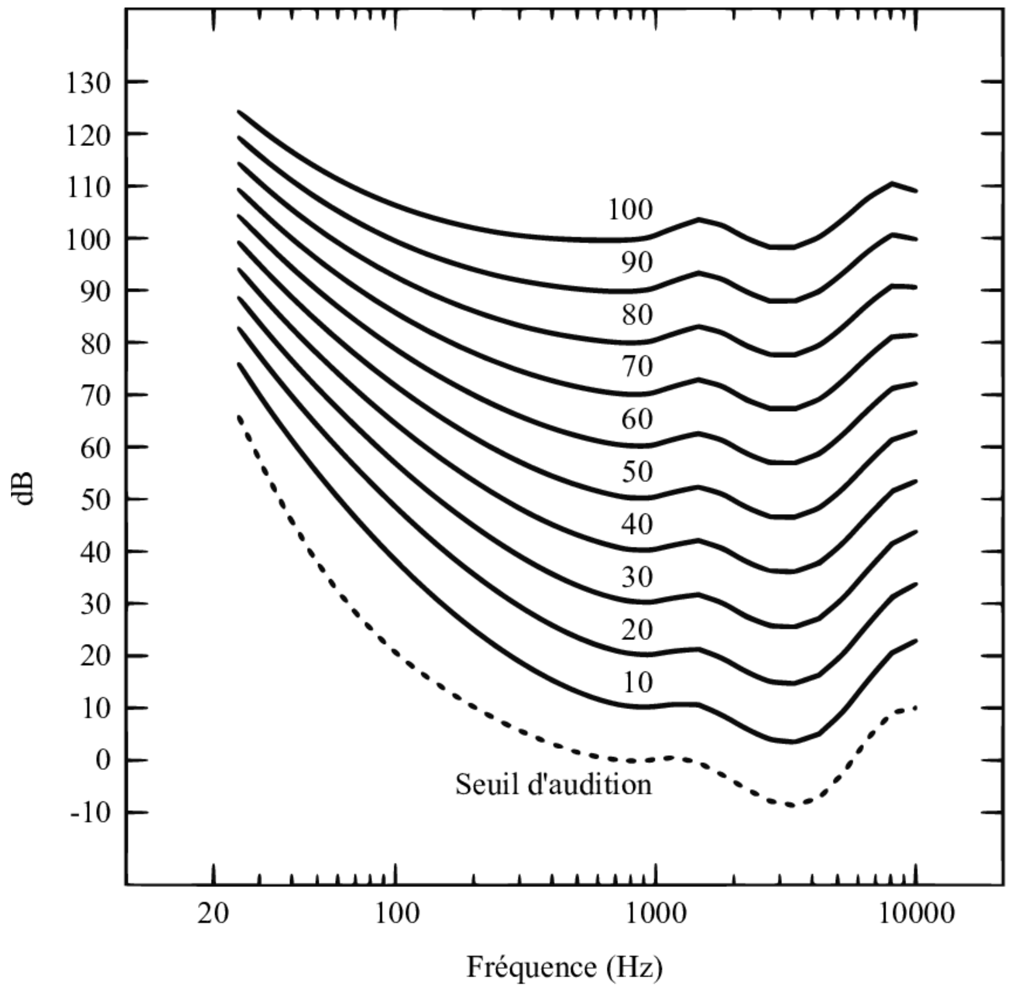
Les décibels et la sonie

Thèse de Gauthier Berthomieu :

- « La sonie décrit la sensation de force sonore engendrée par un son. Ainsi, plus un auditeur perçoit un son comme étant fort, plus la sonie correspondant à ce son est élevée. »
- Courbe isosonique : chaque ligne correspond au niveau à fournir (dB), pour une fréquence donnée (Hz), pour obtenir une sonie égale dont la valeur est notée en phone.

- doubler l'intensité : + 3dB
- doubler la distance : - 6dB
- doubler la sonie : +10 dB

Courbes isosoniques



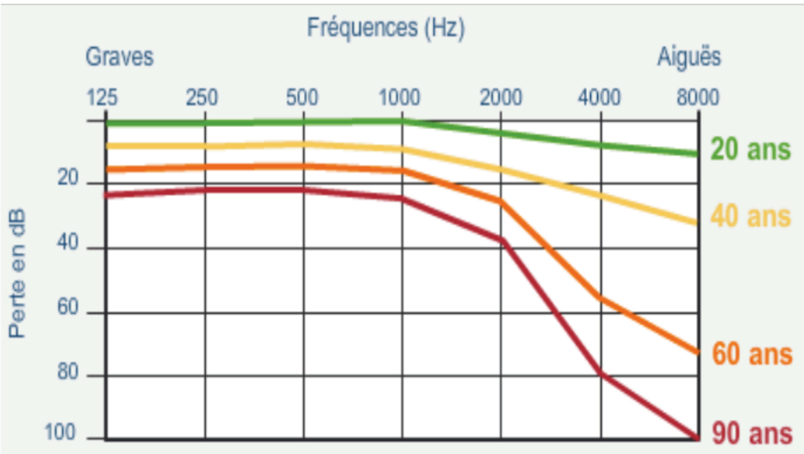
L'intensité du son

Les décibels et la presbyacousie

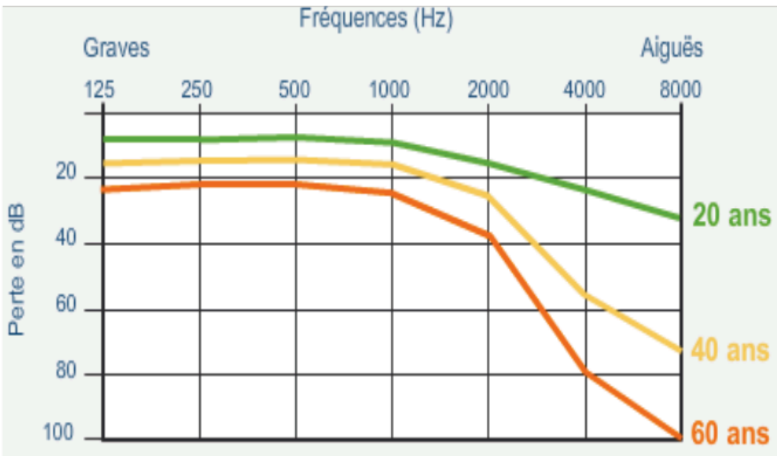
L'oreille humaine est plus à l'aise pour percevoir les sons aigus, surtout dans sa jeunesse.

Les repères semi-logarithmiques permettent de modéliser ce phénomène à l'aide des audiogrammes.

<u>Audiogramme d'une personne à presbyacousie normale</u>

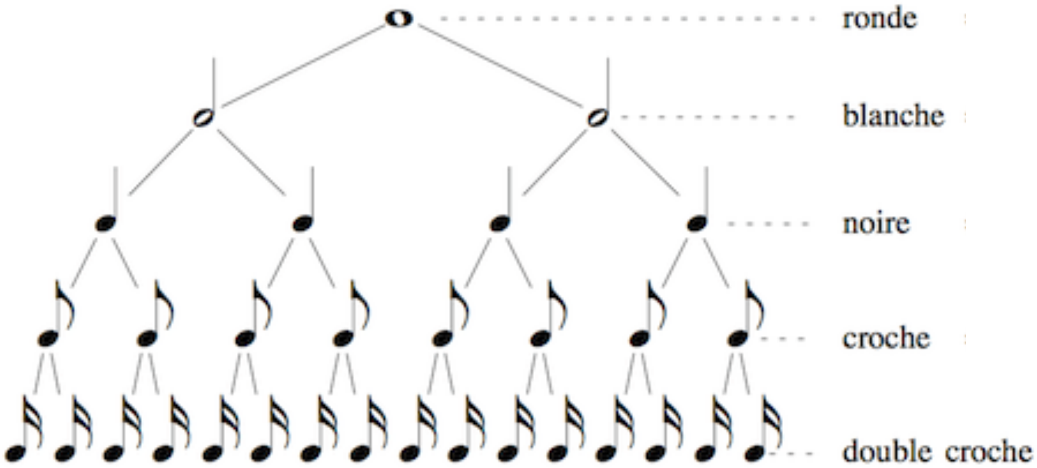


<u>Audiogramme d'une personne à presbyacousie précoce</u>



La durée du son

Le rythme



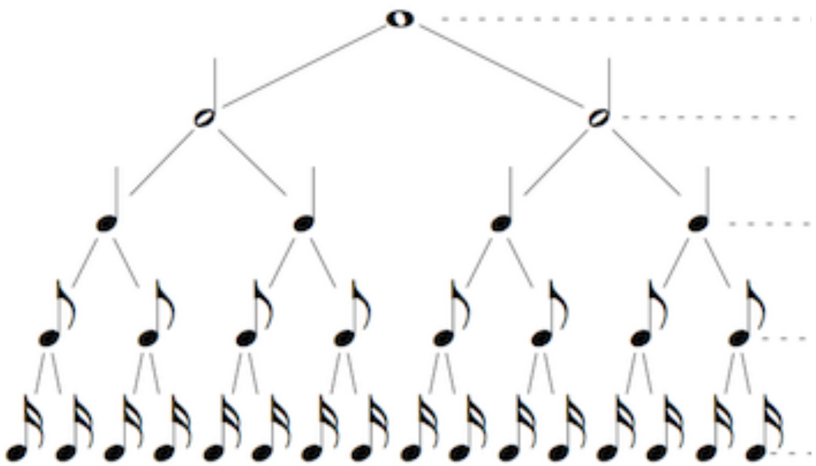
Source : https://apprendre-a-jouer-du-piano.com/bases-demarrer-lecture-de-rythme/

! Attention !

Ne pas confondre **rythme** et **tempo**

La durée du son

La durée du silence



Source : https://apprendre-a-jouer-du-piano.com/bases-demarr

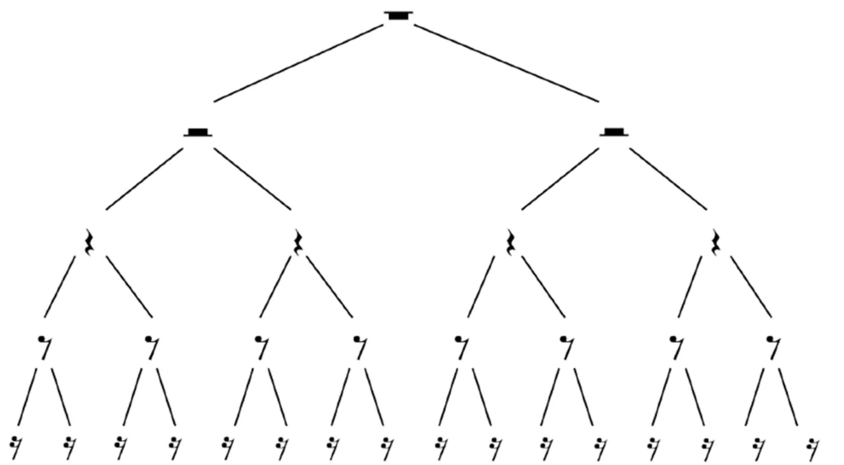
Ronde ↔ Pause

Blanche ↔ Demi-Pause

Noire ↔ Soupir

Croche ↔ Demi-soupir

Double-croche ↔ Quart de soupir



Source : https://www.mypianopop.com/silences-musique/

Applications dans le monde d'aujourd'hui

Shazam et ses empreintes

Chaque morceau de musique peut être représenté sur un spectrogramme : graphique à 3 dimensions donnant l'intensité d'un son (volume, en décibels) en fonction de sa hauteur (fréquence, en hertz) et de l'instant t auquel il apparait dans le morceau (temps, en secondes).

De ce spectrogramme, on extrait des points clés : ceux qui ont un volume sonore significativement plus élevé que leurs voisins. On obtient une constellation.

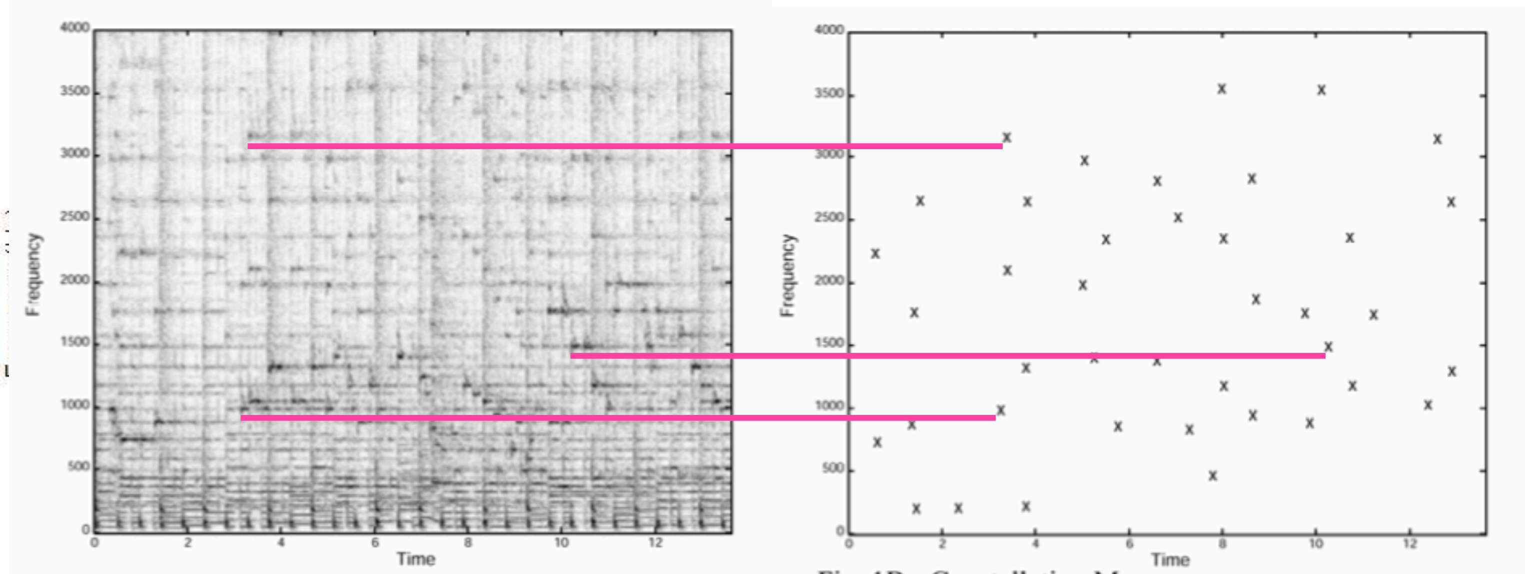


Fig. 1A - Spectrogram Fig. 1B - Constellation Map

Applications dans le monde d'aujourd'hui

Shazam et ses empreintes

Dans la constellation, on choisit des points d'ancrage auxquels on associe une zone cible.

On crée ensuite les triplets (fréquence du point d'ancrage ; fréquence du point de la zone cible ; Δt entre les deux points)
Ces triplets, appelés « marqueurs », constituent l'empreinte du morceau.

Shazam connaît des millions d'empreinte et, pour limiter l'impact des bruits, va comparer les marqueurs entendus à ceux de sa base de donnée, tenant également compte d'un éventuel décalage temporel des points d'ancrage.

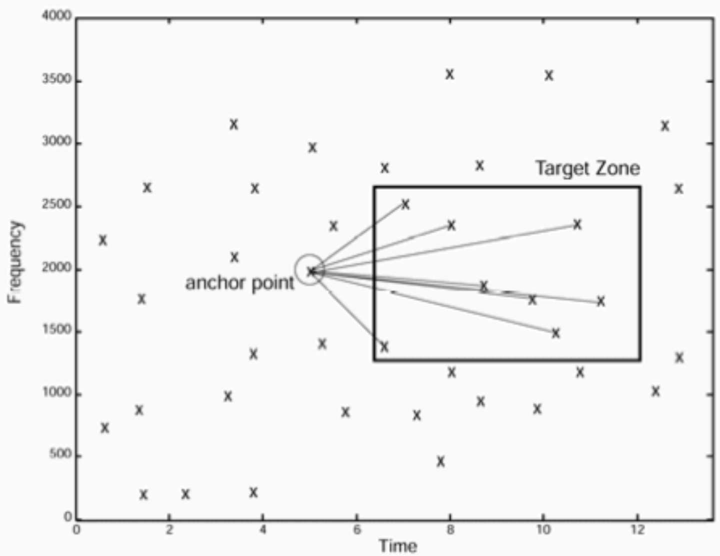


Fig. 1C - Combinatorial Hash Generation

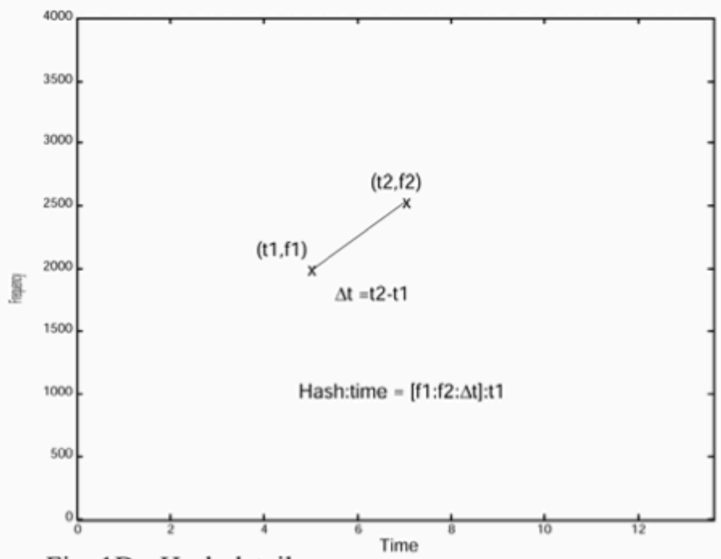
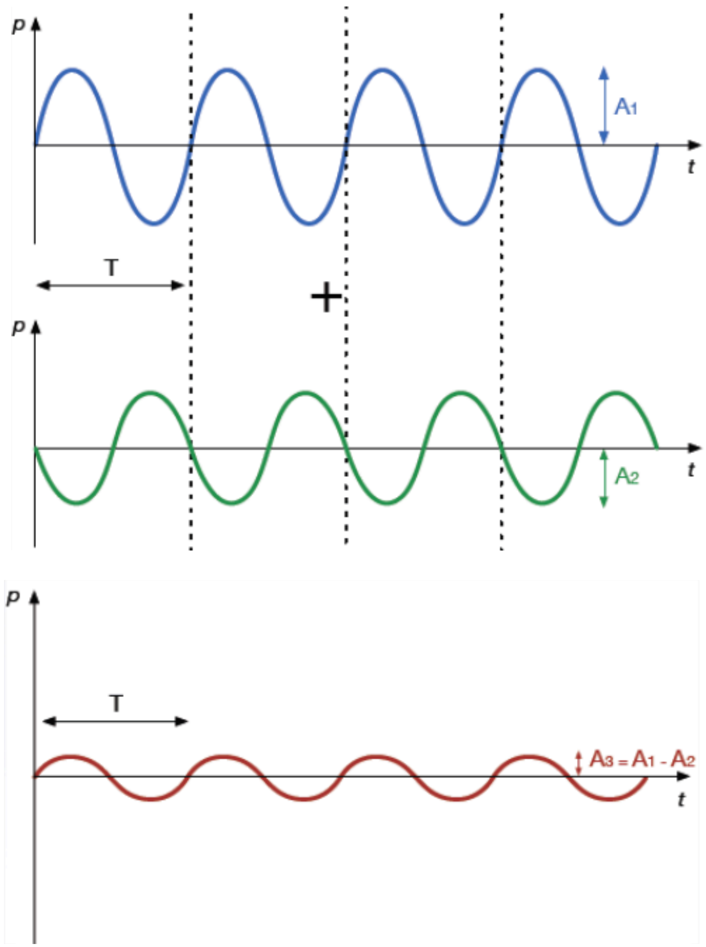


Fig. 1D - Hash details

Applications dans le monde d'aujourd'hui

Les casques anti-bruit



- un micro capte le son à réduire
- le son en opposition de phase est émis par les hauts-parleurs
- l'amplitude de la somme des ondes est réduite

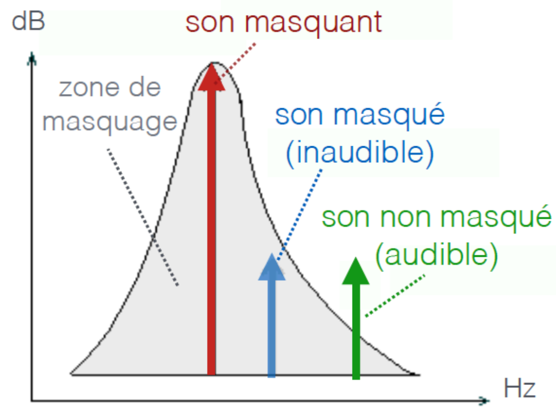
Applications dans le monde d'aujourd'hui

La compression des fichiers audio

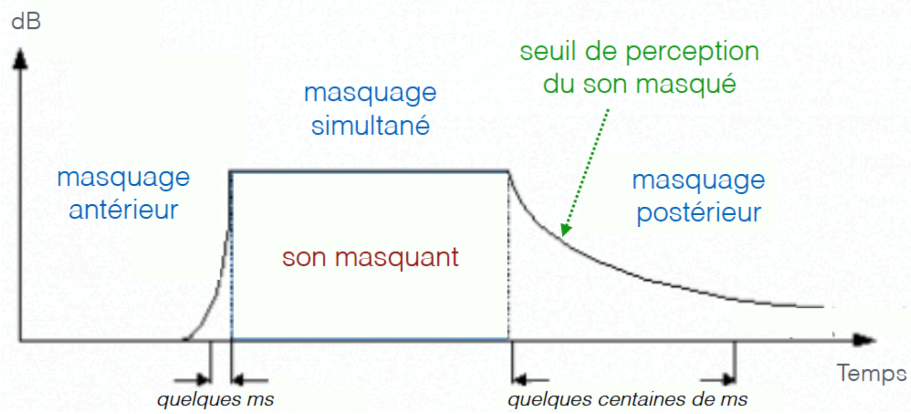
Il existe 3 types de masquage :

- fréquentiel
  - pour deux sons simultanés de fréquences proches
  - les basses fréquences masquent les hautes fréquences
- temporel
  - baisse d'audibilité d'un son causée par la présence antérieure ou postérieure d'un autre son
  - dû à l'inertie de l'oreille pour un masquage antérieur (durée très courte)
- dynamique
  - égalisation des niveaux sonores (fréquent en musique pop)

Masquage fréquentiel



Masquage temporel



Applications dans le monde d’aujourd’hui

La compression des fichiers audio

La compression audio est une technique numérique visant à réduire la taille des données représentant un son, sans en dégrader la perception.

Rappelons qu’un son complexe est composé d’une multitude de fréquences d’amplitudes différentes. Le principe de la compression est de supprimer toutes celles qui ne sont pas perçues.

En compression audio, on supprime donc tout ce qu’on n’entend pas :

- suppression des composantes fréquentielles dont le niveau sonore est inférieur au seuil de perception ;
- suppression des composantes fréquentielles dont la durée est trop courte pour être perçues ;
- suppression des composantes fréquentielles masquées.

Ainsi naquirent les fichiers MP3, AAX, WMA, ou tout autre format mettant de compresser un WAV, AIFF, AU…

Défis de compositeurs

Canon en augmentation d'Arvo Pärt (1935-)

Cantus in Memory Of Benjamin Britten (1977)

- Chaque voix chante une mélodie descendante :

  La

  La Sol

  La Sol Fa

  La Sol Fa Mi

  La Sol Fa Mi Ré…

- Les nuances sont plus fortes d'une voix à l'autre, de *ppp* à *mp* et augmenteront au fur et à mesure.
  - contraste entre hauteurs descendantes et intensités croissantes

- Le rythme est toujours :

  Long Court Long Court Long Court…

  MAIS il est deux fois plus lent d'une voix à l'autre.

- Les secondes voix jouent des Mi = quinte du La, donc une note importante pour une tonalité en La mineur.

Défis de compositeurs

Mozart et la musique aléatoire

Mozart (1756-1791) <u>aurait</u> composé l'une des premières oeuvres de musique aléatoire en 1791 à partir de 176 mesures à 3 temps : sa *Musikalische Würfelspiel* (musique du jeu de dés).

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Source : https://musescore.com/user/56747/scores/1742031

Combien de valses de 16 mesures peut-on composer aléatoirement ?

11 choix par mesure, à répéter 16 fois, on obtient donc

11^{16} = 45 949 729 863 572 161 possibilités !

Cliquez ici pour faire la vôtre : https://dice.humdrum.org/

Conclusion

J'espère que vous avez bien intégré tout ce que je vous ai présenté.

Bibliographie

AMIOT Emmanuel, *Une introduction aux mathématiques de la musique,* éditions Calvage et Mounet, 2024

AVERY Li-Chun Wang, *An industrial-strength audio search algorithm*, Proceedings of ISMIR 2003, 4th International Conference on Music Information Retrieval, USA, 2003

BERTHOMIEU Gauthier, Influence de la position d'une source sur le niveau sonore perçu, thèse de doctorat, 12/12/2019, https://hal.univ-brest.fr/tel-02469434

FILATRIAU Jean-Julien, *Acoustique*, cours dispensé à l'IMEP en 2022-2023

FISCHER Myriam, *Leonhard Euler et la musique*, REPERES - IREM. N° 62, p.42-56, janvier 2006

JAMET Robin, *Géométrie musicale*, Découverte N°374, p.40-43, mai-juin 2011

Tangente Hors série n°11, Maths & Musique - des destinées parallèles, éditions Poles, 2010

Science publique, *La musique est-elle purement mathématique ?*, Radio France, 10 juin 2011, https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/science-publique/la-musique-est-elle-purement-mathematique-8819859#